BURHAN

La symétrie centrale et le parallélogramme

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/symetrie-centrale-et-parallelogramme/cours

Chapitre	Semestre
La symétrie centrale et le parallélogramme	Semestre 2

Le demi-tour

Un dessin qui fait un demi-tour

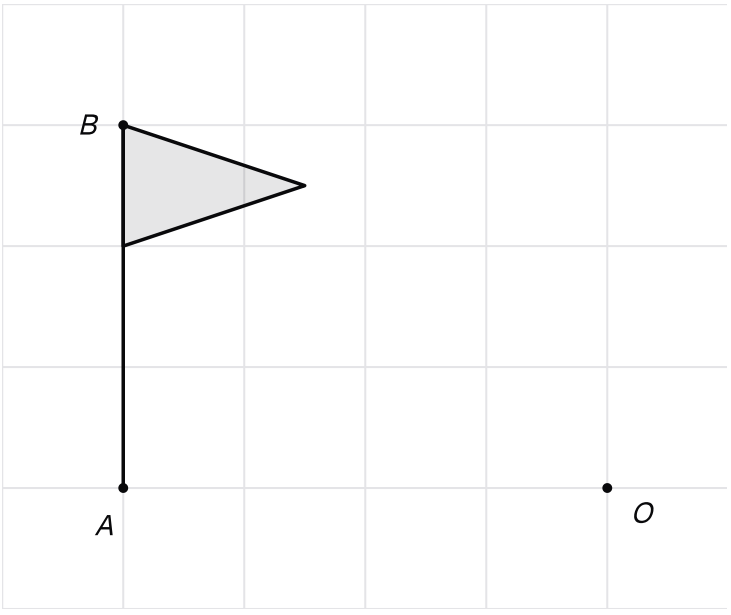
Prends une carte à jouer, le roi de cœur par exemple, et pose-la sur la table.

Fais-la tourner d'un **demi-tour** autour de son milieu. Le dessin retombe exactement sur lui-même : la tête du haut a pris la place de la tête du bas.

À toi de faire un demi-tour sur ton cahier, à carreaux.

Dessine un drapeau : un mât $[AB]$ vertical de 3 carreaux, avec A en bas. En haut du mât, accroche un petit fanion triangulaire, à droite du mât. Place enfin un point O, 4 carreaux à droite de A.

Décalque le drapeau et le point O sur du **papier calque**. Pique la pointe du compas sur O, puis fais tourner le calque d'un demi-tour.



Le drapeau à reproduire sur le cahier : un mât [AB] de 3 carreaux, son fanion à droite, et le point O.

> **Devine : Où arrive le fanion ?**
>
> Après le demi-tour du calque autour de O, où se trouve le fanion par rapport à son mât ?

A. En bas du mât, à gauche.

Juste.

Juste : le haut passe en bas, et la droite passe à gauche.

B. En haut du mât, à droite.

Faux.

Le drapeau a changé de place : un demi-tour retourne aussi le fanion.

C. En haut du mât, à gauche.

Faux.

C'est ce que donnerait un pliage le long du mât, pas un demi-tour.

D. En bas du mât, à droite.

Faux.

C'est ce que donnerait un pliage horizontal, pas un demi-tour.

Correction

Un demi-tour échange le haut et le bas, et aussi la droite et la gauche.

Le mât pend maintenant vers le bas, et le fanion se trouve en bas du mât, à gauche. Le drapeau a l'air « tête en bas ».

Ce que le demi-tour fait à un point

Regarde la nouvelle place du point A : note-la A'. On lit « A prime ».

Trace le segment $[AA']$. Puis mesure OA et OA' à la règle graduée.

Devine : Le point, le centre et la nouvelle place

Que constates-tu sur les points A, O et A' ?

A. A' est sur la droite qui porte le mât.

Faux.

Le point A' est à 8 carreaux du mât.

B. O est sur $[AA']$ et $OA' = OA$.

Juste.

Juste : O est au milieu du segment $[AA']$.

C. O n'est pas sur le segment $[AA']$.

Faux.

Trace $[AA']$: il passe par O.

D. O est sur $[AA']$ et $OA' = 2 \times OA$.

Faux.

Compte les carreaux : 4 de chaque côté de O.

Correction

> Le point A est 4 carreaux à gauche de O. Après le demi-tour, A' est 4 carreaux à droite de O, sur la même ligne du quadrillage.
>
> Donc O est sur $[AA']$, et $OA' = OA$: le point O est le milieu de $[AA']$. Le segment $[AA']$ mesure 8 carreaux.

Rappel du primaire : le **milieu** d'un segment $[AB]$ est le point de $[AB]$ situé à la même distance de A et de B.

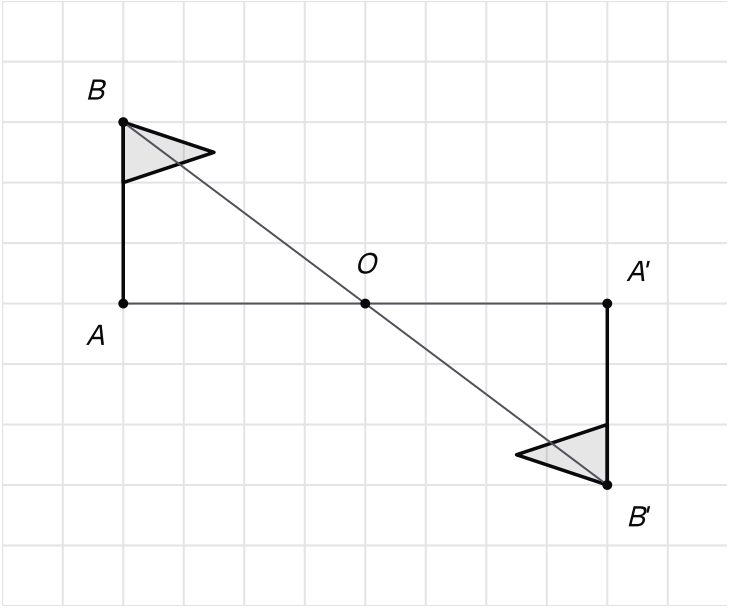
Pour le placer, tu mesures AB et tu prends la moitié. Par exemple, si $AB = 6$ cm, le milieu est à 3 cm de A.

Un autre point, puis le programme

Exemple : le haut du mât

Pour aller de B à O, on fait 4 carreaux vers la droite et 3 carreaux vers le bas.

Après le demi-tour, B' est 4 carreaux à droite de O et 3 carreaux plus bas : on refait le même trajet à partir de O. Le mât $[A'B']$ mesure encore 3 carreaux, mais il pend vers le bas.



Après le demi-tour autour de O, le mât [A'B'] pend vers le bas et le fanion passe à gauche.

Le demi-tour est partout. Les lettres S, N et Z, posées à l'envers, se lisent toujours de la même façon. Une roue de vélo qui fait un demi-tour retombe sur elle-même. Beaucoup de carrelages et de logos sont dessinés ainsi.

Dans ce chapitre, tu apprends à trouver la nouvelle place d'un point après un demi-tour, puis celle d'une figure entière. Tu découvres ce que le demi-tour garde : les longueurs, les angles, les aires.

Ensuite, tu étudies une figure à quatre côtés, le parallélogramme. Tu apprends à le reconnaître, à le construire et à justifier chaque construction.

Le symétrique d'un point

Le symétrique d'un point

Devine : Où placer le point ?

Sur une droite, place un point M, puis un point O à 3 cm de M. Où placer un point M' pour que O soit le milieu de $[MM']$?

A. Sur la droite, du même côté que M, à 3 cm de O.

Faux.
Ce point est M lui-même : il n'y a pas de segment.

B. N'importe où, pourvu qu'il soit à 3 cm de O.

Faux.
Le milieu d'un segment est sur ce segment : M, O et M' doivent être alignés.

C. Sur la droite, de l'autre côté de O, à 3 cm de O.

Juste.
Juste : alors $OM' = OM = 3$ cm, et O est entre M et M'.

D. Sur la droite, de l'autre côté de O, à 6 cm de O.

Faux.
Ici $OM' = 6$ cm et $OM = 3$ cm : O n'est pas à égale distance de M et de M'. C'est la longueur MM' qui doit valoir 6 cm.

Correction
Le milieu de $[MM']$ est sur ce segment, à égale distance de M et de M'.

Donc M' est sur la droite, de l'autre côté de O, et $OM' = OM = 3$ cm. Le segment $[MM']$ mesure alors 6 cm.

Dans le drapeau du début, le point A' était placé ainsi : O au milieu de $[AA']$. Ce point porte un nom. Voici la définition, avec un mot nouveau : **symétrique**.

Définition : Symétrique d'un point par rapport à un point

Soit O un point.

- Si M est un point différent de O, le **symétrique** de M par rapport à O est le point M' tel que O soit le **milieu** du segment $[MM']$.

- Le symétrique du point O par rapport à O est le point O lui-même.

On dit que M et M' sont **symétriques par rapport au point** O. Le point O est le **centre** de la symétrie.

Exemple : lire la définition

- Le point O est le milieu de $[MM']$, avec $MM' = 7$ cm. Donc M' est le symétrique de M par rapport à O, et $OM = OM' = 3{,}5$ cm.
- Les deux points jouent le même rôle : M est aussi le symétrique de M' par rapport à O.
- Le centre ne bouge pas : le symétrique de O par rapport à O est O.

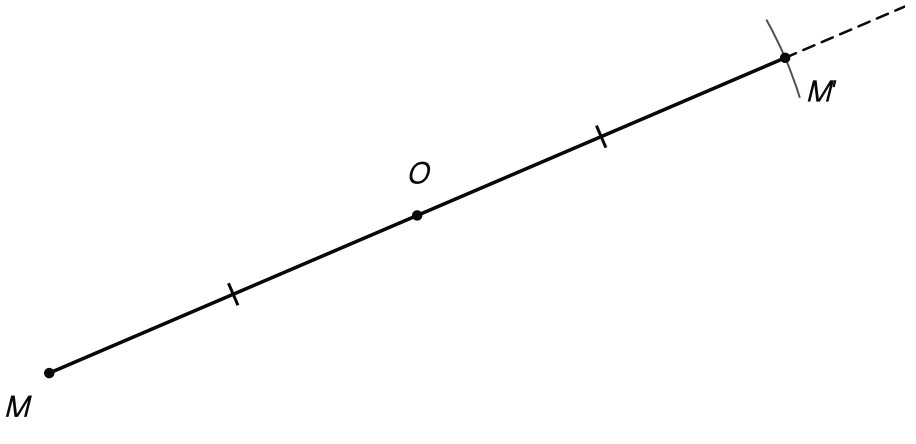
Construire à la règle et au compas

Méthode : construire le symétrique d'un point

On veut le symétrique M' de M par rapport à O.

1. **Trace** la demi-droite $[MO)$. Elle commence en M, passe par O et continue au-delà.
2. **Ouvre** ton compas : pointe sur O, mine sur M.
3. **Reporte** cette ouverture de l'autre côté de O, sur la demi-droite. Le point marqué est M'.
4. **Contrôle** à la règle graduée : M, O et M' sont alignés, et $OM' = OM$.

Sur papier quadrillé, tu peux aussi compter les carreaux du trajet de M à O. Puis tu refais ce trajet à partir de O.



Construction de M' : la demi-droite [MO), puis un arc de centre O qui reporte la longueur OM au-delà de O.

Exemple : Exemple guidé : sur ton cahier

- Trace un segment $[MO]$ de 4 cm, puis la demi-droite $[MO)$.
- Pointe du compas sur O, ouverture 4 cm : marque un arc au-delà de O. Il coupe la demi-droite en M'.
- Mesure MM' : tu dois trouver 8 cm.

Justification. On sait que M, O, M' sont alignés et que $OM = OM' = 4$ cm. Donc O est le milieu de $[MM']$.

D'après la définition du symétrique d'un point, M' est le symétrique de M par rapport à O.

Sur papier quadrillé

Sur papier quadrillé, la règle et le compas sont inutiles. Tu comptes les carreaux. Les trajets de M à O et de O à M' sont identiques.

