BURHAN

La symétrie centrale et le parallélogramme : exercices, niveau examen

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/symetrie-centrale-et-parallelogramme/exercices/examen

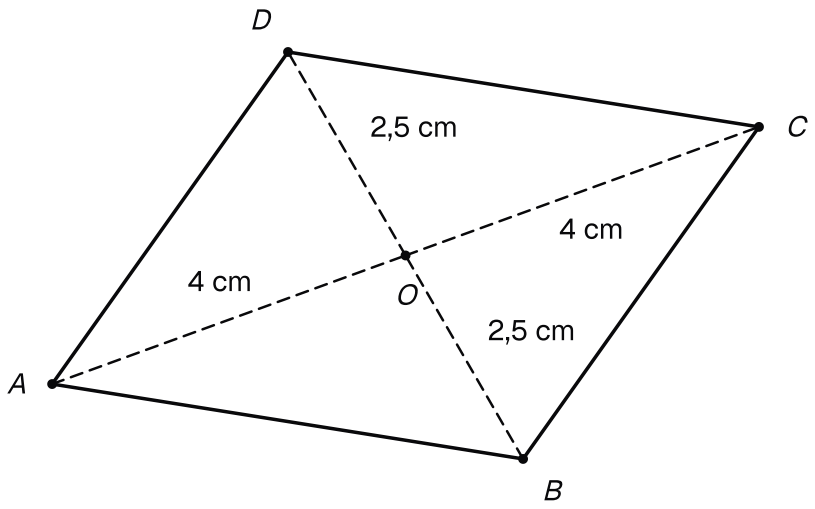
Chapitre	Palier	Exercices
La symétrie centrale et le parallélogramme	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Le carreau du carreleur

Devoir d'une heure, noté sur 15 points : cet exercice vaut 5 points, compte environ 20 minutes.

Un carreleur pose des carreaux en forme de quadrilatère $ABCD$. Sur le plan d'un carreau, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O. On a $OA = OC = 4$ cm et $OB = OD = 2{,}5$ cm.



Le plan du carreau ABCD : ses diagonales se coupent en O, avec OA = OC = 4 cm et OB = OD = 2,5 cm.

1. 2 pts

Recopie et complète la justification : « On sait que O est le milieu de … et de … Or, si … Donc $ABCD$ est … »

INDICE

Outil : la propriété qui reconnaît un parallélogramme par ses diagonales.

CORRIGÉ

Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O, avec $OA = OC$ et $OB = OD$: le point O est le milieu de chacune d'elles.

Justification complétée. On sait que O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$. Or, si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Conclusion. Le carreau $ABCD$ est un parallélogramme.

2. 1 pts

Le carreleur mesure $AB = 5{,}5$ cm. Sans mesurer, donne CD. Cite la propriété.

INDICE

Outil : une propriété des côtés d'un parallélogramme.

Début : utilise la question 1.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $ABCD$ est un parallélogramme.

Or, les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur. Donc $CD = AB = 5{,}5$ cm.

Conclusion. D'après la propriété des côtés opposés d'un parallélogramme, le côté $[CD]$ mesure $5{,}5$ cm.

3. 2 pts

Calcule la longueur AC. Le point E est le symétrique de A par rapport au point C. En déduire la longueur AE.

INDICE

Début : $AC = OA + OC$.

Point délicat : cette fois, le centre est C, pas O.

CORRIGÉ

Longueur AC. Le point O est sur la diagonale $[AC]$, entre A et C. On a donc $AC = OA + OC = 4 + 4 = 8$ cm.

Longueur AE. Le centre est maintenant C. D'après la définition du symétrique d'un point, C est le milieu de $[AE]$. Donc $AE = 2 \times AC = 2 \times 8 = 16$ cm.

