BURHAN

La symétrie centrale et le parallélogramme : exercices, entraînement

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/symetrie-centrale-et-parallelogramme/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
La symétrie centrale et le parallélogramme	Entraînement	7

Exercice 1

Le symétrique d'un logo en deux morceaux

Un logo est formé d'un segment $[AB]$ de 4 cm et d'un cercle de centre B et de rayon $1{,}5$ cm. Trace ce cercle au compas.

Pour placer le point O, trace avec l'équerre la perpendiculaire à (AB) passant par A. Tu l'as appris au chapitre « Droites perpendiculaires et droites parallèles ». Place O sur cette droite, à 3 cm de A.

1.

Quels points suffit-il de construire pour obtenir le symétrique du logo par rapport à O ? Construis-les.

INDICE

Outil : la méthode du symétrique d'une figure : on construit seulement les points utiles.

Début : de quoi as-tu besoin pour tracer un segment ? Et un cercle ?

CORRIGÉ

Pour tracer un segment, il suffit de connaître ses extrémités A et B. Pour tracer un cercle, il suffit de connaître son centre, ici encore B, et son rayon, qui ne change pas.

Je construis donc seulement A' et B', symétriques de A et B par rapport à O. Par exemple, A' est sur la demi-droite $[AO)$, au-delà de O, avec $OA' = OA = 3$ cm.

Conclusion. Il suffit de construire les deux points A' et B'.

2.

Trace le symétrique du logo. Donne la longueur du segment et le rayon du cercle obtenus.

INDICE

Outil : la propriété du symétrique d'un segment, puis celle du symétrique d'un cercle.

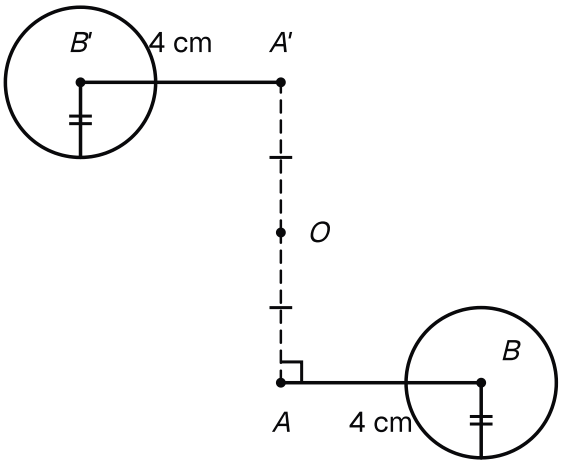
Point délicat : le centre du nouveau cercle est B'.

CORRIGÉ

Le segment. D'après la propriété du symétrique d'un segment, le symétrique de $[AB]$ est $[A'B']$, et $A'B' = 4$ cm.

Le cercle. D'après la propriété du symétrique d'un cercle, le symétrique du cercle est le cercle de centre B' et de même rayon $1{,}5$ cm.

Conclusion. Le logo symétrique est formé d'un segment de 4 cm et d'un cercle de rayon $1{,}5$ cm.



Le logo et son symétrique par rapport à O : [A'B'] mesure 4 cm et le cercle de centre B' garde le rayon 1,5 cm.

3.

Le point M est le milieu de $[AB]$. Où se trouve son symétrique M' par rapport à O ? Calcule $A'M'$.

INDICE

Outil : la propriété du symétrique d'un segment parle aussi du milieu.

Ensuite : $A'M'$ est la moitié de $A'B'$.

CORRIGÉ

D'après la propriété du symétrique d'un segment, le symétrique du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$. Le point M' est donc le milieu de $[A'B']$.

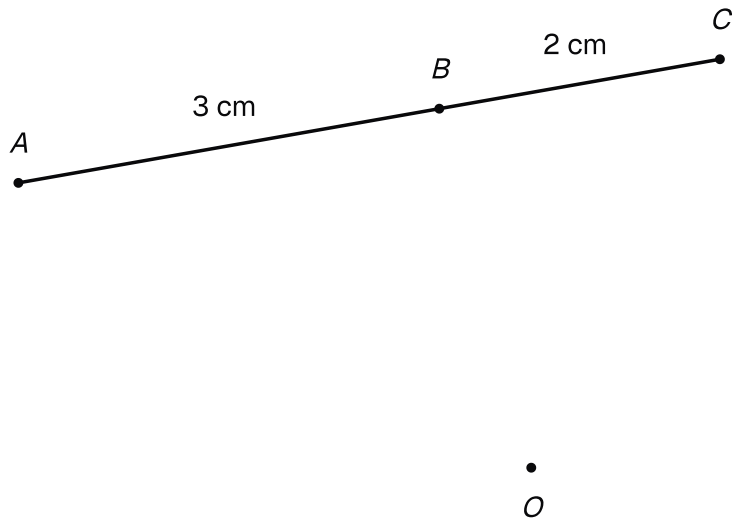
On en déduit $A'M' = 4 \div 2 = 2$ cm.