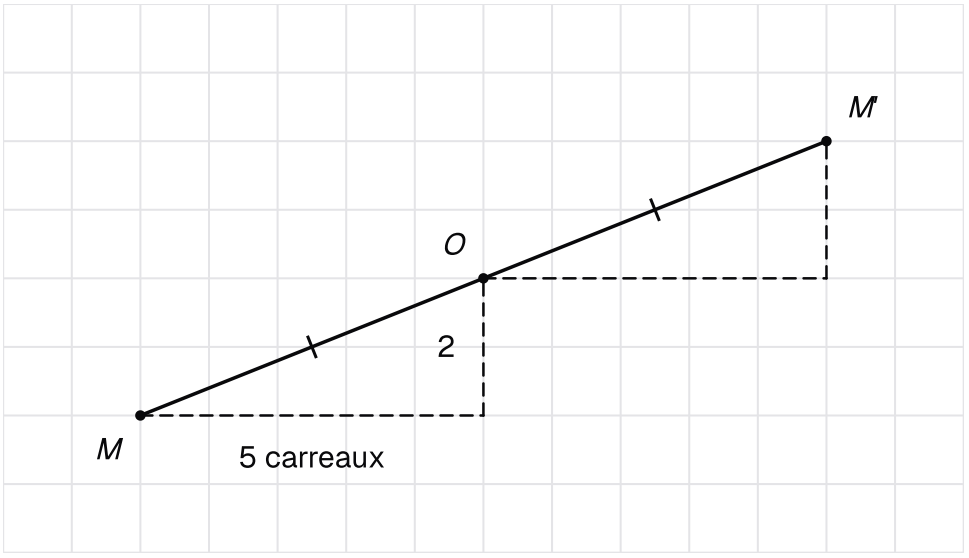
Les segments $[MO]$ et $[OM']$ ont donc la même longueur. Ils sont dans le prolongement l'un de l'autre : les points M, O et M' sont alignés.

Exemple : compter les carreaux

Pour aller de M à O, tu fais 5 carreaux vers la droite, puis 2 vers le haut.

À partir de O, tu refais le même trajet : 5 carreaux vers la droite, puis 2 vers le haut. Tu arrives en M'.

Contrôle. De M à M', le trajet est de 10 carreaux vers la droite et 4 vers le haut : chaque nombre du premier trajet est doublé.



Le même trajet, 5 carreaux à droite puis 2 vers le haut, mène de M à O puis de O à M'.

Vérifie : Un trajet à refaire

Pour aller de A à O, on fait 3 carreaux vers la gauche et 4 carreaux vers le bas. Comment trouver le symétrique A' de A par rapport à O ?

A. Partir de O : 3 vers la droite, 4 vers le haut.

Faux.

Ce trajet ramène en A : c'est le chemin du retour.

B. Partir de A : 3 vers la gauche, 4 vers le bas.

Faux.

Ce trajet mène de A à O : tu arrives au centre, pas en A'.

C. Partir de O : 4 vers la gauche, 3 vers le bas.

Faux.

Les deux nombres sont échangés : le point n'est plus aligné avec les deux autres.

D. Partir de O : 3 vers la gauche, 4 vers le bas.

Juste.

Juste : on refait le même trajet, à partir du centre.

Correction

On refait le trajet de A à O à partir de O : 3 carreaux vers la gauche, puis 4 vers le bas. Le point obtenu est A'.

Avec des carreaux de 1 cm, tu mesures à la règle $OA = OA' = 5$ cm, et $AA' = 10$ cm.

Deux pièges

Attention : un demi-tour, pas un pliage

✗ « Pour trouver le symétrique de M par rapport à O, je plie la feuille. »

✓ Pour un symétrique par rapport à un **point**, on ne plie pas la feuille. On tourne d'un demi-tour autour du centre.

Le point, le centre et le symétrique sont alignés, et le centre est au milieu. C'est pourquoi une figure semble souvent « tête en bas » après un demi-tour.

Attention : aligné ne suffit pas

✗ « M, O et M' sont alignés, donc M' est le symétrique de M. »

✓ Il faut aussi $OM' = OM$, avec O entre M et M'.

Par exemple, si $OM = 3$ cm et $OM' = 4$ cm, le point O n'est pas le milieu de $[MM']$. Donc M' n'est pas le symétrique de M par rapport à O.

Trouve l'erreur : Symétrique ou pas ?

Dans lequel de ces cas M' est-il le symétrique de M par rapport à O ?

A. O est entre M et M' sur une droite, $OM = OM' = 4$ cm.

Juste.

Juste : O est le milieu de $[MM']$.

B. O est entre M et M' sur une droite, $OM = 4$ cm, $OM' = 5$ cm.

Faux.

Faux. Les distances au centre diffèrent : O n'est pas le milieu.

C. $OM = OM' = 4$ cm et $\widehat{MOM'} = 90°$.

Faux.

Faux. Les trois points ne sont pas alignés.

D. Le point M' est sur le segment $[OM]$, et $OM' = 2$ cm.

Faux.

Faux. Le centre O n'est pas entre M et M'.

Correction

Il faut deux conditions à la fois : les points M, O, M' sont alignés avec O entre les deux, et $OM' = OM$.

Seul le premier cas les remplit : O est le milieu de $[MM']$.

À toi

À toi : Un centre qui n'est pas le milieu

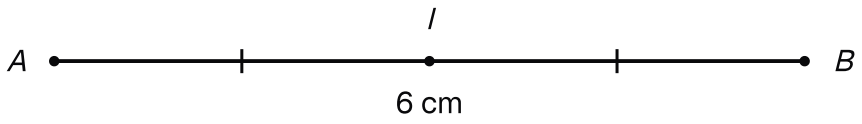
Trace un segment $[AB]$ de 6 cm et place son milieu I. Construis le symétrique C de A par rapport à B. Calcule AC, puis IC. Cherche sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le centre de la symétrie est le point B : c'est B qui doit être le milieu de $[AC]$.
Indice 2
Où doit être C par rapport à B ? Compare BC et BA.
Indice 3
Point délicat : le point I ne sert pas à construire C. Il sert seulement au calcul de IC.

Réponse
Calcul de AC. D'après la définition du symétrique d'un point, B est le milieu de $[AC]$. Donc $BC = BA = 6$ cm, et $AC = 6 + 6 = 12$ cm.

Calcul de IC. Le point I est le milieu de $[AB]$, donc $IB = 3$ cm. Les points I, B, C sont alignés dans cet ordre. Donc $IC = IB + BC = 3 + 6 = 9$ cm.

Conclusion. Le segment $[AC]$ mesure 12 cm, et $IC = 9$ cm.



Les données de l'activité : le segment [AB] de 6 cm et son milieu I.

Exemple : rédiger une justification

On sait que les points E, K, F sont alignés, avec K entre E et F, et que $KE = KF = 5$ cm. Donc K est le milieu de $[EF]$.

Or, si K est le milieu de $[EF]$, alors F est le symétrique de E par rapport à K.

Donc F est le symétrique de E par rapport à K.

Le mot du prof. Un symétrique se construit en deux gestes : aligner, puis reporter la même distance. Si tu oublies l'un des deux, ton point est faux. Prends l'habitude de contrôler à la règle à la fin.

Symétrique d'un segment, d'une droite, d'une demi-droite

Le symétrique d'une figure

Devine : Une longueur après le demi-tour

Tu construis les symétriques A' et B' de deux points A et B par rapport à un point O. On a $AB = 5$ cm. Combien mesure $A'B'$, à ton avis ?

A. Cela dépend de la place de O.

Faux.

Le segment change de place selon O, mais pas de longueur.

B. $A'B' = 5$ cm.

Juste.

Juste : le demi-tour déplace le segment sans l'allonger.

C. $A'B' = 10$ cm.

Faux.

Le centre est le milieu de $[AA']$ et de $[BB']$, mais le segment $[A'B']$ ne double pas.

D. $A'B' = 2{,}5$ cm.

Faux.

Le demi-tour ne rétrécit pas la figure.

Correction

Fais l'essai sur ton cahier avec deux places différentes pour O. Tu mesures chaque fois $A'B' = 5$ cm. Le demi-tour déplace le segment sans changer sa longueur.

Sur ton cahier, trace un segment $[AB]$ de 5 cm. Place un point O hors de la droite (AB), à environ 3 cm de A. Construis A' et B', puis trace $[A'B']$ et mesure-le.

Choisis enfin un point M de $[AB]$ et construis son symétrique M' : il tombe sur $[A'B']$.

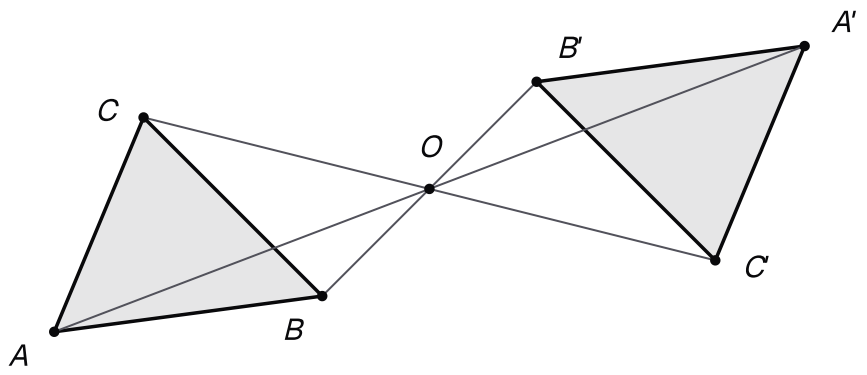
Définition : Figures symétriques par rapport à un point

Soit O un point et $\mathcal{F}$ une figure. La figure formée par les symétriques, par rapport à O, de **tous** les points de $\mathcal{F}$ est la **symétrique** de $\mathcal{F}$ par rapport à O.

On dit que les deux figures sont **symétriques par rapport au point** O. On obtient l'une à partir de l'autre par un **demi-tour** autour de O.

Exemple : le logo d'un club

Le logo d'un club est un triangle ABC peint sur un mur. Sa figure symétrique par rapport à un point O est le triangle $A'B'C'$. Si tu décalques le logo et fais tourner le calque d'un demi-tour autour de O, il recouvre exactement le triangle $A'B'C'$.



Le logo ABC et le triangle A'B'C', symétrique de ABC par rapport au point O, extérieur au logo.

Le symétrique d'un segment

Propriété : Symétrique d'un segment

Soit O un point. Si A' et B' sont les symétriques de A et B par rapport à O, alors :

- le symétrique du segment $[AB]$ par rapport à O est le segment $[A'B']$;
- les deux segments ont la **même longueur** : $A'B' = AB$.

On dit que la symétrie centrale **conserve les longueurs**. Le symétrique du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$.

Remarque : Un résultat admis

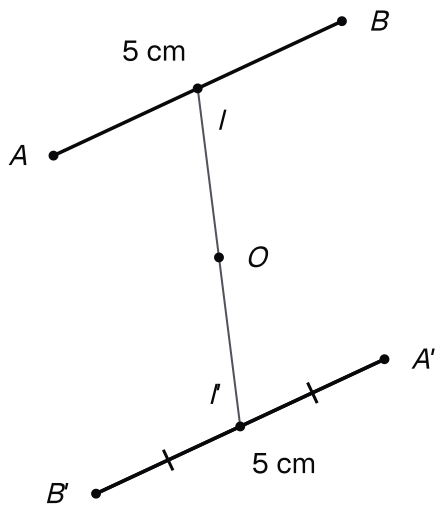
Tu l'as observé en mesurant. Ce résultat est admis. Dans ce chapitre, on l'utilise sans le démontrer.

Exemple : longueur et milieu

Le segment $[AB]$ mesure 5 cm et son milieu est I. On construit les symétriques A', B' et I' par rapport à O.

D'après la propriété du symétrique d'un segment :

- $A'B' = AB = 5$ cm ;
- le point I' est le milieu de $[A'B']$, donc $A'I' = 2{,}5$ cm.



Le segment [AB] de 5 cm, son milieu I, et leurs symétriques par rapport à O : [A'B'] de 5 cm et son milieu I'.