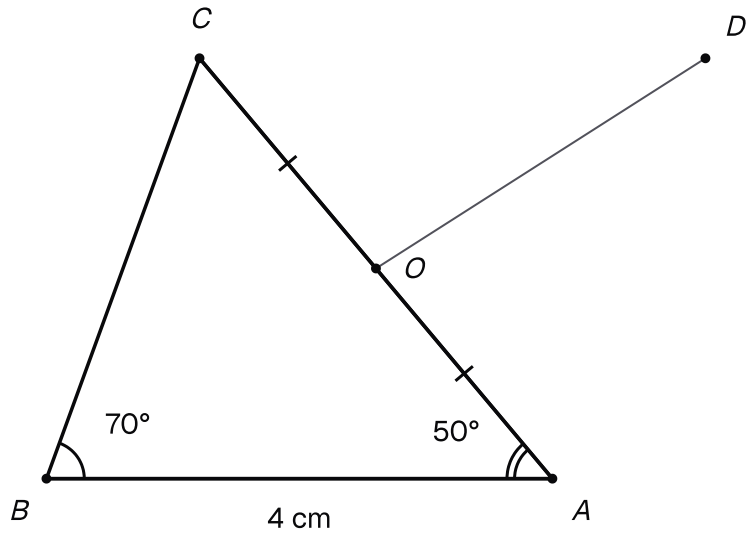
Conclusion. On a $AC = 8$ cm et $AE = 16$ cm.

Exercice 2 — 5 pts

Le logo du club de sport

Devoir d'une heure, noté sur 15 points : cet exercice vaut 5 points, compte environ 20 minutes.

Pour le logo d'un club de sport, Lina dessine un triangle ABC avec $AB = 4$ cm, $\widehat{ABC} = 70°$ et $\widehat{BAC} = 50°$. Elle place le milieu O de $[AC]$, puis le point D, symétrique de B par rapport à O.



Le triangle ABC de Lina (AB = 4 cm, angles de 70 degrés en B et de 50 degrés en A), le milieu O de [AC] et le point D.

1. — 1 pts

Calcule $\widehat{ACB}$.

INDICE

Outil : la somme des angles d'un triangle, vue au chapitre « Le triangle ».

CORRIGÉ

La somme des angles d'un triangle vaut $180°$.

Dans le triangle ABC, on a donc $\widehat{ACB} = 180° - 70° - 50° = 60°$.

Conclusion. L'angle $\widehat{ACB}$ mesure $60°$.

2. 1,5 pts

Quel est le symétrique de A par rapport à O ? En déduire que $ABCD$ est un parallélogramme, en citant la propriété utilisée.

INDICE

Outil : la définition du symétrique d'un point.

Ensuite : regarde les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère.

CORRIGÉ

Symétrique de A. Le point O est le milieu de $[AC]$. D'après la définition du symétrique d'un point, le symétrique de A par rapport à O est donc C.

Parallélogramme. Par construction, O est aussi le milieu de $[BD]$. On sait donc que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de $ABCD$ ont le même milieu.

Or, si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Conclusion. Le symétrique de A par rapport à O est C, et $ABCD$ est un parallélogramme.

3. 1,5 pts

Sans mesurer, donne $\widehat{CDA}$ et $\widehat{DCA}$.

INDICE

Outil : les angles opposés d'un parallélogramme.

Point délicat : pour $\widehat{DCA}$, cherche de quel angle il est le symétrique par rapport à O.

CORRIGÉ

Angle $\widehat{CDA}$. D'après la question 2, $ABCD$ est un parallélogramme. Ses angles opposés ont la même mesure : $\widehat{CDA} = \widehat{ABC} = 70°$.

Angle $\widehat{DCA}$. Le symétrique de A par rapport à O est C, celui de C est A, et celui de B est D. Le symétrique de l'angle $\widehat{BAC}$ est donc $\widehat{DCA}$. D'après la propriété du symétrique d'un angle, $\widehat{DCA} = 50°$.

Conclusion. On a $\widehat{CDA} = 70°$ et $\widehat{DCA} = 50°$.

4. 1 pts

Rappel : si la demi-droite $[CA)$ coupe l'angle $\widehat{BCD}$ en deux angles, on additionne leurs mesures pour obtenir $\widehat{BCD}$. Calcule $\widehat{BCD}$.

INDICE

Début : les deux angles qui forment $\widehat{BCD}$ sont déjà connus.

