BURHAN

La symétrie centrale et le parallélogramme : exercices, application

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/symetrie-centrale-et-parallelogramme/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
La symétrie centrale et le parallélogramme	Application	8

Exercice 1

Le symétrique d'un point, à la règle et au compas

Sur ton cahier, place un point O. Trace un segment $[OA]$ de $3{,}5$ cm. Trace ensuite, dans une autre direction, un segment $[OB]$ de $2{,}4$ cm.

1.

Construis le point A', symétrique de A par rapport à O. Explique ta construction.

INDICE

Outil : la définition du symétrique d'un point : O doit être le milieu de $[AA']$.

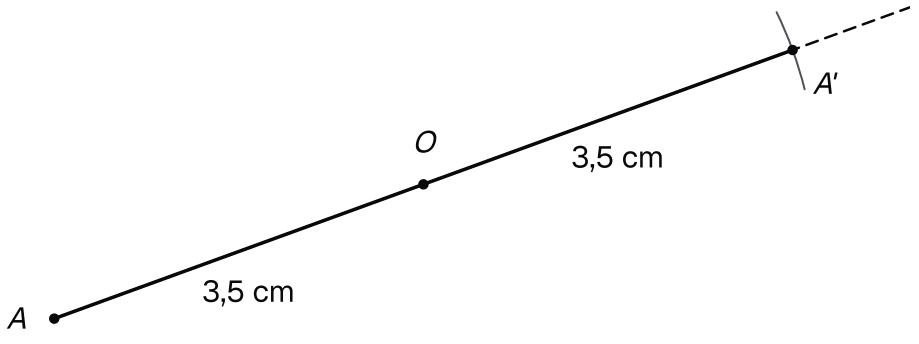
Début : trace la demi-droite d'origine A qui passe par O.

CORRIGÉ

Construction. Je trace la demi-droite $[AO)$. Je place la pointe du compas en O, avec un écartement de $3{,}5$ cm. Je reporte cette longueur de l'autre côté de O : j'obtiens A'.

Justification. Les points A, O et A' sont alignés, et $OA' = OA = 3{,}5$ cm. Le point O est donc le milieu de $[AA']$.

Conclusion. D'après la définition du symétrique d'un point, A' est le symétrique de A par rapport à O.



Le point A' sur la demi-droite [AO), au-delà de O, avec OA' = OA = 3,5 cm.

2.

Calcule la longueur AA'.

INDICE

Outil : le point O est le milieu de $[AA']$.

Point délicat : AA' est la longueur du segment entier, pas celle d'une moitié.

CORRIGÉ

Le point O est le milieu de $[AA']$: la longueur AA' vaut deux fois OA.

On calcule $AA' = 2 \times OA = 2 \times 3{,}5 = 7$ cm.

Conclusion. Le segment $[AA']$ mesure 7 cm.

3.

Construis de même B', symétrique de B par rapport à O, puis calcule BB'.

INDICE

Outil : la même méthode qu'aux deux premières questions.

Début : reporte $2{,}4$ cm au compas, au-delà de O.

CORRIGÉ

Construction. Je trace la demi-droite $[BO)$. Je reporte $OB = 2{,}4$ cm au-delà de O : j'obtiens B', et $OB' = 2{,}4$ cm.

Calcul. Le point O est le milieu de $[BB']$, donc $BB' = 2 \times 2{,}4 = 4{,}8$ cm.

Conclusion. Le point B' est construit, et $BB' = 4{,}8$ cm.

Exercice 2

Sur le carrelage de la cuisine

Le sol de la cuisine est couvert de petits carreaux tous pareils : c'est un quadrillage. Sur ton cahier quadrillé, place un point O sur un coin de carreau. À partir de O, place le point M à 3 carreaux vers la gauche et 2 carreaux vers le haut.

1.

Décris le trajet qui va de M jusqu'à O.

INDICE

Outil : fais le chemin dans l'autre sens.

Point délicat : la gauche devient la droite, et le haut devient le bas.

CORRIGÉ

Le trajet de M à O est celui de O à M, parcouru dans l'autre sens : chaque déplacement est inversé.