Conclusion. Le point M' est le milieu de $[A'B']$, et $A'M' = 2$ cm.

Exercice 2

Trois lampadaires alignés et leurs symétriques

Sur un plan, trois lampadaires A, B et C sont alignés dans cet ordre, avec $AB = 3$ cm et $BC = 2$ cm. Une fontaine O n'est pas sur la droite (AC). On place A', B' et C', symétriques de A, B et C par rapport à O.



Les lampadaires A, B, C alignés (AB = 3 cm, BC = 2 cm) et la fontaine O, en dehors de leur droite.

1.

Les points A', B' et C' sont-ils alignés ? Justifie.

INDICE

Outil : la propriété du symétrique d'une droite parle aussi de l'alignement.

CORRIGÉ

On sait que A, B et C sont alignés.

Or, d'après la propriété du symétrique d'une droite, les symétriques de trois points alignés sont alignés.

Donc A', B' et C' sont alignés.

Conclusion. Oui, les points A', B' et C' sont alignés.

2.

Calcule AC, puis $A'C'$ et $B'C'$.

INDICE

Début : le point B est entre A et C.

Outil : la conservation des longueurs.

CORRIGÉ

Calcul de AC. Le point B est entre A et C, donc $AC = AB + BC = 3 + 2 = 5$ cm.

Longueurs symétriques. D'après la propriété du symétrique d'un segment, les longueurs sont conservées : $A'C' = AC = 5$ cm et $B'C' = BC = 2$ cm.

Conclusion. On trouve $AC = 5$ cm, $A'C' = 5$ cm et $B'C' = 2$ cm.

3.

Que peux-tu dire des droites (AC) et $(A'C')$? Justifie.

INDICE

Outil : la propriété du symétrique d'une droite.

Début : le symétrique de (AC) est la droite qui passe par A' et C'.

CORRIGÉ

Par rapport à O, les symétriques de A et de C sont A' et C'. Le symétrique de la droite (AC) est donc la droite $(A'C')$.

D'après la propriété du symétrique d'une droite, une droite et son symétrique sont parallèles.

Conclusion. Les deux droites sont parallèles : $(A'C') \parallel (AC)$.

Exercice 3

Planter le quatrième piquet d'un massif de fleurs

Un jardinier veut un massif de fleurs en forme de parallélogramme $ABCD$. Sur le plan, trois piquets sont déjà placés, avec $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm et $\widehat{ABC} = 60°$.

1.

Fais la figure sur ton cahier : trace $[BA]$, l'angle de $60°$ en B, puis place C.

INDICE

Outil : la règle graduée et le rapporteur.

Début : trace d'abord $[BA]$, de 5 cm.

CORRIGÉ

Le côté $[BA]$. Je trace un segment $[BA]$ de 5 cm.

L'angle. Je centre le rapporteur en B et je trace une demi-droite qui fait un angle de $60°$ avec $[BA)$.

Le point C. Je le place sur cette demi-droite, à 3 cm de B.

Conclusion. Les trois piquets A, B et C sont placés, avec $\widehat{ABC} = 60°$.

2.

Construis le point D à la règle et au compas, en utilisant le milieu O de $[AC]$. Justifie que $ABCD$ est un parallélogramme.

INDICE

Outil : une propriété qui reconnaît un parallélogramme par ses diagonales.

Début : D est le symétrique d'un des sommets par rapport à O.

Point délicat : les diagonales de $ABCD$ sont $[AC]$ et $[BD]$.