CORRIGÉ

La diagonale $[CA]$ partage l'angle $\widehat{BCD}$ en deux angles déjà connus : $\widehat{BCA} = 60°$ (question 1) et $\widehat{ACD} = 50°$ (question 3).

On additionne leurs mesures : $\widehat{BCD} = \widehat{BCA} + \widehat{ACD} = 60° + 50° = 110°$.

Conclusion. L'angle $\widehat{BCD}$ mesure $110°$.

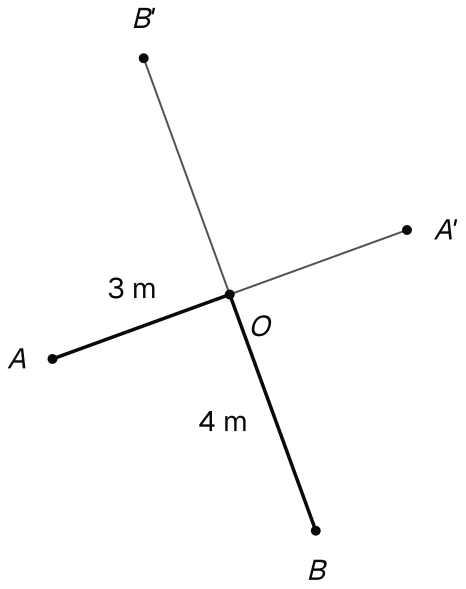
Exercice 3 — 5 pts

Les bancs autour du jet d'eau

Devoir d'une heure, noté sur 15 points : cet exercice vaut 5 points, compte environ 20 minutes.

Dans un jardin public, un jet d'eau est placé en O. Deux bancs sont placés en A et en B, avec $OA = 3$ m et $OB = 4$ m. Le point O n'est pas sur la droite (AB).

Le jardinier veut deux autres bancs en A' et B'. Ce sont les symétriques de A et de B par rapport à O.



Le jet d'eau O, les bancs A et B (OA = 3 m, OB = 4 m) et les bancs A' et B', leurs symétriques par rapport à O.

1. — 1,5 pts

Calcule les distances AA' et BB'. Justifie.

INDICE

Outil : la définition du symétrique d'un point.

Début : où est O sur le segment $[AA']$?

CORRIGÉ

D'après la définition du symétrique d'un point, O est le milieu de $[AA']$ et de $[BB']$.

Chaque distance vaut donc deux fois la distance au jet d'eau : $AA' = 2 \times 3 = 6$ m et $BB' = 2 \times 4 = 8$ m.

Conclusion. Les bancs A et A' sont à 6 m l'un de l'autre, et les bancs B et B' à 8 m.

2. 2 pts

Une allée fait le tour des bancs dans l'ordre A, B, A', B'. Quelles sont les diagonales du quadrilatère $ABA'B'$? En déduire que ce quadrilatère est un parallélogramme.

INDICE

Début : une diagonale relie deux sommets qui ne se suivent pas.

Outil : la propriété qui reconnaît un parallélogramme par ses diagonales.

CORRIGÉ

Diagonales. Les sommets se suivent dans l'ordre A, B, A', B'. Une diagonale relie deux sommets qui ne se suivent pas : les diagonales sont $[AA']$ et $[BB']$.

Parallélogramme. On sait que O est le milieu de $[AA']$ et de $[BB']$, d'après la question 1. Or, si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme. Donc $ABA'B'$ est un parallélogramme.

Conclusion. Les diagonales de $ABA'B'$ sont $[AA']$ et $[BB']$, et ce quadrilatère est un parallélogramme.

3. 1,5 pts

Quel point est un centre de symétrie du parallélogramme $ABA'B'$? Justifie.

INDICE

Outil : la propriété des diagonales d'un parallélogramme.

Début : utilise la question 2.

CORRIGÉ

D'après la question 2, $ABA'B'$ est un parallélogramme, et O est le milieu commun de ses diagonales.

D'après la propriété des diagonales d'un parallélogramme, ce point est un centre de symétrie du parallélogramme.

Donc le jet d'eau O est un centre de symétrie de $ABA'B'$.