La gauche devient la droite, et le haut devient le bas.

Conclusion. Pour aller de M à O, on avance de 3 carreaux vers la droite et de 2 carreaux vers le bas.

2.

Place M', symétrique de M par rapport à O. Justifie.

INDICE

Outil : sur quadrillage, on refait à partir de O le trajet qui mène de M à O.

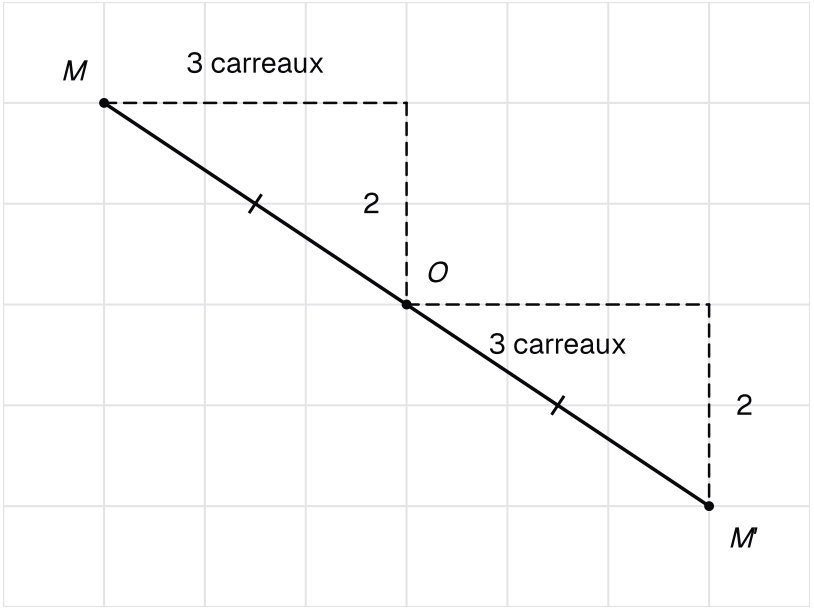
Début : pars de O et avance de 3 carreaux vers la droite.

CORRIGÉ

Construction. À partir de O, j'avance de 3 carreaux vers la droite et de 2 carreaux vers le bas : j'obtiens M'.

Justification. Le trajet de O à M' est le même que celui de M à O. Les points M, O et M' sont donc alignés, et $OM' = OM$: le point O est le milieu de $[MM']$.

Conclusion. D'après la définition du symétrique d'un point, M' est le symétrique de M par rapport à O.



Le trajet de M à O, 3 carreaux à droite puis 2 vers le bas, refait à partir de O, conduit à M'.

3.

À partir de O, le point P est à 1 carreau vers la droite et 4 carreaux vers le haut. Décris le trajet de P jusqu'à P', son symétrique par rapport à O.

INDICE

Outil : le trajet de O à P' est celui de P à O.

Ensuite : mets bout à bout le trajet de P à O et celui de O à P'.

CORRIGÉ

De P à O. On avance de 1 carreau vers la gauche et de 4 vers le bas.

De O à P'. On refait exactement le même trajet : encore 1 carreau vers la gauche et 4 vers le bas.

De P à P'. On met les deux trajets bout à bout : on avance de 2 carreaux vers la gauche et de 8 carreaux vers le bas.

Conclusion. Le trajet de P jusqu'à P' compte $1 + 1 = 2$ carreaux vers la gauche et $4 + 4 = 8$ carreaux vers le bas.

Exercice 3

Trois élèves, trois figures : symétrique ou pas ?

Le professeur demande de placer N, symétrique de M par rapport à O. Trois élèves rendent leur figure.

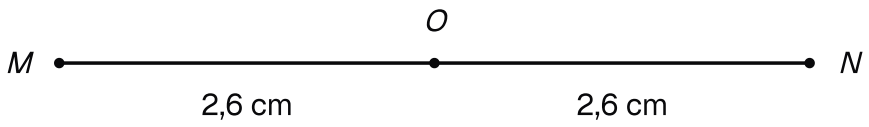


Figure de Salma : M, O et N alignés, OM = 2,6 cm et ON = 2,6 cm.