Le symétrique d'une droite et d'une demi-droite

Devine : Deux droites

Trace une droite (AB) qui ne passe pas par O. Construis A' et B', puis trace la droite $(A'B')$. Comment sont les droites (AB) et $(A'B')$?

A. Elles se coupent en O.

Faux.

Aucune des deux ne passe par O, puisque (AB) n'y passe pas.

B. Elles sont confondues.

Faux.

Cela arrive seulement quand la droite passe par O.

C. Elles sont parallèles.

Juste.

Juste : elles ne se coupent pas, quel que soit le prolongement.

D. Elles sont perpendiculaires.

Faux.

Vérifie à l'équerre : elles ne forment pas d'angle droit.

Correction

Prolonge les deux droites aussi loin que tu veux : elles ne se coupent jamais. Elles sont parallèles.

Si la droite passait par O, elle serait sa propre symétrique.

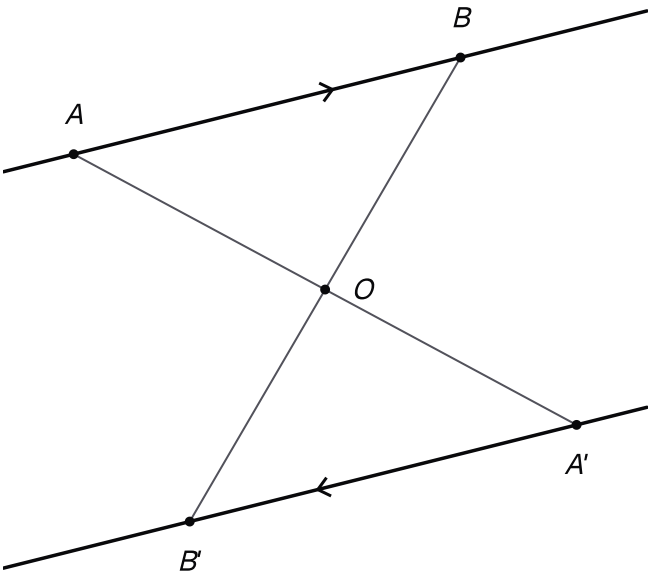
Propriété : Symétrique d'une droite et d'une demi-droite ; alignement

Soit O un point, A et B deux points distincts, et A', B' leurs symétriques par rapport à O.

- Le symétrique de la droite (AB) est la droite $(A'B')$, et ces deux droites sont **parallèles** : $(A'B') \parallel (AB)$. Si la droite (AB) passe par O, elle est sa propre symétrique.
- Le symétrique de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.
- Si trois points sont **alignés**, leurs symétriques sont alignés : la symétrie centrale **conserve l'alignement**.

Remarque : Des propriétés admises

Ces propriétés sont admises. Rappel du chapitre « Droites perpendiculaires et droites parallèles » : deux droites confondues sont aussi dites parallèles. C'est le cas d'une droite qui passe par le centre.



La droite (AB), qui évite O, et sa symétrique (A'B') : deux droites parallèles.

Exemple : alignement et demi-droite

- Les points A, B, C sont alignés, avec B sur $[AC]$. D'après la propriété du symétrique d'un segment, B' est sur $[A'C']$. Les points A', B', C' sont donc alignés.
- La demi-droite $[AB)$ a pour origine A. Sa symétrique est $[A'B')$: son origine est A'.
- La droite (OA) passe par O : elle est sa propre symétrique.

Vérifie : L'origine d'une demi-droite

Quelle est la figure symétrique de la demi-droite $[AB)$ par rapport à O ?

A. La demi-droite $[B'A')$.

Faux.

Son origine serait B' : or l'origine de $[AB)$ est A.

B. La droite $(A'B')$ tout entière.

Faux.

Une demi-droite a une origine : sa symétrique aussi.

C. Le segment $[A'B']$.

Faux.

Une demi-droite n'a pas de seconde extrémité : sa symétrique non plus.

D. La demi-droite $[A'B')$.

Juste.

Juste : l'origine A a pour symétrique l'origine A'.

Correction

D'après la propriété du symétrique d'une demi-droite, le symétrique de $[AB)$ est $[A'B')$. L'origine A a pour symétrique A', qui est l'origine de la nouvelle demi-droite.

Construire le symétrique d'une figure

Méthode : construire le symétrique d'une figure

1. **Choisis** les points utiles :
   - un segment : ses deux extrémités ;
   - une droite : deux de ses points ;
   - une demi-droite : son origine et un autre point ;
   - un angle : son sommet et un point sur chacun de ses côtés ;
   - un cercle : son centre seul.
2. **Construis** les symétriques de ces points, et d'eux seuls.
3. **Trace** la figure symétrique : même longueur pour un segment, droite parallèle, même mesure pour un angle, même rayon pour un cercle.
4. **Vérifie** une longueur à la règle, ou un angle au rapporteur.

Exemple : Exemple guidé : un segment et une droite

- Pour le segment $[EF]$ de 4 cm : tu construis E' et F' seulement, puis tu traces $[E'F']$. Contrôle : $E'F' = 4$ cm.
- Pour une droite (d) : tu choisis deux points G et H de (d). Tu construis G' et H', puis tu traces la droite $(G'H')$. Contrôle : elle est parallèle à (d).

À toi : Un segment sur quadrillage

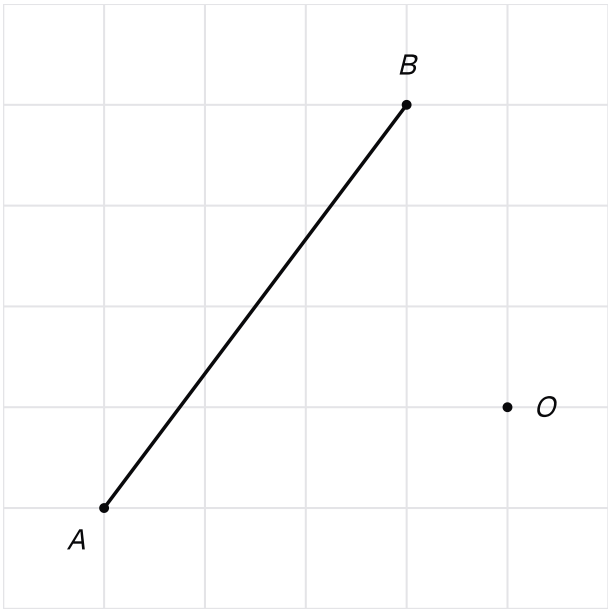
Sur papier quadrillé, place un point O. Le point A est 4 carreaux à gauche de O et 1 carreau plus bas. Le point B est 1 carreau à gauche de O et 3 carreaux plus haut. Construis A', B' et le segment $[A'B']$. Quel trajet mène de A' à B' ? Compare AB et $A'B'$. Cherche sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le point A' est de l'autre côté de O : 4 carreaux à droite et 1 carreau plus haut.
Indice 2
De même, B' est 1 carreau à droite de O et 3 carreaux plus bas.
Indice 3
Point délicat : pour comparer les longueurs, cite la propriété du symétrique d'un segment.

Réponse
Les deux points. Le point A' est 4 carreaux à droite de O et 1 carreau plus haut. Le point B' est 1 carreau à droite de O et 3 carreaux plus bas.

Les trajets. De A à B, le trajet est de 3 carreaux vers la droite et 4 vers le haut. De A' à B', il est de 3 carreaux vers la gauche et 4 vers le bas.

Conclusion. D'après la propriété du symétrique d'un segment, $A'B' = AB$. Avec des carreaux de 1 cm, tu mesures 5 cm pour chacun.



Les données sur quadrillage : le point O et le segment [AB] dont il faut construire le symétrique.

Symétrique d'un angle et d'un cercle ; aires

Le symétrique d'un angle

Sur ton cahier, trace un angle $\widehat{ABC}$ de $40°$ avec ton rapporteur. Ses côtés sont les demi-droites $[BA)$ et $[BC)$.

Place un point O à environ 3 cm de B. Construis A', B' et C', puis trace l'angle $\widehat{A'B'C'}$. Mesure-le au rapporteur.

Devine : Une mesure d'angle

Quelle mesure lis-tu pour l'angle $\widehat{A'B'C'}$?

A. $40°$

Juste.

Juste : l'angle a tourné, mais son ouverture n'a pas changé.

B. $140°$

Faux.

Tu as peut-être lu la mauvaise graduation du rapporteur : $140°$ est un angle obtus.

C. $80°$

Faux.

Le demi-tour ne double pas l'ouverture d'un angle.

D. $20°$

Faux.

Le demi-tour ne réduit pas l'ouverture d'un angle.

Correction
Tu lis $\widehat{A'B'C'} = 40°$, la même mesure que $\widehat{ABC}$. L'angle a fait un demi-tour : son ouverture est restée la même.

Propriété : Symétrique d'un angle

Soit O un point. Si A', B' et C' sont les symétriques de A, B et C par rapport à O, alors le symétrique de l'angle $\widehat{ABC}$ est l'angle $\widehat{A'B'C'}$, et ces deux angles ont la **même mesure** :

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}.$$

On dit que la symétrie centrale **conserve les mesures des angles**.

Remarque : Un résultat admis

Tu l'as constaté au rapporteur. Ce résultat est admis. On l'utilise sans le démontrer.

Exemple : les angles d'un triangle

Dans le triangle ABC, on a $\widehat{ABC} = 40°$ et $\widehat{BCA} = 65°$.

Rappel du chapitre « Le triangle » : la somme des angles d'un triangle vaut $180°$. On retire les deux angles connus :

$$\begin{aligned}\widehat{CAB} &= 180° - 40° - 65° \\ &= 75°.\end{aligned}$$

Le triangle $A'B'C'$ est le symétrique de ABC par rapport à O. D'après la propriété du symétrique d'un angle, ses angles mesurent aussi $40°$, $65°$ et $75°$.

Le symétrique d'un cercle

Devine : Un cercle après le demi-tour

Un cercle a pour centre I et pour rayon 2 cm. Quelle est sa figure symétrique par rapport à un point O différent de I ?

A. Le cercle de centre I, de rayon 2 cm.
Faux.
Ce cercle ne bouge que si son centre est O ; ici I est différent de O.

B. Le cercle de centre I', symétrique de I, de rayon 2 cm.
Juste.
Juste : le centre change de place, le rayon reste le même.

C. Le cercle de centre O, de rayon 2 cm.

Faux.

Le centre I a pour symétrique I', pas O.

D. Le cercle de centre I', symétrique de I, de rayon 4 cm.

Faux.

Le demi-tour conserve les longueurs : le rayon ne double pas.

Correction

Le centre I a pour symétrique I'. Chaque point du cercle reste à 2 cm du centre après le demi-tour.

La figure symétrique est donc le cercle de centre I' et de rayon 2 cm.

Propriété : Symétrique d'un cercle

Soit O un point et $\mathcal{C}$ un cercle de centre I et de rayon r. Le symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à O est le cercle de centre I', symétrique de I par rapport à O, et de **même rayon** r.

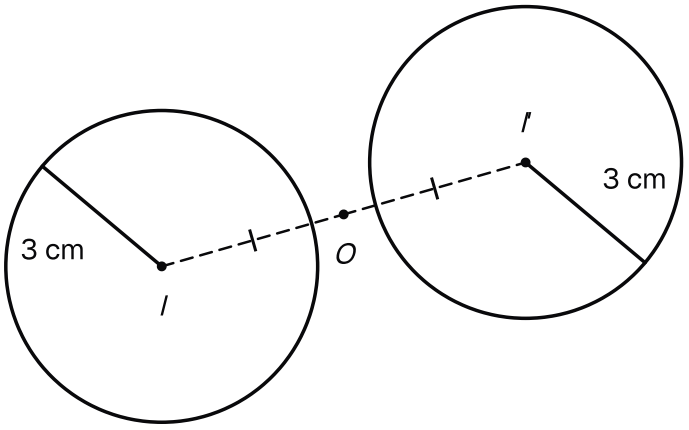
Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Il découle des longueurs conservées, mais on ne le démontre pas ici.