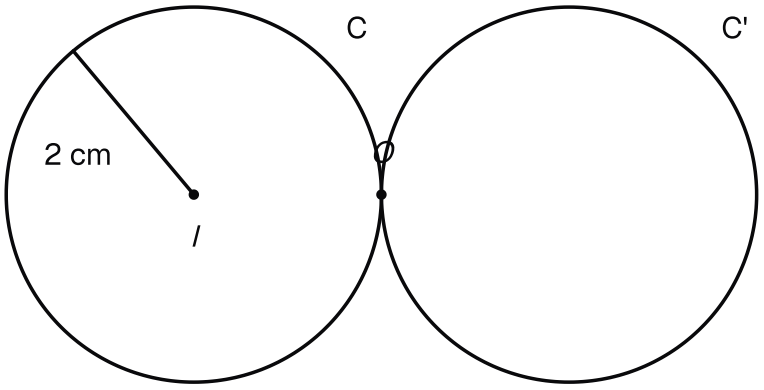
Conclusion. Le point O, où se trouve le jet d'eau, est un centre de symétrie du parallélogramme $ABA'B'$.

Exercice 4 — 5 pts

Les deux verres des lunettes

Devoir d'une heure, noté sur 15 points : cet exercice vaut 5 points, compte environ 20 minutes.

Sur le dessin d'une paire de lunettes, le verre gauche est un cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon 2 cm. Le pont des lunettes est fixé en un point O de ce cercle. Le verre droit est le cercle $\mathcal{C}'$, symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à O.



Les deux verres : le cercle C de centre I et de rayon 2 cm, le pont O sur ce cercle, et le cercle C' symétrique de C par rapport à O.

1. — 1 pts

Donne le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}'$. Cite la propriété.

INDICE

Outil : la propriété du symétrique d'un cercle.

CORRIGÉ

D'après la propriété du symétrique d'un cercle, le symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à O est un cercle de même rayon. Son centre est le symétrique I' de I par rapport à O.

Conclusion. Le cercle $\mathcal{C}'$ a pour centre I' et pour rayon 2 cm.

2. 1,5 pts

Donne la longueur OI. Le point P du verre gauche est tel que I est le milieu de $[OP]$. Calcule OP. En déduire la largeur PP' des lunettes, où P' est le symétrique de P par rapport à O. Justifie.

INDICE

Début : le point O est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre I.

Ensuite : où est O sur le segment $[PP']$?

CORRIGÉ

Longueur OI. Le point O est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon 2 cm, donc $OI = 2$ cm.

Longueur OP. Le point I est le milieu de $[OP]$, donc $OP = 2 \times OI = 2 \times 2 = 4$ cm.

Largeur PP'. D'après la définition du symétrique d'un point, O est le milieu de $[PP']$. Donc $PP' = 2 \times OP = 2 \times 4 = 8$ cm.

Conclusion. On a $OI = 2$ cm et $OP = 4$ cm, et les lunettes ont une largeur PP' de 8 cm.

3. 1,5 pts

Calcule OI'. Le point O est-il aussi sur le verre droit $\mathcal{C}'$? Justifie.

INDICE

Début : O est le milieu de $[II']$ (définition du symétrique d'un point).

Point délicat : compare OI' au rayon de $\mathcal{C}'$.

CORRIGÉ

Longueur OI'. D'après la définition du symétrique d'un point, O est le milieu de $[II']$: $OI' = OI = 2$ cm.

Le point O et le verre droit. On sait que $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre I' et de rayon 2 cm. Or, ce cercle est formé des points situés à 2 cm de I', et $OI' = 2$ cm.

Donc O est aussi sur $\mathcal{C}'$: les deux verres ont le point O en commun.

Conclusion. On a $OI' = 2$ cm, et le point O est aussi sur le verre droit $\mathcal{C}'$.

4. 1 pts

Un strass est collé en un point M du verre gauche $\mathcal{C}$, avec $OM = 3$ cm. On place M', symétrique de M par rapport à O. Donne $I'M'$. Sur quel verre se trouve M' ? Justifie.

INDICE

Outil : la propriété du symétrique d'un segment.

Début : le symétrique du segment $[IM]$ est $[I'M']$.