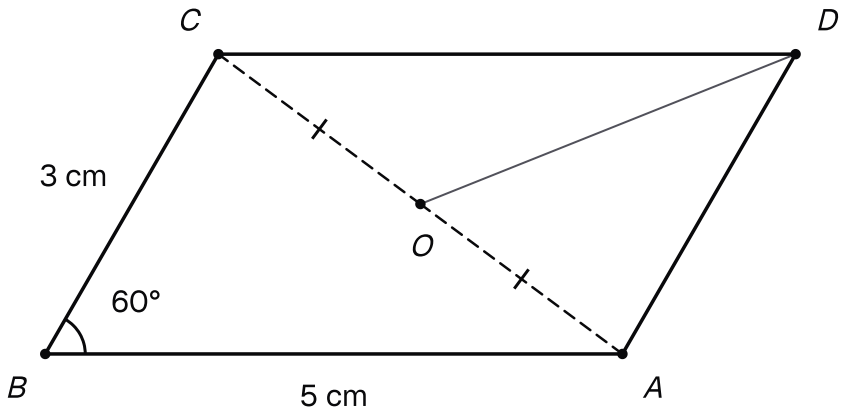
CORRIGÉ

Construction. Je place le milieu O de $[AC]$. Je construis D, symétrique de B par rapport à O : je reporte OB au compas sur la demi-droite $[BO)$, au-delà de O.

Justification. On sait que O est le milieu de $[AC]$, et aussi celui de $[BD]$ par construction : les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de $ABCD$ ont le même milieu.

Or, si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Conclusion. Le point D est construit, et le massif $ABCD$ est un parallélogramme.



Le quatrième piquet D, symétrique de B par rapport au milieu O de [AC] : le massif ABCD est un parallélogramme.

3.

Sans mesurer, donne AD, CD et $\widehat{CDA}$.

INDICE

Outil : les propriétés des côtés opposés et des angles opposés d'un parallélogramme.

Point délicat : l'angle opposé à $\widehat{ABC}$ a pour sommet D.

CORRIGÉ

D'après la question 2, $ABCD$ est un parallélogramme.

Côtés. Les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur : $AD = BC = 3$ cm et $CD = AB = 5$ cm.

Angle. Les angles opposés d'un parallélogramme ont la même mesure : $\widehat{CDA} = \widehat{ABC} = 60°$.

Conclusion. On a $AD = 3$ cm, $CD = 5$ cm et $\widehat{CDA} = 60°$.

4.

Le point O est-il un centre de symétrie du massif $ABCD$? Justifie.

INDICE

Outil : la propriété des diagonales d'un parallélogramme.

Point délicat : O est le milieu des deux diagonales.

CORRIGÉ

On sait que $ABCD$ est un parallélogramme et que O est le milieu commun de ses diagonales.

Or, d'après la propriété des diagonales d'un parallélogramme, ce point est un centre de symétrie du parallélogramme.

Donc O est un centre de symétrie du massif : le symétrique de A est C, celui de B est D.

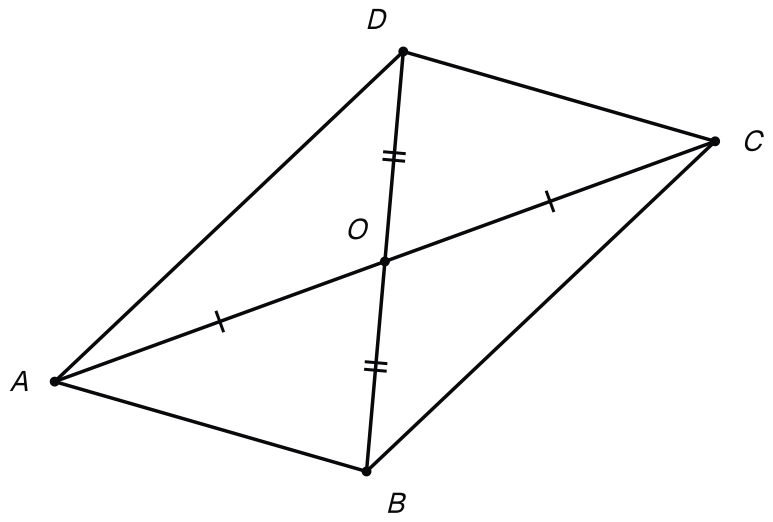
Conclusion. Oui, le point O est un centre de symétrie du massif $ABCD$.

Exercice 4

Les deux baguettes d'une enseigne

Pour le cadre de l'enseigne d'une boulangerie, Nora croise deux baguettes $[AC]$ et $[BD]$. La baguette $[AC]$ mesure 60 cm et la baguette $[BD]$ mesure 36 cm. Elle les attache en leur milieu commun O.

Puis elle fixe une guirlande lumineuse qui relie A, B, C et D, dans cet ordre, et revient en A.