Exemple : la roue d'un vélo

Sur ton cahier, une roue de vélo est un cercle de centre I et de rayon 3 cm. Pour construire sa symétrique par rapport à O :

- tu construis seulement le symétrique I' du centre I ;
- tu ouvres le compas de 3 cm, pointe en I', et tu traces le cercle.

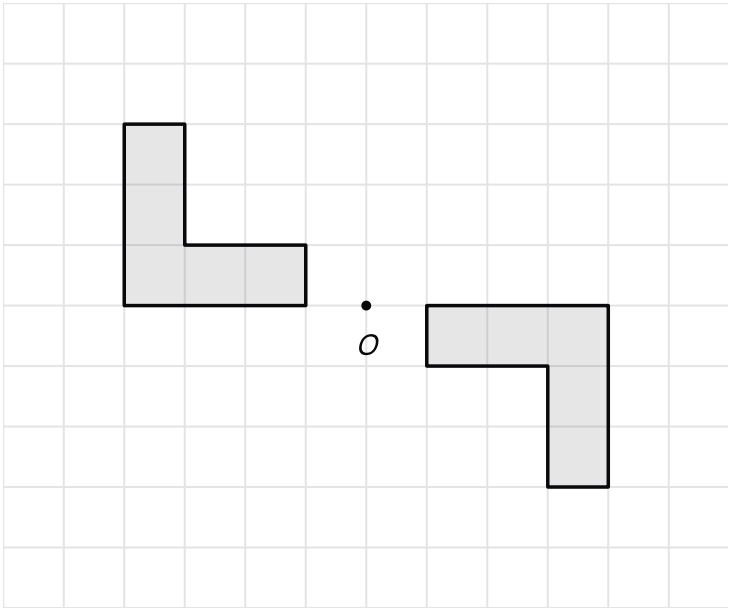


La roue de centre I et de rayon 3 cm, et sa symétrique par rapport à O : même rayon, centre I'.

Des figures superposables

Sur papier quadrillé, colorie une figure en forme de L : une rangée de 3 carreaux, plus 2 carreaux empilés au-dessus du carreau de gauche. Elle compte 5 carreaux.

Construis sa symétrique par rapport à un coin de carreau, puis compte ses carreaux. Tu en trouves encore 5.



Une figure en L de 5 carreaux et sa symétrique par rapport à un coin de carreau, qui compte encore 5 carreaux.

Propriété : Conservation des aires

Une figure et sa symétrique par rapport à un point ont la **même aire**. On dit que la symétrie centrale **conserve les aires**.

Plus généralement, une figure et sa symétrique sont **superposables** : on peut poser l'une exactement sur l'autre après un demi-tour.

Remarque : Un résultat admis

Tu l'as vérifié en comptant les carreaux. Ce résultat est admis. Les autres propriétés de conservation de ce chapitre le sont aussi.

À toi : Un jardin et son symétrique

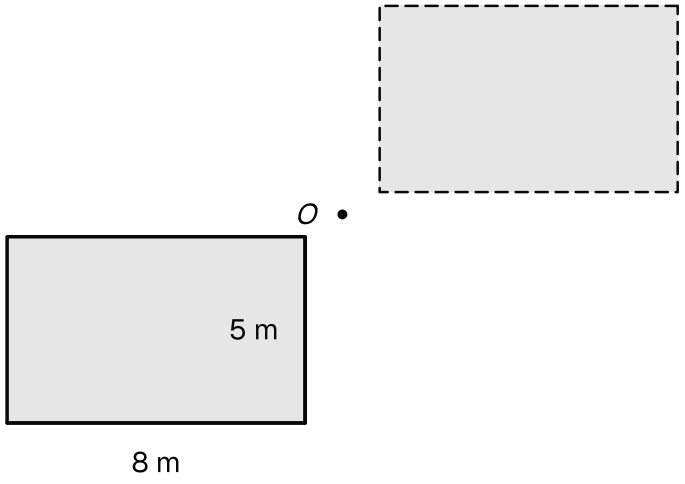
Un jardin rectangulaire mesure 8 m sur 5 m. On dessine sur le plan sa figure symétrique par rapport à un point. Quelle est l'aire du jardin symétrique ? Et son périmètre ? Cherche sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le jardin symétrique a les mêmes longueurs que le jardin de départ.
Indice 2
Calcule d'abord l'aire du jardin : longueur fois largeur.
Indice 3
Point délicat : nomme la propriété de conservation que tu emploies pour chaque réponse.

Réponse
Aire. L'aire du jardin vaut $8 \times 5 = 40$ m². D'après la conservation des aires, l'aire du jardin symétrique vaut aussi 40 m².

Périmètre. D'après la propriété du symétrique d'un segment, ses côtés mesurent encore 8 m et 5 m. Son périmètre vaut $2 \times (8 + 5) = 26$ m.

Conclusion. Le jardin symétrique a une aire de 40 m² et un périmètre de 26 m, comme le jardin de départ.



Le jardin rectangulaire de 8 m sur 5 m et sa figure symétrique sur le plan, autour du point marqué O.

Centre de symétrie d'une figure

Une figure qui retombe sur elle-même

Devine : La lettre N

Écris un grand N majuscule. Fais-lui faire un demi-tour autour du milieu de son trait oblique. Que se passe-t-il ?

A. Elle se couche sur le côté, comme un Z.

Faux.

Un demi-tour retourne la lettre haut en bas : elle ne se couche pas.

B. Elle se retrouve tête en bas, illisible.

Faux.

Essaie avec le calque : la lettre tête en bas se lit encore N.

C. Elle retombe exactement sur elle-même.

Juste.

Juste : chaque trait vertical prend la place de l'autre.

D. Elle se retrouve à l'envers, comme dans un miroir.

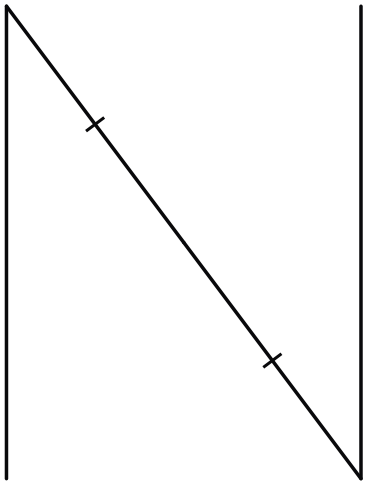
Faux.

Un miroir correspond à un pliage, pas à un demi-tour.

Correction

Décalque la lettre, puis fais tourner le calque d'un demi-tour. Le trait de gauche prend la place du trait de droite, et le trait oblique retombe sur lui-même.

> La lettre N retombe donc exactement sur elle-même.



Un grand N majuscule dont le milieu du trait oblique est repéré par deux moitiés de même codage.

On dit que le milieu du trait oblique est un **centre de symétrie** de la lettre N. Voici la définition.

Définition : Centre de symétrie d'une figure

On dit qu'un point O est un **centre de symétrie** d'une figure $\mathcal{F}$ lorsque la symétrique de $\mathcal{F}$ par rapport à O est la figure $\mathcal{F}$ elle-même.

Autrement dit, le symétrique de chaque point de $\mathcal{F}$ par rapport à O est encore un point de $\mathcal{F}$. Par exemple, le milieu d'un segment est un centre de symétrie de ce segment, et le centre d'un cercle est un centre de symétrie de ce cercle.

Exemple : un segment, un cercle, une carte

- Le milieu I d'un segment $[AB]$: le symétrique de A est B, celui de B est A. Le symétrique de chaque point de $[AB]$ reste sur $[AB]$.
- Le centre d'un cercle : chaque point du cercle a son symétrique sur le cercle, à l'autre bout d'un diamètre.
- Le roi de cœur du début : le milieu de la carte est un centre de symétrie du dessin.

Une figure sans centre

Attention : pas de centre pour toutes les figures

✗ « Toute figure a un centre de symétrie : il suffit de le chercher. »

✓ Beaucoup de figures n'en ont aucun. Un triangle, par exemple, n'a pas de centre de symétrie.

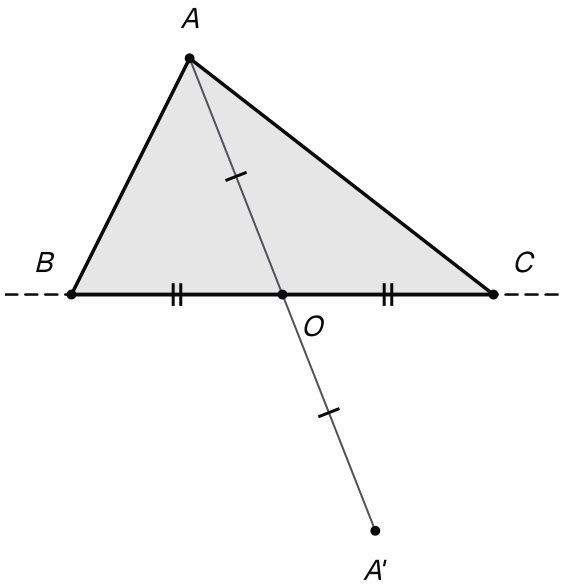
Pour affirmer qu'un point est un centre, vérifie que **tous** les points de la figure ont leur symétrique sur la figure.

Exemple : le milieu d'un côté d'un triangle

Dans un triangle ABC, prends le milieu O du côté $[BC]$. Le symétrique de B est C, et celui de C est B.

Mais le symétrique A' de A est de l'autre côté de la droite (BC). Or aucun point du triangle n'est de ce côté-là de (BC).

Donc A' n'est pas sur le triangle : O n'est pas un centre de symétrie du triangle.



Le milieu O de [BC] n'est pas un centre de symétrie du triangle ABC : A' tombe sous la droite (BC).

Reconnaître un centre

Vérifie : Des lettres majuscules

Ces lettres majuscules sont écrites en capitales d'imprimerie simples. Laquelle a un centre de symétrie ?

A. La lettre A.

Faux.
Après un demi-tour, la pointe du A est en bas : ce n'est plus la même figure.

B. La lettre T.

Faux.
Après un demi-tour, la barre du T passe en bas.

C. La lettre V.

Faux.
Après un demi-tour, la pointe du V passe en haut.

D. La lettre S.

Juste.
Juste : après un demi-tour autour de son milieu, le S retombe sur lui-même.

Correction
Décalque chaque lettre et fais tourner le calque d'un demi-tour autour de son milieu. Seul le S retombe sur lui-même.

Le A, le T et le V se retrouvent tête en bas : ils n'ont pas de centre de symétrie.

À toi : Centre ou pas ?

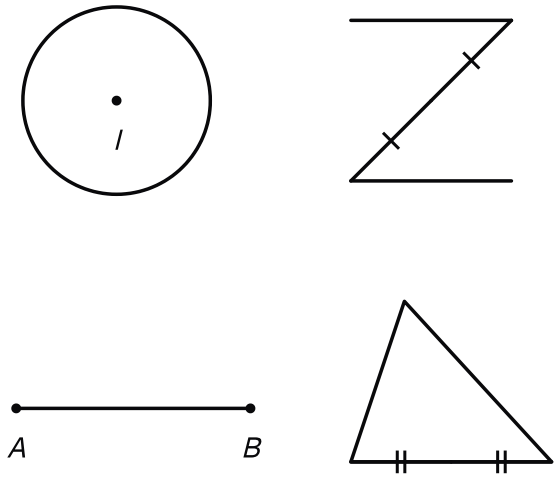
Pour chaque figure, dis si le point donné est un centre de symétrie. Justifie en une phrase.

- Un cercle de centre I, et le point I.
- Un segment $[AB]$, et le point A.
- La lettre Z, et le milieu de son trait oblique.
- Un triangle, et le milieu d'un de ses côtés.

Cherche sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour chaque cas, fais faire un demi-tour à la figure autour du point donné.
Indice 2
Pour le segment, cherche le symétrique de B par rapport à A.
Indice 3
Point délicat : pour répondre non, il suffit de trouver un point dont le symétrique n'est pas sur la figure.

Réponse
- Oui : chaque point du cercle a son symétrique sur le cercle.
- Non : le symétrique de B par rapport à A est au-delà de A, hors du segment $[AB]$.
- Oui : après un demi-tour, la lettre Z retombe sur elle-même.
- Non : le symétrique du troisième sommet sort du triangle, comme dans l'exemple ci-dessus.