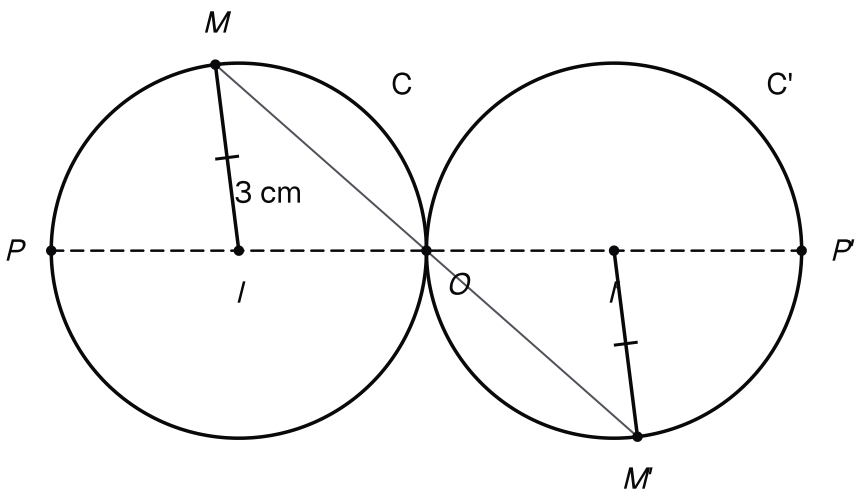
CORRIGÉ

Le point M est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon 2 cm, donc $IM = 2$ cm.

Par rapport à O, le symétrique du segment $[IM]$ est $[I'M']$. D'après la propriété du symétrique d'un segment, $I'M' = IM = 2$ cm.

Donc M' est à 2 cm de I' : il est sur le verre droit $\mathcal{C}'$.

Conclusion. On a $I'M' = 2$ cm, et le point M' se trouve sur le verre droit.



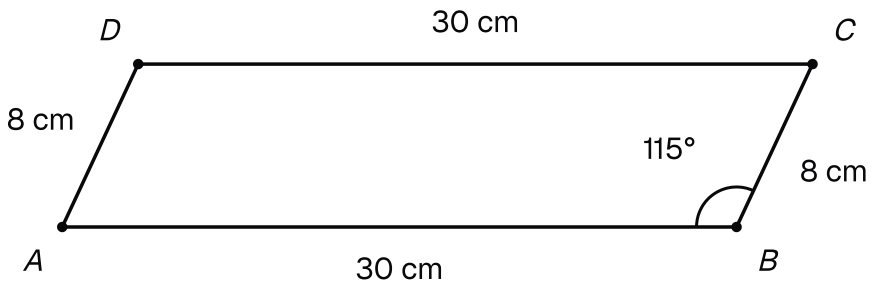
Le strass M du verre gauche, avec OM = 3 cm, et son symétrique M', à 2 cm de I' : M' est sur le verre droit.

Exercice 5 — 5 pts

La lampe articulée du bureau

Devoir d'une heure, noté sur 15 points : cet exercice vaut 5 points, compte environ 20 minutes.

Le bras d'une lampe de bureau est formé de quatre barres reliées par des charnières. Elles forment un quadrilatère non croisé $ABCD$, avec $AB = CD = 30$ cm et $BC = DA = 8$ cm. Quand on tourne une charnière, les barres gardent leur longueur et $ABCD$ reste non croisé. On règle d'abord la lampe avec $\widehat{ABC} = 115°$.



Le bras de la lampe ABCD réglé à 115 degrés en B : AB = CD = 30 cm et BC = DA = 8 cm.

1. — 2 pts

Recopie et complète la justification : « On sait que $ABCD$ est non croisé, que AB et CD mesurent … et que BC et DA mesurent … Or, si … Donc $ABCD$ est … » Sans mesurer, donne ensuite $\widehat{CDA}$.

INDICE

Outil : la propriété qui reconnaît un parallélogramme par ses côtés.

Ensuite : une propriété des angles d'un parallélogramme.