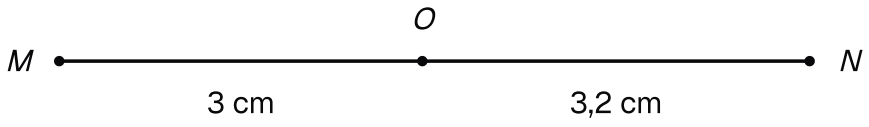


Figure de Karim : M, O et N alignés, OM = 3 cm et ON = 3,2 cm.

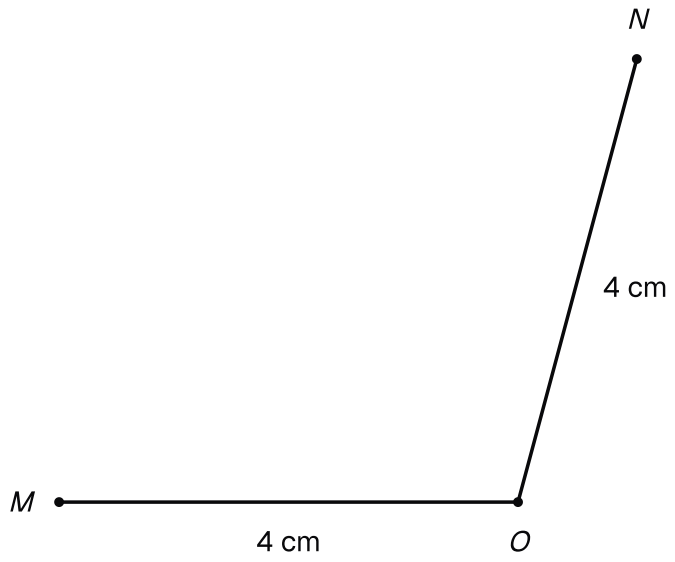


Figure d'Ilyas : OM = 4 cm et ON = 4 cm, mais M, O et N ne sont pas alignés.

1.

Figure de Salma : M, O et N sont alignés, O est entre M et N, avec $OM = 2{,}6$ cm et $ON = 2{,}6$ cm. Le point N est-il le symétrique de M par rapport à O ?

INDICE

Outil : la définition du symétrique d'un point.

Début : vérifie les deux conditions, l'alignement et la même distance au centre.

CORRIGÉ

On vérifie les deux conditions de la définition du symétrique d'un point.

Les points M, O et N sont alignés, avec O entre M et N. De plus, $OM = ON = 2{,}6$ cm. Le point O est donc le milieu de $[MN]$.

Conclusion. Oui, sur la figure de Salma, N est bien le symétrique de M par rapport à O.

2.

Figure de Karim : M, O et N sont alignés, O est entre M et N, avec $OM = 3$ cm et $ON = 3{,}2$ cm. Même question.

INDICE

Outil : compare OM et ON.

Point délicat : l'alignement seul ne suffit pas.

CORRIGÉ

Les points M, O et N sont alignés, et O est entre M et N.

Mais $OM = 3$ cm et $ON = 3{,}2$ cm : ces longueurs sont différentes. Le point O n'est donc pas le milieu de $[MN]$.

Conclusion. Non, sur la figure de Karim, N n'est pas le symétrique de M par rapport à O.

3.

Figure d'Ilyas : $OM = ON = 4$ cm, mais M, O et N forment un triangle. Même question.

INDICE

Outil : le milieu d'un segment est sur ce segment.

Point délicat : cette fois, les deux distances sont égales.

CORRIGÉ

Les deux longueurs sont égales : $OM = ON = 4$ cm.