Les baguettes [AC] de 60 cm et [BD] de 36 cm, attachées en leur milieu commun O, et la guirlande ABCD.

1.

Justifie que le quadrilatère $ABCD$ formé par la guirlande est un parallélogramme.

INDICE

Outil : une propriété qui reconnaît un parallélogramme par ses diagonales.

Début : quelles sont les diagonales de $ABCD$?

Point délicat : rédige en trois temps : on sait que, or, donc.

CORRIGÉ

Les sommets se suivent dans l'ordre A, B, C, D : les diagonales de $ABCD$ sont les deux baguettes $[AC]$ et $[BD]$.

On sait que ces diagonales ont le même milieu O, car Nora a attaché les baguettes en leur milieu commun.

Or, si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Conclusion. Le quadrilatère formé par la guirlande est un parallélogramme.

2.

Calcule OA et OB.

INDICE

Outil : le point O est le milieu de chaque baguette.

CORRIGÉ

Le point O est le milieu de la baguette $[AC]$: $OA = 60 \div 2 = 30$ cm.

Il est aussi le milieu de la baguette $[BD]$: $OB = 36 \div 2 = 18$ cm.

Conclusion. On a $OA = 30$ cm et $OB = 18$ cm.

3.

La guirlande entre A et B mesure 40 cm. Quelle longueur de guirlande faut-il entre C et D ?

INDICE

Outil : la propriété des côtés opposés d'un parallélogramme.

Début : utilise la question 1.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $ABCD$ est un parallélogramme.

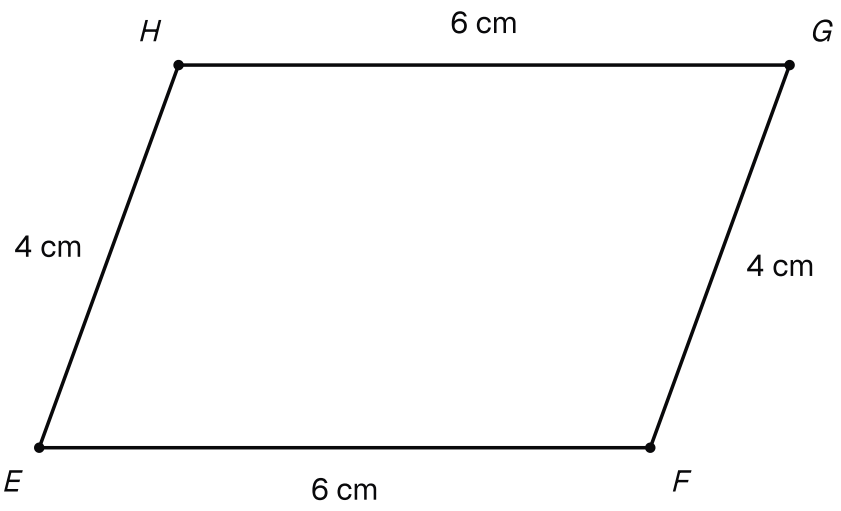
Or, les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur. Les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont opposés, donc $CD = 40$ cm, comme AB.

Conclusion. Il faut 40 cm de guirlande entre C et D.