Les quatre cas à étudier : un cercle et son centre I, un segment [AB] et son extrémité A, la lettre Z, un triangle.

Exemple : un panneau routier

Le panneau « sens interdit » est un disque rouge traversé par une barre blanche horizontale. La barre est centrée sur le disque.

Après un demi-tour autour du centre du disque, le disque et la barre retombent sur eux-mêmes. Le centre du disque est donc un centre de symétrie du panneau.

Le mot du prof. Pour dire oui, il faut que toute la figure retombe sur elle-même. Pour dire non, un seul point qui sort de la figure suffit. Le papier calque est ton meilleur allié pour vérifier.

Le parallélogramme et ses diagonales

Un quadrilatère aux côtés parallèles

Devine : Un quadrilatère sur quadrillage

Sur papier quadrillé, trace un quadrilatère $ABCD$. De A à B : 4 carreaux vers la droite. De B à C : 2 carreaux vers la droite et 3 vers le haut. De C à D : 4 carreaux vers la gauche. Puis trace $[DA]$. Que remarques-tu sur ses côtés ?

A. $(AB) \parallel (CD)$ et $(AD) \parallel (BC)$.
Juste.
Juste : les côtés qui ne se touchent pas sont parallèles.

B. $(AB) \perp (BC)$ et $(CD) \perp (DA)$.

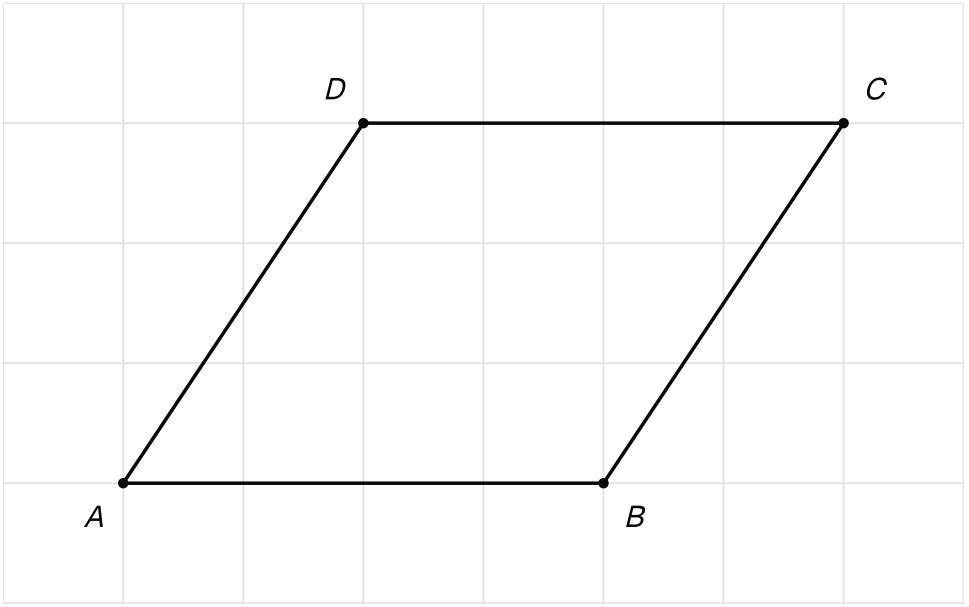
Faux.
Vérifie à l'équerre : ces côtés ne forment pas d'angle droit.

C. Seuls (AB) et (CD) sont parallèles.
Faux.
Regarde aussi $[DA]$: de D à A, on fait 2 carreaux vers la gauche et 3 vers le bas.

D. Aucun côté n'est parallèle à un autre.
Faux.
Les côtés $[AB]$ et $[CD]$ suivent tous deux une ligne du quadrillage.

Correction
Les côtés $[AB]$ et $[CD]$ suivent des lignes du quadrillage : $(AB) \parallel (CD)$.

De B à C, on fait 2 carreaux vers la droite et 3 vers le haut. De A à D, on fait le même trajet : $(AD) \parallel (BC)$.



Le quadrilatère ABCD tracé sur quadrillage à partir des trajets de l'activité.

Un quadrilatère se nomme en suivant ses sommets dans l'ordre : $ABCD$.

- Deux côtés **opposés** n'ont pas de sommet commun, comme $[AB]$ et $[CD]$.
- Deux sommets **opposés** ne sont pas sur un même côté, comme A et C.
- Une **diagonale** est un segment qui joint deux sommets opposés : ici $[AC]$ et $[BD]$.

Définition : Parallélogramme

Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les **côtés opposés sont parallèles** deux à deux.

Le quadrilatère $ABCD$ est nommé en suivant ses sommets dans l'ordre. Ses côtés opposés sont $[AB]$ et $[CD]$, puis $[AD]$ et $[BC]$. Ses **diagonales** sont les segments $[AC]$ et $[BD]$. Ainsi, $ABCD$ est un parallélogramme lorsque $(AB) \parallel (CD)$ et $(AD) \parallel (BC)$.

Exemple : des parallélogrammes connus

- Le quadrilatère tracé sur quadrillage est un parallélogramme : ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
- Le rectangle, le losange et le carré, connus depuis le primaire, sont des parallélogrammes : leurs côtés opposés sont parallèles deux à deux.
- Un trapèze qui n'a qu'une paire de côtés parallèles n'est pas un parallélogramme.

L'ordre des sommets

Attention : l'ordre des sommets compte

✗ « Dans $ABCD$, les diagonales sont $[AB]$ et $[CD]$. »

✓ Le nom $ABCD$ suit les sommets dans l'ordre. Les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont des côtés. Les diagonales joignent des sommets opposés : ce sont $[AC]$ et $[BD]$.

Avant d'utiliser une propriété, repasse le contour du quadrilatère avec ton crayon.

Vérifie : Les diagonales d'un parallélogramme

Dans le parallélogramme $EFGH$, quelles sont les diagonales ?

A. Les segments $[EF]$ et $[FG]$.
Faux.
Faux. Ce sont deux côtés qui se suivent.

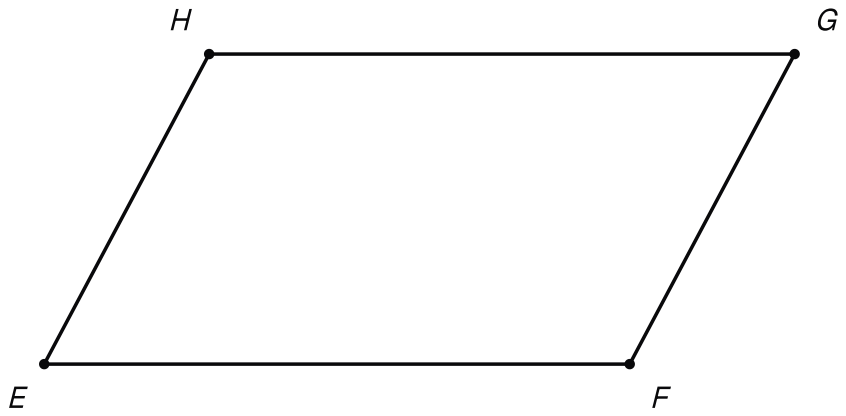
B. Les segments $[EG]$ et $[FH]$.
Juste.
Juste : E et G sont opposés, comme F et H.

C. Les segments $[EF]$ et $[GH]$.
Faux.
Faux. Ce sont deux côtés opposés.

D. Les segments $[EH]$ et $[FG]$.
Faux.
Faux. Ce sont les deux autres côtés opposés.

Correction

On suit le contour : E, puis F, G et H. Les sommets opposés sont E et G, puis F et H. Les diagonales sont donc $[EG]$ et $[FH]$.



Le parallélogramme EFGH, ses sommets nommés dans l'ordre du contour.

Mesurer les diagonales

Reprends le parallélogramme $ABCD$ du quadrillage. Trace ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$: elles se coupent en un point, appelé O. Mesure OA, OC, OB et OD à la règle graduée.

Devine : Le point de rencontre

Que constates-tu sur les diagonales $[AC]$ et $[BD]$?

A. Les diagonales sont perpendiculaires : $(AC) \perp (BD)$.
Faux.
Vérifie à l'équerre : elles ne forment pas d'angle droit.

B. Le point O est le milieu de $[AC]$ seulement.
Faux.
Mesure aussi OB et OD : tu trouves la même longueur.

C. Le point O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$.
Juste.
Juste : $OA = OC$ et $OB = OD$.

D. Les diagonales ont la même longueur : $AC = BD$.
Faux.
Mesure-les : $[AC]$ est bien plus longue que $[BD]$.

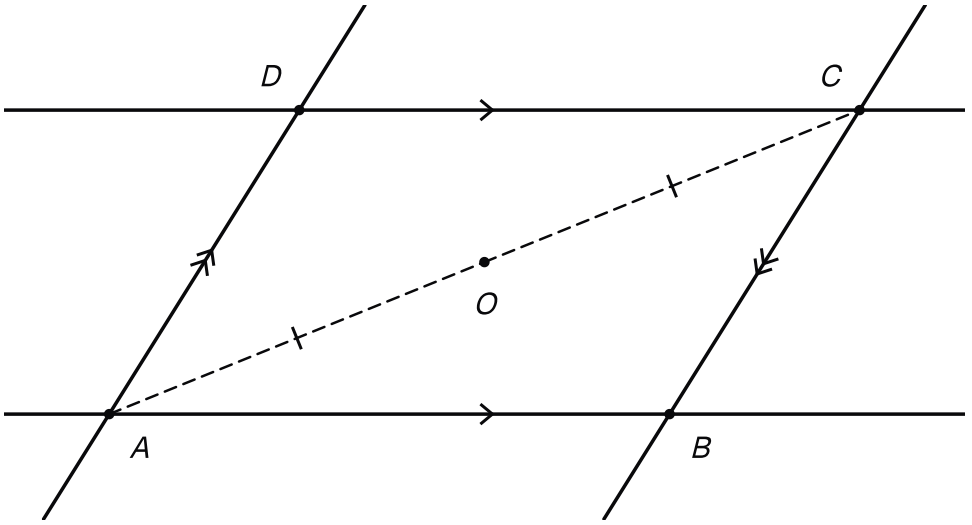
Correction
Tu trouves $OA = OC$ et $OB = OD$: le point O est le milieu des deux diagonales.

> En revanche, AC et BD sont différentes, et les diagonales ne sont pas perpendiculaires.

Une propriété démontrée

Pourquoi est-ce vrai ? Une mesure ne suffit pas : elle pourrait être un peu fausse.

Voici une preuve. On fait faire un demi-tour à la figure autour du milieu de la diagonale $[AC]$. On regarde où arrivent les côtés.



La figure de la preuve : O au milieu de [AC] ; la droite (AB) a pour symétrique (CD), et (CB) a pour symétrique (AD).

Théorème : Diagonales et centre de symétrie d'un parallélogramme

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors :

- ses **diagonales** $[AC]$ et $[BD]$ **ont le même milieu** O ;
- ce point O est un **centre de symétrie** du parallélogramme.

Démonstration

Étape 1. Soit O le milieu de $[AC]$. Par définition du symétrique d'un point, C est le symétrique de A par rapport à O.

Étape 2. D'après la propriété du symétrique d'une droite, le symétrique de (AB) est parallèle à (AB) et passe par C. Par un point, il passe une seule parallèle à une droite : c'est (CD). De même, le symétrique de (CB) est (AD).

Étape 3. Le point B est sur (AB) et sur (CB). Son symétrique est donc sur (CD) et sur (AD). Ces deux droites passent par D et sont différentes : elles se coupent seulement en D. Ainsi D est le symétrique de B : O est aussi le milieu de $[BD]$.

Étape 4. Chaque sommet a pour symétrique un sommet. D'après la propriété du symétrique d'un segment, chaque côté a pour symétrique un côté : O est un centre de symétrie.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On place O au milieu de $[AC]$: C est le symétrique de A.