CORRIGÉ

Justification complétée. On sait que $ABCD$ est non croisé, que AB et CD mesurent 30 cm et que BC et DA mesurent 8 cm. Or, si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur deux à deux, alors c'est un parallélogramme. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Angle $\widehat{CDA}$. Les angles opposés d'un parallélogramme ont la même mesure : $\widehat{CDA} = \widehat{ABC} = 115°$.

Conclusion. Le bras $ABCD$ est un parallélogramme, et l'angle $\widehat{CDA}$ mesure $115°$.

2. 1 pts

On tourne la charnière en B : maintenant $\widehat{ABC} = 100°$. Le quadrilatère $ABCD$ est-il encore un parallélogramme ? En déduire la nouvelle mesure de $\widehat{CDA}$.

INDICE

Début : les longueurs des quatre barres ont-elles changé ?

Point délicat : la propriété utilisée à la question 1 parle-t-elle des angles ?

CORRIGÉ

Parallélogramme. On sait que les barres gardent leur longueur : $AB = CD = 30$ cm et $BC = DA = 8$ cm. De plus, $ABCD$ reste non croisé.

Or, si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur deux à deux, alors c'est un parallélogramme. Donc $ABCD$ est encore un parallélogramme.

Angle $\widehat{CDA}$. Ses angles opposés ont la même mesure : $\widehat{CDA} = \widehat{ABC} = 100°$.

Conclusion. Après le réglage, $ABCD$ est toujours un parallélogramme, et l'angle $\widehat{CDA}$ mesure maintenant $100°$.

3. 2 pts

Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O. Une vis est placée sur la barre $[AB]$, en M, avec $AM = 12$ cm. Quel est le symétrique de A par rapport à O ? En déduire la longueur CM', où M' est le symétrique de M par rapport à O. Sur quelle barre se trouve M' ? Calcule DM'.

INDICE

Outil : la propriété des diagonales d'un parallélogramme.

Ensuite : cherche le symétrique du segment $[AM]$.

Point délicat : cherche aussi le symétrique de B, puis celui de la barre $[AB]$.

CORRIGÉ

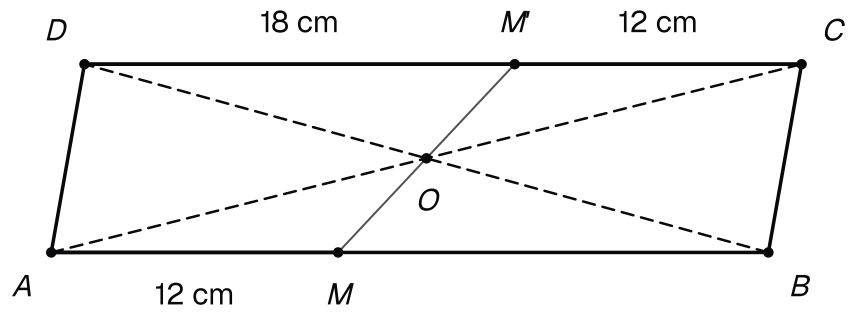
Symétrique de A. D'après la question 2, $ABCD$ est un parallélogramme. Avec la propriété des diagonales d'un parallélogramme, O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$. D'après la définition du symétrique d'un point, le symétrique de A par rapport à O est C.

Longueur CM'. Le symétrique du segment $[AM]$ par rapport à O est donc $[CM']$. D'après la propriété du symétrique d'un segment, $CM' = AM = 12$ cm.

Barre de M'. De même, O est le milieu de $[BD]$, donc le symétrique de B par rapport à O est D. Le symétrique de la barre $[AB]$ est donc $[CD]$. Comme M est sur $[AB]$, la propriété du symétrique d'un segment place son symétrique M' sur $[CD]$.

Longueur DM'. Le point M' est sur $[CD]$, donc $DM' = CD - CM' = 30 - 12 = 18$ cm.

Conclusion. Le symétrique de A est C, $CM' = 12$ cm, la vis M' est sur la barre $[CD]$ et $DM' = 18$ cm.



Réglage à 100 degrés : la vis M sur [AB], avec AM = 12 cm, et son symétrique M' sur [CD], avec CM' = 12 cm et DM' = 18 cm.