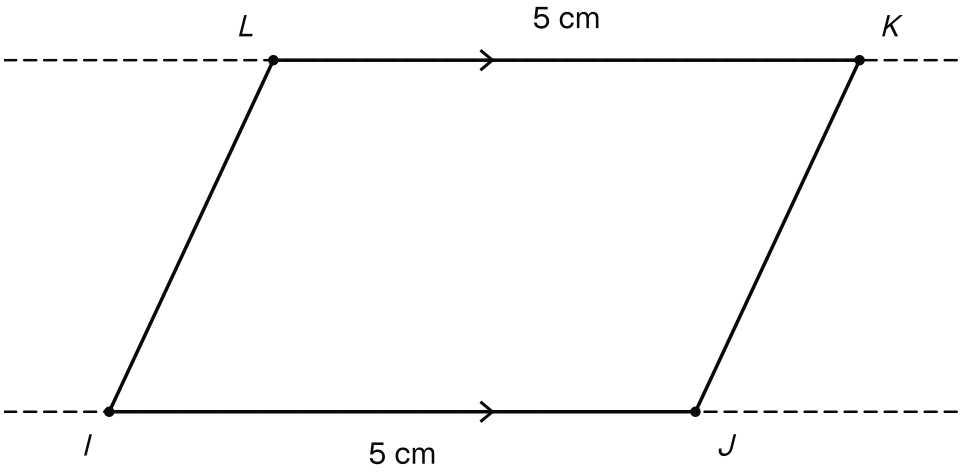
Exercice 5

Trois cadres en baguettes de bois

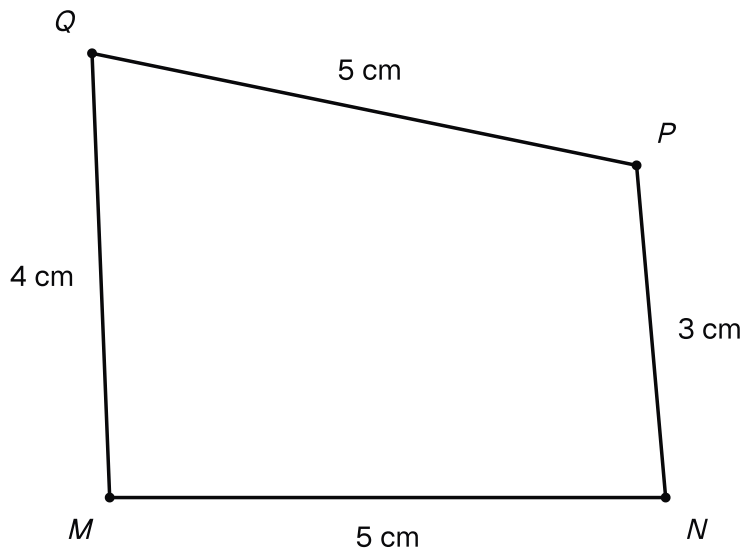
Amine assemble des baguettes pour faire des cadres. Chaque cadre est un quadrilatère non croisé.



Premier cadre EFGH : EF = GH = 6 cm et FG = HE = 4 cm.



Deuxième cadre IJKL : (IJ) et (KL) parallèles, avec IJ = KL = 5 cm.



Troisième cadre MNPQ : MN = PQ = 5 cm, NP = 3 cm et QM = 4 cm.

1.

Premier cadre $EFGH$: $EF = 6$ cm, $FG = 4$ cm, $GH = 6$ cm et $HE = 4$ cm. Ce cadre est-il un parallélogramme ? Justifie.

INDICE

Outil : une propriété qui reconnaît un parallélogramme par ses côtés.

Point délicat : cette propriété demande un quadrilatère non croisé.

CORRIGÉ

On sait que $EFGH$ est non croisé, que $EF = GH = 6$ cm et que $FG = HE = 4$ cm : chaque côté mesure autant que le côté qui lui fait face.

Or, si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur deux à deux, alors c'est un parallélogramme. Donc $EFGH$ est un parallélogramme.

Conclusion. Oui, le premier cadre est un parallélogramme.

2.

Deuxième cadre $IJKL$: $(IJ) \parallel (KL)$ et $IJ = KL = 5$ cm. Est-ce un parallélogramme ? Justifie.

INDICE

Outil : l'autre propriété des côtés, pour une seule paire de côtés opposés.

Point délicat : vérifie que les deux conditions portent sur la même paire.

CORRIGÉ

On sait que $IJKL$ est non croisé, et que ses côtés opposés $[IJ]$ et $[KL]$ sont parallèles et mesurent tous deux 5 cm. Les deux conditions portent bien sur la même paire de côtés.

Or, si deux côtés opposés d'un quadrilatère non croisé sont parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme. Donc $IJKL$ est un parallélogramme.

Conclusion. Oui, le deuxième cadre est un parallélogramme.

3.

Troisième cadre $MNPQ$: $MN = PQ = 5$ cm, $NP = 3$ cm et $QM = 4$ cm. Est-ce un parallélogramme ?

INDICE

Outil : si c'était un parallélogramme, quelle propriété de ses côtés serait vraie ?

Point délicat : compare NP et QM.

CORRIGÉ

Si $MNPQ$ était un parallélogramme, ses côtés opposés $[NP]$ et $[QM]$ auraient la même longueur, d'après la propriété des côtés opposés.