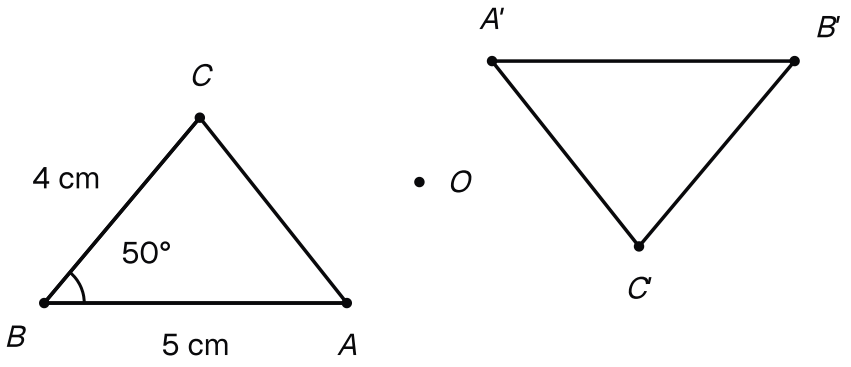
Mais M, O et N forment un triangle : ils ne sont pas alignés. Le point O n'est donc pas sur le segment $[MN]$, et il ne peut pas en être le milieu.

Conclusion. Non, sur la figure d'Ilyas, N n'est pas le symétrique de M par rapport à O.

Exercice 4

Un logo et son symétrique

Le logo d'un club est le triangle ABC, avec $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm et $\widehat{ABC} = 50°$. Pour un autre panneau, on construit les points A', B' et C', symétriques de A, B et C par rapport à un point O.



Le logo ABC (AB = 5 cm, BC = 4 cm, angle B de 50 degrés) et le triangle A'B'C' construit par rapport à O.

1.

Sans mesurer, donne les longueurs $A'B'$ et $B'C'$.

INDICE

Outil : la propriété du symétrique d'un segment.

Début : le symétrique de $[AB]$ par rapport à O est $[A'B']$.

CORRIGÉ

Par rapport à O, le symétrique du segment $[AB]$ est $[A'B']$, et celui de $[BC]$ est $[B'C']$.

D'après la propriété du symétrique d'un segment, un segment et son symétrique ont la même longueur.

Conclusion. On obtient $A'B' = AB = 5$ cm et $B'C' = BC = 4$ cm.

2.

Sans mesurer, donne la mesure de l'angle $\widehat{A'B'C'}$.

INDICE

Outil : la propriété du symétrique d'un angle.

Point délicat : le sommet de l'angle symétrique est B'.

CORRIGÉ

Les points A', B' et C' sont les symétriques de A, B et C. Le symétrique de l'angle $\widehat{ABC}$ est donc l'angle $\widehat{A'B'C'}$, de sommet B'.

D'après la propriété du symétrique d'un angle, ces deux angles ont la même mesure.

Conclusion. On a $\widehat{A'B'C'} = 50°$.

3.

Un second logo, en forme de drapeau, a une aire de 12 cm². Quelle est l'aire de son symétrique par rapport à un point ?

INDICE

Outil : la propriété de conservation des aires.

CORRIGÉ

D'après la propriété de conservation des aires, l'aire d'une figure ne change pas quand on construit son symétrique.

Conclusion. Le symétrique du drapeau a une aire de 12 cm².

Exercice 5

Le symétrique d'une roue de vélo

Sur le dessin d'un vélo, une roue est un cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon $2{,}5$ cm. Le point O est à 4 cm de I.

1.

Construis I', symétrique de I par rapport à O. Calcule II'.

INDICE

Outil : la définition du symétrique d'un point.

Début : reporte OI au compas, au-delà de O, sur la demi-droite $[IO)$.

CORRIGÉ

Construction. Je trace la demi-droite $[IO)$ et je reporte $OI = 4$ cm au-delà de O : j'obtiens I', avec $OI' = 4$ cm.

Calcul. Le point O est le milieu de $[II']$, donc $II' = 2 \times 4 = 8$ cm.

Conclusion. Le point I' est construit, et $II' = 8$ cm.

2.

Construis le cercle $\mathcal{C}'$, symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à O. Donne son centre et son rayon.

INDICE

Outil : la propriété du symétrique d'un cercle.