La droite (AB) a pour symétrique une parallèle à (AB) qui passe par C. Par un point, il ne passe qu'une seule parallèle à une droite (rappel du chapitre « Droites perpendiculaires et droites parallèles »). Cette parallèle est donc (CD).

De même, la droite (CB) a pour symétrique (AD). Le point B est sur (AB) et sur (CB) : il a pour symétrique le point D, seul point commun à (CD) et à (AD).

Le point O, milieu commun des diagonales, s'appelle le **centre** du parallélogramme.

Vérifie : Une étape de la preuve

À l'étape 2 de la preuve, pourquoi le symétrique de la droite (AB) est-il la droite (CD) ?

A. Les côtés $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur, ce qui place (CD).
Faux.
La preuve n'emploie aucune longueur à cette étape : c'est une droite qu'on cherche.

B. Le point D est le symétrique de B, donc (CD) est symétrique de (AB).
Faux.
Ce fait est établi à l'étape 3, à partir de l'étape 2 : on ne peut pas l'employer avant.

C. La droite (CD) passe par O, le centre de la symétrie.
Faux.
La droite (CD) ne passe pas par O : le point O est à l'intérieur du parallélogramme, sur aucun de ses côtés.

D. Ce symétrique est parallèle à (AB) et passe par C ; par C, il n'existe qu'une parallèle à (AB).
Juste.
Juste : c'est l'unicité de la parallèle à une droite passant par un point.

Correction
Le symétrique de (AB) est une droite parallèle à (AB). Elle passe par C, symétrique de A.

Or (CD) est parallèle à (AB) et passe par C. Par un point, il ne passe qu'une seule parallèle à une droite. Donc le symétrique de (AB) est (CD).

Exemple : des longueurs, puis un cerf-volant

- $ABCD$ est un parallélogramme de centre O, avec $AC = 10$ cm et $BD = 6$ cm. D'après la propriété des diagonales, $OA = OC = 5$ cm et $OB = OD = 3$ cm.
- **L'hypothèse compte.** Un cerf-volant a deux baguettes, $[AC]$ de 80 cm et $[BD]$ de 50 cm. Elles se croisent au milieu de $[BD]$, mais à 20 cm de A, donc à 60 cm de C. Les diagonales n'ont pas le même milieu : ce cerf-volant n'est pas un parallélogramme.

À toi

À toi : Des demi-diagonales

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. On sait que $OA = 4$ cm et $BD = 7$ cm. Calcule AC, OB et OD. Cherche sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu.
Indice 2
Le point O est donc le milieu de $[AC]$ et le milieu de $[BD]$.
Indice 3
Point délicat : OA est une moitié, il faut la doubler ; BD est entière, il faut la partager en deux.

Réponse
D'après la propriété des diagonales d'un parallélogramme, O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$.

- $AC = 2 \times OA = 2 \times 4 = 8$ cm.
- $OB = OD = 7 \div 2 = 3{,}5$ cm.

Vérifie : Un côté après le demi-tour

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Quel est le symétrique du côté $[BC]$ par rapport à O ?

A. Le côté $[DA]$.
Juste.
Juste : B a pour symétrique D, et C a pour symétrique A.

B. Le côté $[CD]$.
Faux.
Le symétrique de C est A : il ne reste pas en C.

C. Le côté $[AB]$.
Faux.
Le symétrique de B est D : il ne reste pas en B.

D. Le côté $[BC]$ lui-même.

Faux.
Seul un segment qui a O pour milieu est son propre symétrique.

Correction
D'après la propriété des diagonales, les symétriques de B et C par rapport à O sont D et A.

D'après la propriété du symétrique d'un segment, $[BC]$ a donc pour symétrique $[DA]$.

Le mot du prof. Retiens ceci : le centre d'un parallélogramme est le point où ses diagonales se coupent. Un demi-tour autour de ce point échange les sommets opposés. Toutes les propriétés qui suivent viennent de là.

Côtés et angles du parallélogramme

Les côtés opposés

Devine : Un côté opposé

$ABCD$ est un parallélogramme, avec $AB = 6$ cm. Combien mesure le côté $[CD]$, à ton avis ?

A. On ne peut pas savoir.
Faux.
Mesure-les sur ton parallélogramme du quadrillage : ils sont égaux.

B. $CD = 6$ cm
Juste.
Juste : deux côtés opposés ont la même longueur.

C. $CD = 3$ cm
Faux.
Rien ne partage $[CD]$ en deux : c'est un côté entier.

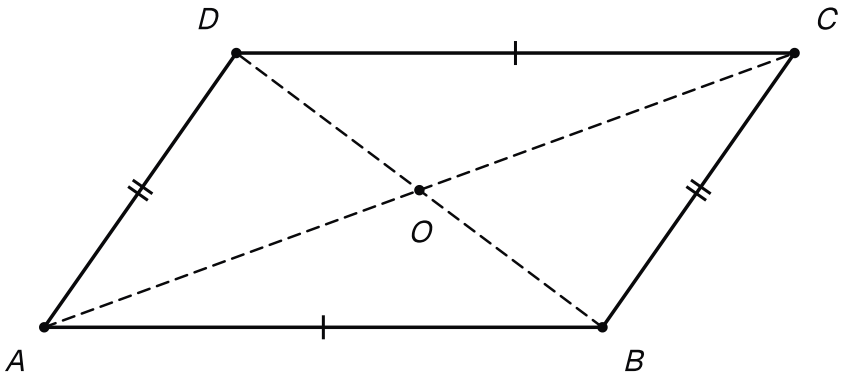
D. $CD = 12$ cm
Faux.
Un côté opposé n'est pas le double de l'autre.

Correction
Sur le parallélogramme du quadrillage, $[AB]$ et $[CD]$ mesurent tous deux 4 carreaux.

Dans tout parallélogramme, deux côtés opposés ont la même longueur : ici, $CD = 6$ cm.

Mesure les quatre côtés de ton parallélogramme du quadrillage. Tu trouves $AB = CD$ et $AD = BC$.

Pourquoi est-ce vrai ? Le demi-tour autour du centre envoie chaque côté sur le côté opposé.



Dans le parallélogramme ABCD de centre O, le demi-tour échange A et C, B et D : AB = CD et AD = BC.

Une preuve par le demi-tour

Théorème : Côtés opposés d'un parallélogramme

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors ses **côtés opposés ont la même longueur** deux à deux :

$$AB = CD \quad \text{et} \quad AD = BC.$$

Démonstration

Étape 1. D'après la propriété des diagonales d'un parallélogramme, ses diagonales ont le même milieu O. Donc C est le symétrique de A et D est le symétrique de B par rapport à O.

Étape 2. D'après la propriété du symétrique d'un segment, le symétrique de $[AB]$ est $[CD]$, et ces deux segments ont la même longueur : $AB = CD$.

Étape 3. De même, B a pour symétrique D et C a pour symétrique A : le symétrique de $[BC]$ est $[DA]$, donc $BC = AD$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On utilise le centre O, milieu des diagonales. Le demi-tour autour de O échange A et C, puis B et D. Il envoie donc le côté $[AB]$ sur le côté opposé $[CD]$. Or le symétrique d'un segment a la même longueur : les deux côtés sont égaux.

Vérifie : Quelle propriété ?

À l'étape 2 de la preuve, quelle propriété donne $AB = CD$?

A. Le symétrique d'une droite lui est parallèle.
Faux.

Cette propriété donne un parallélisme, pas une longueur.

B. Le symétrique d'un angle a la même mesure.

Faux.

Cette propriété sert pour les angles, pas pour les côtés.

C. Le symétrique d'un segment a la même longueur.

Juste.

Juste : le symétrique de $[AB]$ est $[CD]$.

D. La définition du parallélogramme.

Faux.

La définition parle de côtés parallèles, jamais de longueurs.

Correction

Les symétriques de A et B par rapport à O sont C et D.

D'après la propriété du symétrique d'un segment, $[AB]$ a pour symétrique $[CD]$, et ces segments ont la même longueur : $AB = CD$.

Exemple : un cadre, puis un trapèze

- Un cadre photo a la forme d'un parallélogramme $ABCD$, avec $AB = 7$ cm et $BC = 4$ cm. D'après la propriété des côtés opposés, $CD = 7$ cm et $AD = 4$ cm. Son périmètre vaut $2 \times (7 + 4) = 22$ cm.
- **L'hypothèse compte.** Un trapèze dont les côtés parallèles mesurent 6 cm et 4 cm n'est pas un parallélogramme : ses deux côtés opposés parallèles n'ont pas la même longueur.

Les angles opposés

Avec ton rapporteur, mesure les quatre angles de ton parallélogramme.

Les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{BCD}$ sont **opposés** : leurs sommets A et C sont opposés.

Pourquoi est-ce vrai ? Encore le demi-tour : il envoie chaque angle sur l'angle opposé.

Devine : Un angle opposé

Dans un parallélogramme $ABCD$, on a $\widehat{DAB} = 60°$. Que vaut $\widehat{BCD}$, à ton avis ?

A. $120°$

Faux.

Les angles en A et en C sont opposés : ils ont la même mesure. $120°$ n'est donc pas la mesure de $\widehat{BCD}$.

B. $30°$

Faux.
Un angle opposé n'est pas la moitié de l'autre.

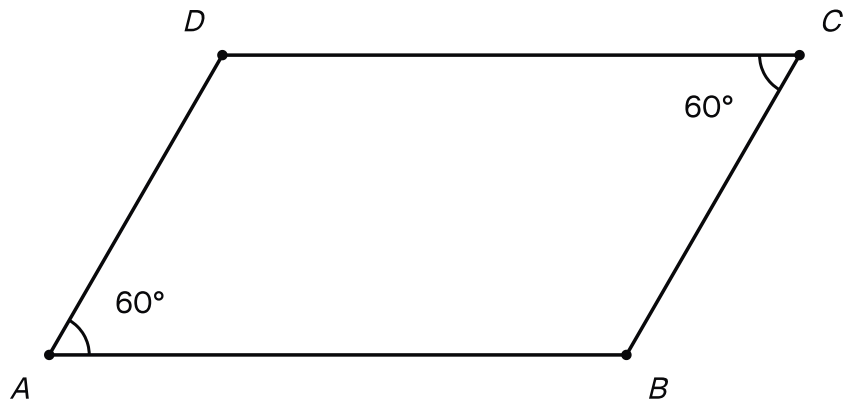
C. $90°$

Faux.
Un parallélogramme n'a pas toujours des angles droits.

D. $60°$

Juste.
Juste : les angles en A et en C sont opposés.

Correction
Mesure sur ton cahier : les angles opposés ont la même mesure. Ici, $\widehat{BCD} = \widehat{DAB} = 60°$.



Les angles opposés DAB et BCD du parallélogramme ABCD mesurent tous deux 60 degrés.

Une preuve courte

Théorème : Angles opposés d'un parallélogramme

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors ses **angles opposés ont la même mesure** deux à deux :

$$\widehat{DAB} = \widehat{BCD} \quad \text{et} \quad \widehat{ABC} = \widehat{CDA}.$$

Démonstration

Étape 1. D'après la propriété des diagonales d'un parallélogramme, les symétriques de A, B, C et D par rapport au milieu O des diagonales sont C, D, A et B.

Étape 2. D'après la propriété du symétrique d'un angle, le symétrique de l'angle $\widehat{DAB}$ est l'angle $\widehat{BCD}$, et ils ont la même mesure : $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$.

Étape 3. De même, le symétrique de l'angle $\widehat{ABC}$ est l'angle $\widehat{CDA}$: $\widehat{ABC} = \widehat{CDA}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Même idée que pour les côtés. Le demi-tour autour du centre envoie D, A, B sur B, C, D. Il envoie donc l'angle $\widehat{DAB}$ sur l'angle opposé $\widehat{BCD}$. Or le symétrique d'un angle a la même mesure.

Vérifie : Les sommets d'un angle

Pourquoi le symétrique de l'angle $\widehat{DAB}$ par rapport au centre O est-il l'angle $\widehat{BCD}$?

A. Les symétriques de D, A, B sont B, C, D.

Juste.

Juste : chaque point de l'angle a son symétrique sur l'angle $\widehat{BCD}$.