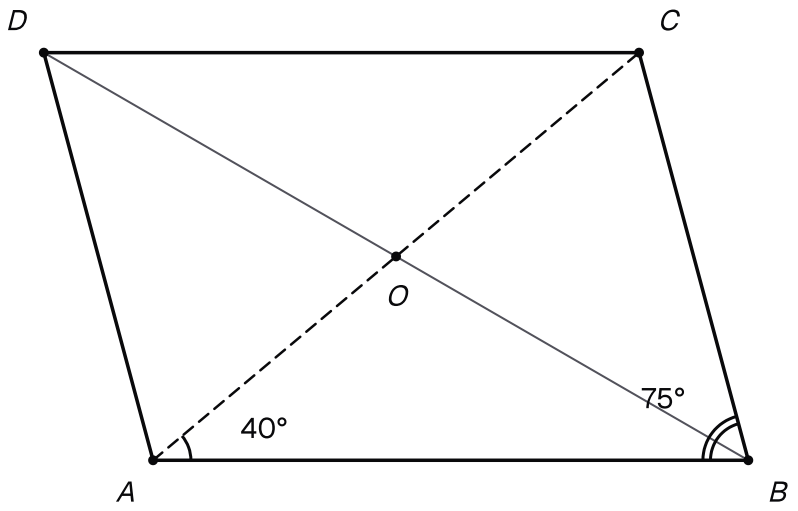
Or $NP = 3$ cm et $QM = 4$ cm : ces longueurs sont différentes. L'égalité $MN = PQ$ ne suffit pas.

Conclusion. Non, le troisième cadre $MNPQ$ n'est pas un parallélogramme.

Exercice 6

Les angles d'un carreau de mosaïque

Un carreau de mosaïque a la forme d'un parallélogramme $ABCD$. Ses diagonales se coupent en O. On mesure $\widehat{BAC} = 40°$ et $\widehat{ABC} = 75°$.



Le carreau ABCD, ses diagonales qui se coupent en O, et les angles BAC de 40 degrés et ABC de 75 degrés.

1.

Calcule $\widehat{ACB}$.

INDICE

Outil : la somme des angles d'un triangle, vue au chapitre « Le triangle ».

Début : travaille dans le triangle ABC.

CORRIGÉ

La somme des angles d'un triangle vaut $180°$ (chapitre « Le triangle »).

Dans le triangle ABC, on retire les deux angles connus : $\widehat{ACB} = 180° - 40° - 75° = 65°$.

Conclusion. L'angle $\widehat{ACB}$ mesure $65°$.

2.

Donne $\widehat{CDA}$. Cite la propriété.

INDICE

Outil : la propriété des angles opposés d'un parallélogramme.

CORRIGÉ

Dans le parallélogramme $ABCD$, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CDA}$ sont opposés.

Or, les angles opposés d'un parallélogramme ont la même mesure. Donc $\widehat{CDA} = \widehat{ABC} = 75°$.

Conclusion. D'après la propriété des angles opposés d'un parallélogramme, l'angle $\widehat{CDA}$ mesure $75°$.

3.

Le point O est un centre de symétrie du parallélogramme. Déduis-en $\widehat{DCA}$ et $\widehat{DAC}$.

INDICE

Outil : la propriété du symétrique d'un angle.

Début : cherche les symétriques de A, de B et de C par rapport à O.

Point délicat : de quel angle $\widehat{DCA}$ est-il le symétrique ?

CORRIGÉ

Les sommets. Par rapport à O, les symétriques de B, A et C sont D, C et A.

Les angles. Le symétrique de l'angle $\widehat{BAC}$ est donc $\widehat{DCA}$, et celui de $\widehat{BCA}$ est $\widehat{DAC}$. D'après la propriété du symétrique d'un angle, ils ont les mêmes mesures : $40°$ pour le premier, et $65°$ pour le second, d'après la question 1.

Conclusion. On obtient $\widehat{DCA} = 40°$ et $\widehat{DAC} = 65°$.

4.

Rappel : quand une demi-droite partage un angle en deux angles, la mesure de cet angle est la somme des deux mesures. Ici, la diagonale $[AC]$ partage l'angle $\widehat{DAB}$ en deux. Calcule $\widehat{DAB}$, puis $\widehat{BCD}$.

INDICE

Début : l'angle $\widehat{DAB}$ est formé des angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{CAB}$.

Ensuite : utilise une propriété des angles opposés.

CORRIGÉ

Angle $\widehat{DAB}$. La diagonale $[AC]$ partage cet angle en deux angles. On additionne leurs mesures : $\widehat{DAB} = \widehat{DAC} + \widehat{CAB} = 65° + 40° = 105°$.