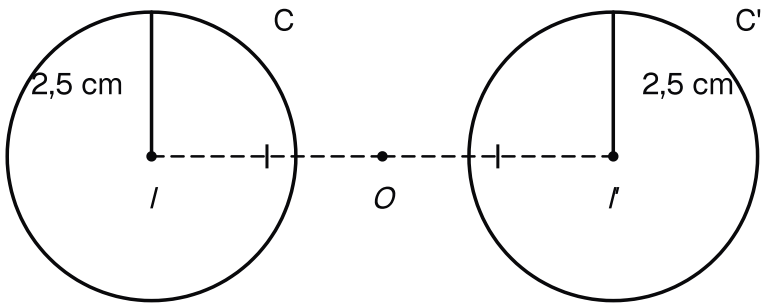
Point délicat : il suffit de connaître le symétrique d'un seul point bien choisi.

CORRIGÉ

D'après la propriété du symétrique d'un cercle, le symétrique de $\mathcal{C}$ est un cercle de même rayon, dont le centre est le symétrique I' du centre I.

Tracé. Je place la pointe du compas en I', avec un écartement de $2{,}5$ cm, et je trace $\mathcal{C}'$.

Conclusion. Le cercle $\mathcal{C}'$ a pour centre I' et pour rayon $2{,}5$ cm.



Le cercle C' de centre I' a le même rayon de 2,5 cm que le cercle C de centre I ; O est le milieu de [II'].

Exercice 6

Quelles figures ont un centre de symétrie ?

1.

Un segment $[EF]$ mesure 9 cm. Où se trouve son centre de symétrie ? À quelle distance de E ?

INDICE

Outil : la définition d'un centre de symétrie.

Début : quel point du segment a pour symétrique de E le point F ?

CORRIGÉ

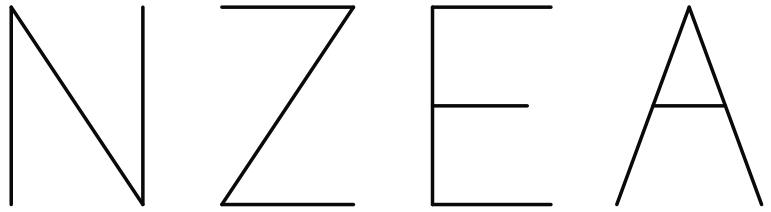
Le centre de symétrie d'un segment est son milieu, que l'on nomme K : le symétrique de E par rapport à K est F, et chaque point du segment a son symétrique sur le segment.

Le point K partage $[EF]$ en deux longueurs égales : $EK = 9 \div 2 = 4{,}5$ cm.

Conclusion. Le centre de symétrie de $[EF]$ est son milieu K, à $4{,}5$ cm de E.

2.

L'enseigne d'un magasin porte les lettres N, Z, E et A, écrites en capitales d'imprimerie simples. Lesquelles ont un centre de symétrie ?



Les quatre lettres de l'enseigne, N, Z, E et A, en capitales d'imprimerie simples.

INDICE

Outil : décalque chaque lettre sur du papier calque et fais-lui faire un demi-tour.

Point délicat : la lettre doit retomber exactement sur elle-même.

CORRIGÉ

Après un demi-tour autour de leur centre, les lettres N et Z retombent exactement sur elles-mêmes : d'après la définition d'un centre de symétrie, elles en ont un.

Après un demi-tour, les lettres E et A apparaissent à l'envers : elles n'en ont pas.

Conclusion. Parmi les quatre lettres de l'enseigne, seules N et Z ont un centre de symétrie.

3.

Le triangle RST a-t-il un centre de symétrie ? Explique avec le milieu J du côté $[RS]$.

INDICE

Outil : cherche le symétrique de T par rapport à J.

Point délicat : un seul point qui sort de la figure suffit pour répondre.