B. Les côtés (AB) et (CD) sont parallèles.

Faux.

La preuve n'emploie pas la définition à cette étape.

C. Les côtés $[AD]$ et $[BC]$ ont la même longueur.

Faux.

Une égalité de longueurs ne dit pas où arrive un angle.

D. Les deux angles sont du même côté de (AC).

Faux.

Faux. Leurs sommets A et C sont sur (AC). Ce sont les symétriques des points D, A, B qui disent où arrive l'angle.

Correction

D'après la propriété des diagonales, les symétriques de D, A, B par rapport à O sont B, C, D. Donc le symétrique de $\widehat{DAB}$ est $\widehat{BCD}$.

La propriété du symétrique d'un angle donne alors l'égalité de leurs mesures.

Exemple : avec un triangle

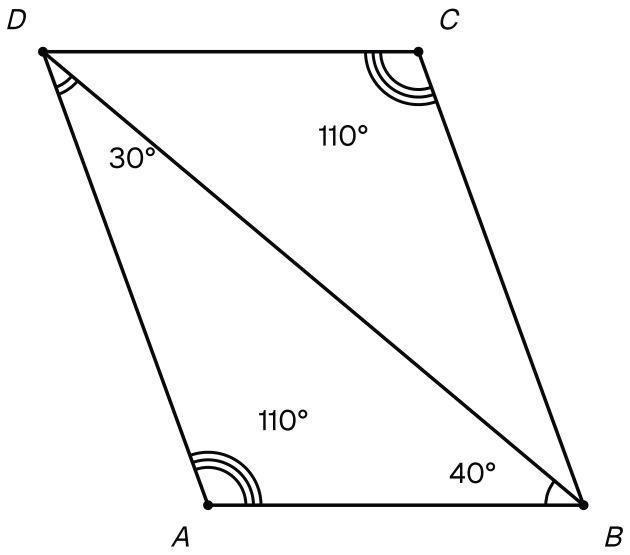
Dans le parallélogramme $ABCD$, la diagonale $[BD]$ forme le triangle ABD. On sait que $\widehat{ABD} = 40°$ et $\widehat{ADB} = 30°$.

Rappel du chapitre « Le triangle » : la somme des angles d'un triangle vaut $180°$. Dans le triangle ABD :

$$\begin{aligned}\widehat{DAB} &= 180° - 40° - 30° \\ &= 110°.\end{aligned}$$

D'après la propriété des angles opposés, $\widehat{BCD} = 110°$.

Rappel : si une demi-droite partage un angle en deux, la mesure de l'angle est la somme des deux mesures. Ici, la diagonale $[BD]$ partage l'angle $\widehat{ABC}$ en deux : $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC}$.



La diagonale [BD] découpe le triangle ABD : 40 et 30 degrés en B et en D, donc 110 degrés en A, comme en C.

Utiliser un parallélogramme

Méthode : trouver une longueur ou un angle

1. **Annonce** la figure : « $ABCD$ est un parallélogramme. »
2. **Nomme** la propriété qui sert : les côtés opposés ont la même longueur, les angles opposés ont la même mesure, ou les diagonales se coupent en leur milieu.
3. **Conclus** avec la valeur, et son unité.

Exemple : une rédaction complète

On sait que $EFGH$ est un parallélogramme, avec $EF = 5$ cm et $\widehat{FGH} = 70°$.

- Or, dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur. Donc $GH = EF = 5$ cm.
- Or, dans un parallélogramme, les angles opposés ont la même mesure. Donc $\widehat{HEF} = \widehat{FGH} = 70°$.

À toi : Un panneau en parallélogramme

Un panneau a la forme d'un parallélogramme $KLMN$. On sait que $KL = 9$ cm, $LM = 5$ cm, $\widehat{KLM} = 115°$ et $KM = 12$ cm. Calcule MN, NK, $\widehat{MNK}$, le périmètre du panneau, et la distance de K au centre du panneau. Cherche sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Trouve les côtés opposés, puis les sommets opposés, en suivant le contour K, L, M, N.
Indice 2
Le centre est le milieu de la diagonale $[KM]$.
Indice 3
Point délicat : l'angle opposé à $\widehat{KLM}$ a pour sommet N, le sommet opposé à L.

Réponse
Côtés. Dans le parallélogramme $KLMN$, les côtés opposés ont la même longueur : $MN = KL = 9$ cm et $NK = LM = 5$ cm.

Angle. Les angles opposés ont la même mesure : $\widehat{MNK} = \widehat{KLM} = 115°$.

Périmètre. Le périmètre du panneau vaut $2 \times (9 + 5) = 28$ cm.

Centre. Les diagonales ont le même milieu, qui est le centre du panneau. La diagonale $[KM]$ mesure 12 cm, donc le centre est à $12 \div 2 = 6$ cm de K.

Reconnaître et construire un parallélogramme

Partir des diagonales

Devine : Deux segments qui se croisent

Trace un segment $[AC]$ de 8 cm et un segment $[BD]$ de 5 cm qui se coupent en leur milieu commun O. Puis trace le contour $ABCD$. Quel quadrilatère obtiens-tu ?

A. Un quadrilatère sans propriété.
Faux.
Vérifie à la règle et à l'équerre : ses côtés opposés sont parallèles.

B. Un parallélogramme, quel que soit l'angle.
Juste.
Juste : tu peux vérifier que ses côtés opposés sont parallèles.

C. Un rectangle, quel que soit l'angle.
Faux.
Les diagonales n'ont pas la même longueur : les angles ne sont pas droits.

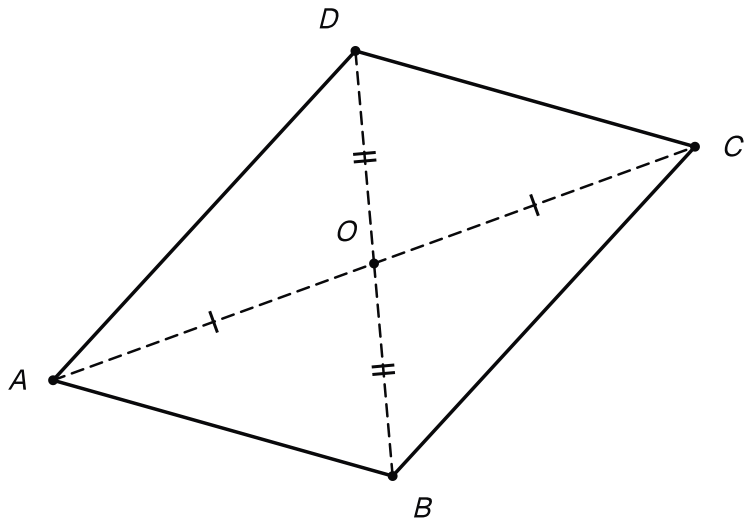
D. Un losange, quel que soit l'angle.
Faux.
Il faudrait que les diagonales soient perpendiculaires.

Correction

> Fais la figure avec deux angles différents entre les segments. Chaque fois, les côtés opposés sont parallèles : tu obtiens un parallélogramme.

C'est le chemin inverse de la section précédente : on part des diagonales pour arriver aux côtés.

Pourquoi est-ce vrai ? Le milieu commun est un centre : le demi-tour autour de lui envoie chaque côté sur une droite parallèle.



Deux segments [AC] et [BD] de même milieu O : le contour ABCD qu'ils dessinent est un parallélogramme.

Une preuve, encore par le demi-tour

Théorème : Reconnaître un parallélogramme par ses diagonales

Si les **diagonales** d'un quadrilatère $ABCD$ **ont le même milieu**, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

Démonstration

Étape 1. On appelle O le milieu commun de $[AC]$ et de $[BD]$. Par définition du symétrique d'un point, C et D sont les symétriques de A et de B par rapport à O.

Étape 2. D'après la propriété du symétrique d'une droite, le symétrique de la droite (AB) est la droite (CD), et ces deux droites sont parallèles : $(AB) \parallel (CD)$.

Étape 3. De même, D et A sont les symétriques de B et de C : le symétrique de (BC) est (DA), donc $(BC) \parallel (AD)$.

Étape 4. Les côtés opposés de $ABCD$ sont parallèles deux à deux : par définition, $ABCD$ est un parallélogramme.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le milieu commun O fait de C et D les symétriques de A et B. Le symétrique d'une droite lui est parallèle : $(AB) \parallel (CD)$, puis $(BC) \parallel (AD)$. On conclut par la définition du parallélogramme.

Vérifie : La dernière étape

À l'étape 4 de la preuve, quelle propriété permet de conclure que $ABCD$ est un parallélogramme ?

A. Le symétrique d'un segment a la même longueur.
Faux.
La preuve n'emploie aucune longueur.

B. La somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés.
Faux.
La preuve n'emploie aucun angle.

C. La définition du parallélogramme : côtés opposés parallèles.
Juste.
Juste : les étapes 2 et 3 ont donné les deux parallélismes.

D. La propriété des diagonales d'un parallélogramme.
Faux.
Elle suppose que $ABCD$ est déjà un parallélogramme : on tournerait en rond.

Correction
Les étapes 2 et 3 donnent $(AB) \parallel (CD)$ et $(BC) \parallel (AD)$: les côtés opposés de $ABCD$ sont parallèles deux à deux.

Par définition, $ABCD$ est donc un parallélogramme.

Exemple : deux allées, puis un contre-exemple

- Dans un jardin, deux allées droites de 30 m et de 18 m se croisent en leur milieu. Les quatre extrémités des allées forment un parallélogramme : ses diagonales ont le même milieu.
- **L'hypothèse compte.** Si l'allée de 18 m coupe la grande allée en son milieu, mais à 5 m d'une de ses propres extrémités, les deux milieux sont différents. Le quadrilatère n'est pas un parallélogramme : si c'en était un, ses diagonales auraient le même milieu.

Reconnaître par les côtés

Prends deux baguettes de 6 cm et deux baguettes de 4 cm. Forme un quadrilatère où les baguettes de même longueur sont opposées.

Ce quadrilatère est **non croisé** : ses côtés opposés ne se coupent pas. Tu obtiens chaque fois un parallélogramme.

Si tu croises les baguettes, tu obtiens un « nœud papillon », qui n'en est pas un.

Propriété : Reconnaître un parallélogramme par ses côtés

Soit $ABCD$ un quadrilatère **non croisé** : ses côtés opposés ne se coupent pas.

- Si ses **côtés opposés ont la même longueur** deux à deux, alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- Si **deux côtés opposés** sont **parallèles et de même longueur**, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

Ces deux propriétés sont admises.

Remarque : Des propriétés admises

Tu les as observées avec les baguettes. Ces propriétés sont admises. On les utilise sans les démontrer dans ce chapitre.

Exemple : un cadre de fenêtre

On sait que le quadrilatère $ABCD$ est non croisé, avec $AB = CD = 6$ cm et $AD = BC = 4$ cm.

Or, si les côtés opposés d'un quadrilatère non croisé sont égaux deux à deux, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

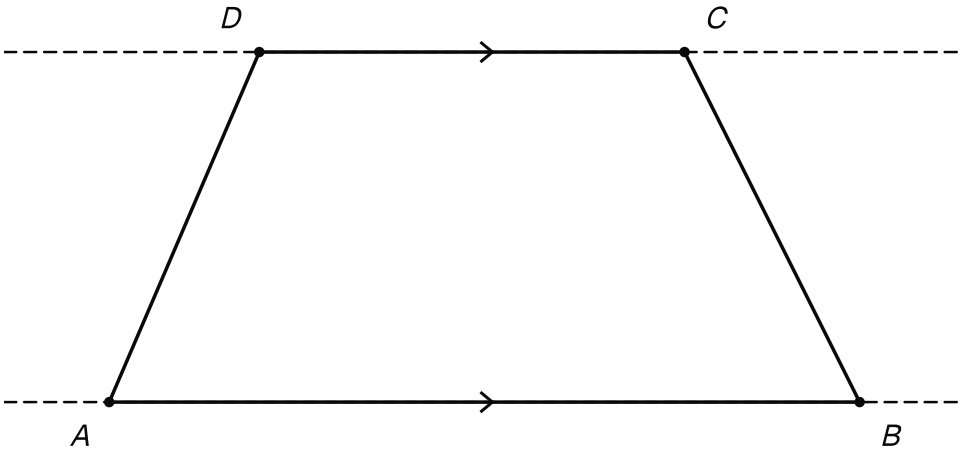
Un piège

Attention : une seule paire de côtés

✗ « Les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles, donc $ABCD$ est un parallélogramme. »

✓ Un trapèze a deux côtés parallèles, sans être un parallélogramme. Une seule paire de côtés opposés de même longueur ne suffit pas non plus.