Angle $\widehat{BCD}$. Les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{BCD}$ sont opposés, et les angles opposés d'un parallélogramme ont la même mesure : $\widehat{BCD} = 105°$.

Conclusion. Les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{BCD}$ mesurent tous deux $105°$.

Exercice 7

Trouve l'erreur dans trois copies

1.

Copie de Yassine : « $ABCD$ a deux côtés opposés de même longueur, $AB = CD = 5$ cm. Donc $ABCD$ est un parallélogramme. » Explique l'erreur.

INDICE

Outil : relis les propriétés qui reconnaissent un parallélogramme par ses côtés.

Point délicat : combien de conditions faut-il sur une même paire de côtés ?

CORRIGÉ

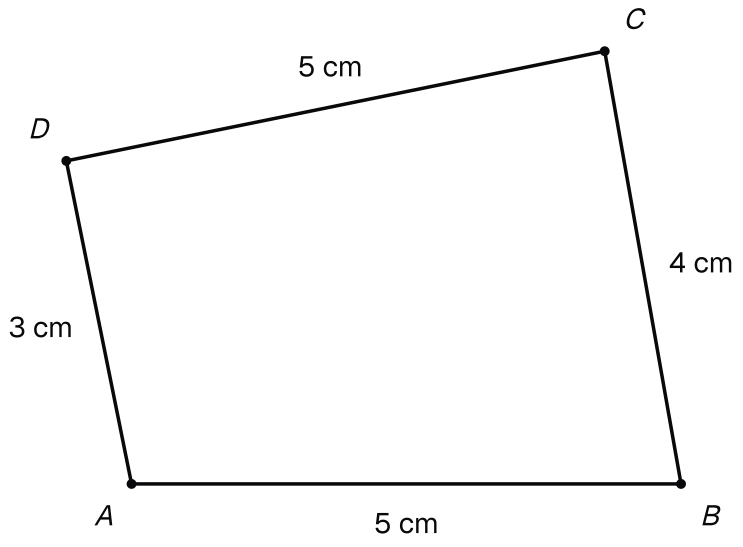
Une seule égalité de longueurs ne suffit pas. Voici un contre-exemple.

On peut dessiner un quadrilatère non croisé $ABCD$ avec $AB = CD = 5$ cm, $BC = 4$ cm et $AD = 3$ cm. Ses côtés opposés $[BC]$ et $[AD]$ n'ont pas la même longueur.

Or, d'après la propriété des côtés opposés, ceux d'un parallélogramme ont la même longueur. Donc ce $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

Pour un quadrilatère non croisé, il faudrait aussi $(AB) \parallel (CD)$, ou bien $AD = BC$.

Conclusion. Yassine se trompe : deux côtés opposés égaux, sans autre condition, ne suffisent pas à conclure.



Un contre-exemple : AB = CD = 5 cm, mais BC = 4 cm et AD = 3 cm, donc ABCD n'est pas un parallélogramme.

2.

Copie de Hiba : « Dans le parallélogramme $KLMN$, les diagonales $[KL]$ et $[MN]$ ont le même milieu. » Corrige cette phrase.

INDICE

Outil : une diagonale relie deux sommets opposés.

Début : écris les sommets dans l'ordre K, L, M, N.

CORRIGÉ

Une diagonale relie deux sommets opposés. Les segments $[KL]$ et $[MN]$ relient des sommets qui se suivent : ce sont des côtés, pas des diagonales.

Les sommets se suivent dans l'ordre K, L, M, N. Les diagonales sont donc $[KM]$ et $[LN]$.

Conclusion. La phrase correcte est : « Dans le parallélogramme $KLMN$, les diagonales $[KM]$ et $[LN]$ ont le même milieu. »

3.

Copie d'Omar : « Les points M, O et M' sont alignés. Donc M' est le symétrique de M par rapport à O. » Qu'est-ce qui manque ?

INDICE

Outil : la définition du symétrique d'un point.

Point délicat : alignés ne veut pas dire milieu.

CORRIGÉ

D'après la définition du symétrique d'un point, O doit être le milieu de $[MM']$. L'alignement ne suffit pas : il faut aussi que O soit entre M et M', avec $OM' = OM$.

Par exemple, avec $OM = 4$ cm et $OM' = 1$ cm, les trois points peuvent être alignés sans que M' soit le symétrique de M.

Conclusion. Il manque une condition : le point O doit être le milieu du segment $[MM']$.