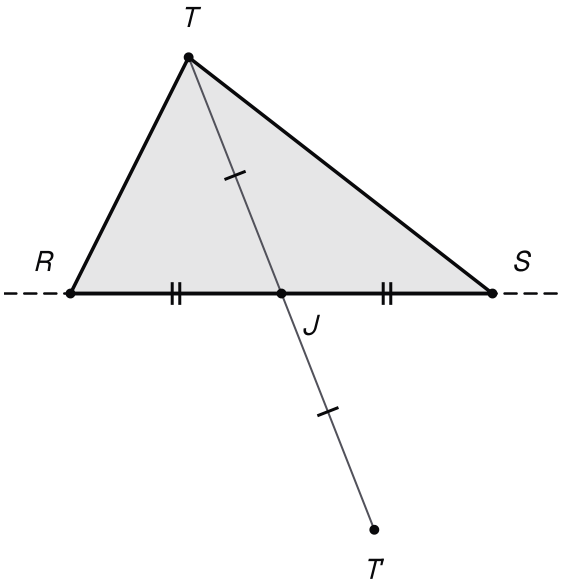
CORRIGÉ

Le côté $[RS]$. Le point J est le milieu de $[RS]$: le symétrique de R par rapport à J est S.

Le sommet T. Son symétrique T' par rapport à J est situé de l'autre côté de la droite (RS). Or le triangle est tout entier d'un seul côté de (RS) : T' est donc hors du triangle.

D'après la définition d'un centre de symétrie, J n'est donc pas un centre de symétrie du triangle. Plus généralement, un triangle n'a aucun centre de symétrie.

Conclusion. Non, le triangle RST n'a pas de centre de symétrie.

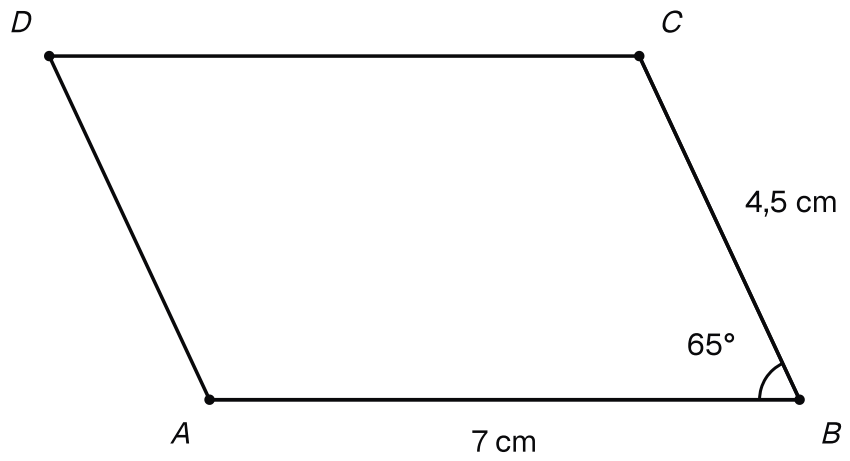


Le symétrique T' de T par rapport au milieu J de [RS] est sous la droite (RS), hors du triangle RST.

Exercice 7

Un porte-clés en forme de parallélogramme

Un porte-clés a la forme d'un parallélogramme $ABCD$, avec $AB = 7$ cm, $BC = 4{,}5$ cm et $\widehat{ABC} = 65°$.



Le porte-clés ABCD : AB = 7 cm, BC = 4,5 cm et un angle de 65 degrés en B.

1.

Donne les longueurs CD et AD. Cite la propriété.

INDICE

Outil : la propriété des côtés opposés d'un parallélogramme.

Point délicat : le côté opposé à $[AB]$ est $[CD]$, et celui opposé à $[BC]$ est $[AD]$.

CORRIGÉ

On sait que $ABCD$ est un parallélogramme. Le côté opposé à $[AB]$ est $[CD]$, et celui opposé à $[BC]$ est $[AD]$.

Or, les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur. Donc $CD = AB = 7$ cm et $AD = BC = 4{,}5$ cm.

Conclusion. D'après la propriété des côtés opposés d'un parallélogramme, CD mesure 7 cm et AD mesure $4{,}5$ cm.

2.

Donne la mesure de l'angle $\widehat{CDA}$.

INDICE

Outil : la propriété des angles opposés d'un parallélogramme.

Début : quel sommet est opposé à B ?

CORRIGÉ

Dans le parallélogramme $ABCD$, le sommet opposé à B est D : les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CDA}$ sont opposés.

Or, les angles opposés d'un parallélogramme ont la même mesure. Donc $\widehat{CDA} = \widehat{ABC} = 65°$.