Pour un quadrilatère non croisé, il suffit que les **deux** paires de côtés opposés aient la même longueur. Avec **une seule** paire, il faut qu'elle soit à la fois parallèle **et** de même longueur.



Un trapèze ABCD : (AB) et (CD) sont parallèles, mais (AD) et (BC) ne le sont pas.

Trouve l'erreur : Quel raisonnement est juste ?

Le quadrilatère $ABCD$ est non croisé. Quelle information suffit pour conclure que c'est un parallélogramme ?

A. $(AB) \parallel (CD)$ seulement.

Faux.

Faux. Un trapèze a aussi deux côtés parallèles.

B. $AB = CD = 5$ cm seulement.

Faux.

Faux. On ne sait rien des deux autres côtés.

C. $(AB) \parallel (CD)$ et $AD = BC = 5$ cm.

Faux.

Faux. Ce sont deux paires différentes : un trapèze peut avoir $AD = BC$.

D. $(AB) \parallel (CD)$ et $AB = CD = 5$ cm.

Juste.

Juste : la même paire de côtés est parallèle et de même longueur.

Correction

Seule l'information « $(AB) \parallel (CD)$ et $AB = CD = 5$ cm » parle d'une **même** paire de côtés, à la fois parallèles et de même longueur. Pour un quadrilatère non croisé, la propriété de reconnaissance par les côtés dit que cela suffit.

Avec $(AB) \parallel (CD)$ et $AD = BC$, on peut dessiner un trapèze qui n'est pas un parallélogramme.

Rédiger une démonstration

Méthode : démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

1. **Relève** les données de l'énoncé : des droites parallèles, des longueurs, des milieux.
2. **Choisis** la propriété qui va avec les données :
   - la définition : les côtés opposés sont parallèles deux à deux ;
   - les diagonales ont le même milieu ;
   - quadrilatère non croisé : les côtés opposés sont égaux deux à deux ;
   - quadrilatère non croisé : une paire de côtés opposés est parallèle et égale.
3. **Écris** ta preuve en trois phrases : « On sait que… », puis « Or, si…, alors… », enfin « Donc… ».

Exemple : une rédaction modèle

Les segments $[EG]$ et $[FH]$ se coupent en leur milieu K.

- On sait que les diagonales $[EG]$ et $[FH]$ du quadrilatère $EFGH$ ont le même milieu K.
- Or, si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
- Donc $EFGH$ est un parallélogramme.

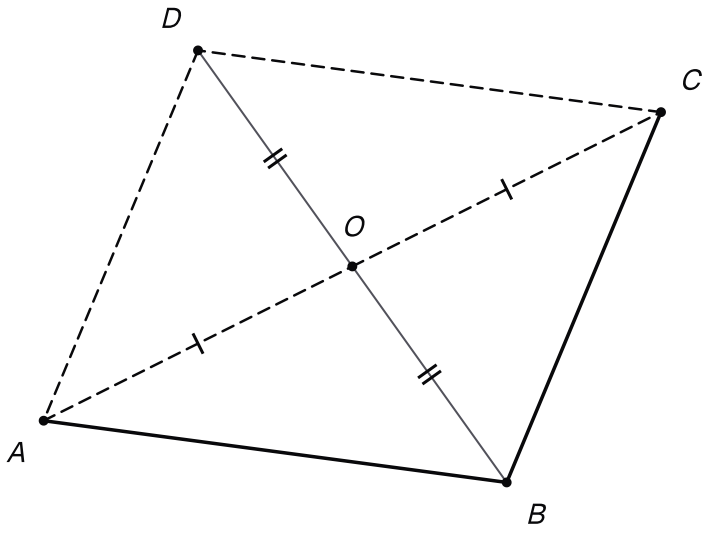
Construire avec trois sommets

Méthode : construire un parallélogramme de trois sommets

On connaît A, B, C et l'on cherche D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

1. **Place** le milieu O de la diagonale $[AC]$.
2. **Construis** le symétrique de B par rapport à O : c'est le point D.
3. **Justifie** : les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu O, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Contrôle : mesure AD et BC à la règle. Les deux longueurs doivent être égales.



Le quatrième sommet : D est le symétrique de B par rapport au milieu O de la diagonale [AC].

À toi : Le quatrième sommet

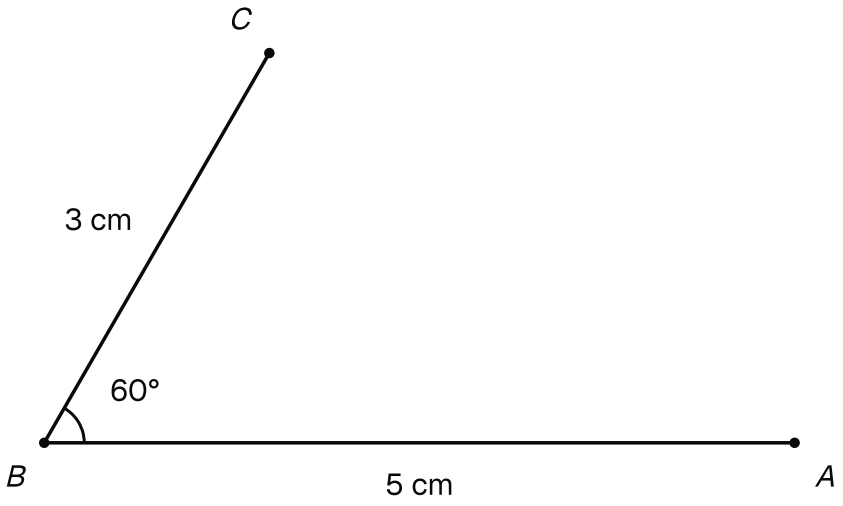
Trace un angle $\widehat{ABC} = 60°$ avec $AB = 5$ cm et $BC = 3$ cm. Construis le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, et justifie ta construction. Donne ensuite CD, AD et $\widehat{CDA}$. Cherche sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Place d'abord le milieu O de la diagonale $[AC]$.
Indice 2
Le point D est le symétrique de B par rapport à O.
Indice 3
Point délicat : le centre est le milieu de $[AC]$, et non le milieu d'un côté comme $[AB]$.

Réponse
Construction. On place le milieu O de $[AC]$, puis le symétrique D de B par rapport à O.

Justification. On sait que $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu O. Or, si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Mesures. D'après les propriétés des côtés et des angles opposés : $CD = AB = 5$ cm, $AD = BC = 3$ cm et $\widehat{CDA} = \widehat{ABC} = 60°$.



Les données : l'angle ABC de 60 degrés, avec AB = 5 cm et BC = 3 cm ; le point D reste à construire.

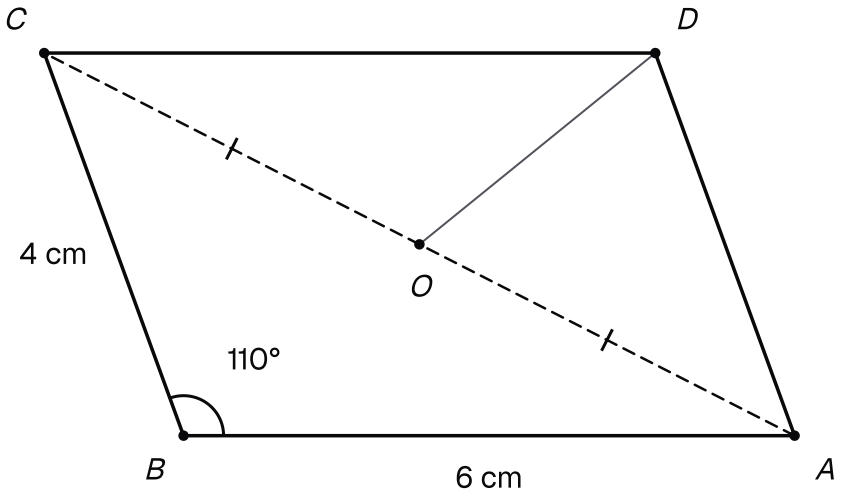
Bilan

À retenir

- **Symétrique d'un point** : le centre est le milieu du segment qui joint le point et son symétrique.
- **Symétrique d'une figure** : il garde les longueurs, l'alignement, les angles et les aires. Une droite a pour symétrique une droite parallèle.
- **Centre de symétrie** : la figure retombe sur elle-même après un demi-tour. Un triangle n'en a pas.
- **Parallélogramme** : ses diagonales ont le même milieu, qui est un centre de symétrie. Ses côtés opposés ont la même longueur, ses angles opposés la même mesure.
- **Reconnaître** : citer la définition ou la propriété employée, en trois temps.

Un exercice de synthèse, à faire sur ton cahier.

Trace un triangle ABC avec $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm et $\widehat{ABC} = 110°$. Place le milieu O de $[AC]$. Construis le symétrique D de B par rapport à O, puis trace le contour $ABCD$.



La figure de synthèse : le triangle ABC, le milieu O de [AC] et D, symétrique de B par rapport à O.

À toi : Question 1 : la nature du quadrilatère

Démontre que $ABCD$ est un parallélogramme. Cherche sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Cherche le milieu de chacune des deux diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
Indice 2
Le point O est le milieu de $[AC]$ par construction, et de $[BD]$ par définition du symétrique.
Indice 3
Point délicat : rédige en trois temps, en citant la propriété des diagonales de même milieu.

Réponse
On sait que O est le milieu de $[AC]$. De plus, D est le symétrique de B par rapport à O : O est donc aussi le milieu de $[BD]$.

Or, si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.

Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

À toi : Question 2 : longueurs et angle

Calcule CD, AD, le périmètre de $ABCD$ et $\widehat{CDA}$. Cherche sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Utilise la question 1 : $ABCD$ est un parallélogramme.
Indice 2

Côtés opposés, puis angles opposés : nomme chaque propriété.

Indice 3

Point délicat : l'angle opposé à $\widehat{ABC}$ a pour sommet D.

Réponse

Côtés. Dans le parallélogramme $ABCD$, les côtés opposés sont de même longueur : $CD = AB = 6$ cm et $AD = BC = 4$ cm.

Périmètre. Il vaut $2 \times (6 + 4) = 20$ cm.

Angle. Les angles opposés ont la même mesure : $\widehat{CDA} = \widehat{ABC} = 110°$.

Vérifie : Question 3 : un demi-tour

Quel est le symétrique du côté $[AB]$ par rapport à O ?

A. Le côté $[CD]$.

Juste.

Juste : A a pour symétrique C, et B a pour symétrique D.

B. Le côté $[BC]$.

Faux.

Le symétrique de B est D, pas B lui-même.

C. Le côté $[AD]$.

Faux.

Le symétrique de A est C, pas A lui-même.

D. Le côté $[AB]$ lui-même.

Faux.

Le point O n'est pas le milieu de $[AB]$.

Correction

Le point O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$: les symétriques de A et B sont C et D.

D'après la propriété du symétrique d'un segment, $[AB]$ a pour symétrique $[CD]$. On retrouve ainsi $CD = AB = 6$ cm.

La symétrie centrale te resservira bientôt. Dans le chapitre « Deux parallèles et une sécante », elle aide à comparer des angles. Dans le chapitre « Quadrilatères particuliers », tu étudieras le rectangle, le losange et le carré, qui sont des parallélogrammes.

Le mot du prof. Tu sais maintenant construire un symétrique et l'utiliser pour démontrer. Garde le réflexe des trois temps : « On sait que… Or… Donc… ». C'est lui qui fait d'une figure juste une réponse juste.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « La symétrie centrale et le parallélogramme » (1ac · general · mathematiques)