Conclusion. L'angle $\widehat{CDA}$ mesure $65°$.

3.

Quelle longueur de fil faut-il pour faire le tour du porte-clés ?

INDICE

Outil : le périmètre est la somme des longueurs des quatre côtés.

Début : utilise la question 1.

CORRIGÉ

Le tour du porte-clés est son périmètre : la somme des longueurs de ses quatre côtés, trouvées à la question 1.

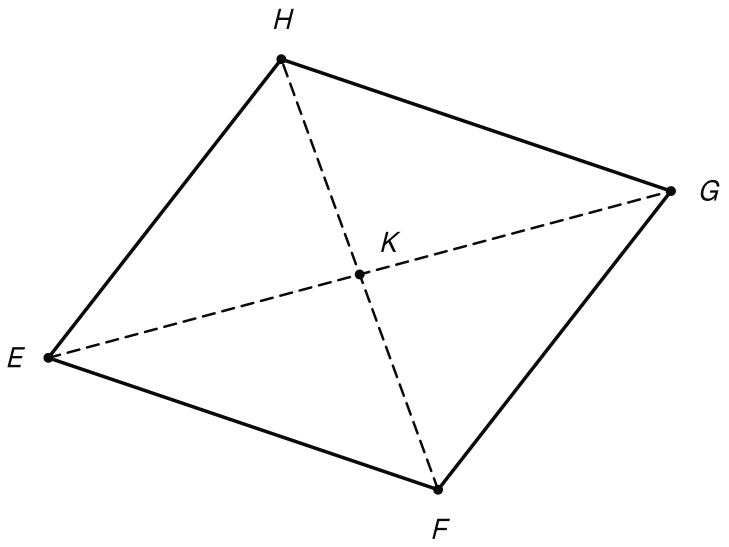
Le périmètre vaut $AB + BC + CD + DA = 7 + 4{,}5 + 7 + 4{,}5 = 23$ cm.

Conclusion. Il faut 23 cm de fil pour faire le tour du porte-clés.

Exercice 8

Les diagonales d'une dalle de jardin

Sur un plan, une dalle de jardin a la forme d'un parallélogramme $EFGH$. Ses diagonales $[EG]$ et $[FH]$ se coupent en K. On mesure $EG = 9$ cm et $FH = 6{,}4$ cm.



La dalle EFGH et ses diagonales [EG] de 9 cm et [FH] de 6,4 cm, qui se coupent en K.

1.

Calcule EK et KH.

INDICE

Outil : la propriété des diagonales d'un parallélogramme.

Point délicat : K est le milieu de chacune des deux diagonales.

CORRIGÉ

On sait que $EFGH$ est un parallélogramme. D'après la propriété des diagonales d'un parallélogramme, K est le milieu de $[EG]$ et aussi celui de $[FH]$.

Calcul de EK. On a $EK = 9 \div 2 = 4{,}5$ cm.

Calcul de KH. On a $KH = 6{,}4 \div 2 = 3{,}2$ cm.

Conclusion. La longueur EK vaut $4{,}5$ cm, et la longueur KH vaut $3{,}2$ cm.

2.

Quel est le symétrique du point F par rapport à K ?

INDICE

Outil : la définition du symétrique d'un point.

Début : regarde de quel segment K est le milieu.

CORRIGÉ

D'après la question 1, le point K est le milieu de $[FH]$.

D'après la définition du symétrique d'un point, le symétrique de F par rapport à K est donc l'autre extrémité de ce segment.

Conclusion. Le symétrique du point F par rapport à K est H.

3.

Quel est le symétrique du côté $[EF]$ par rapport à K ?

INDICE

Outil : la propriété du symétrique d'un segment.

Début : cherche d'abord le symétrique de E.

CORRIGÉ

Les extrémités. Le point K est le milieu de $[EG]$: le symétrique de E est G. D'après la question 2, celui de F est H.

Le côté. D'après la propriété du symétrique d'un segment, le symétrique de $[EF]$ est le segment qui joint ces deux points, c'est-à-dire $[GH]$.

Conclusion. Par rapport à K, le symétrique du côté $[EF]$ est le côté $[GH]$.