BURHAN

# Résumé : Quadrilatères particuliers

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/quadrilateres-particuliers/resume

| Chapitre | Semestre |
| --- | --- |
| Quadrilatères particuliers | Semestre 2 |

## Le rectangle

Un **quadrilatère** a quatre côtés. On le nomme en suivant son contour, par exemple $ABCD$.

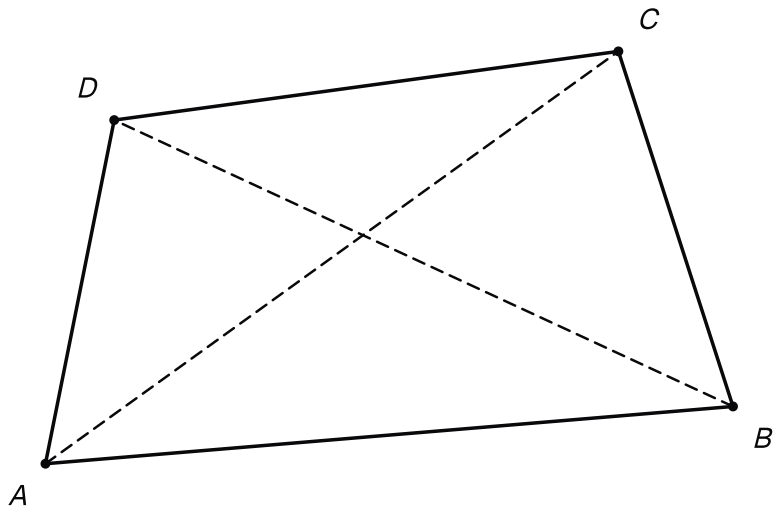
Deux côtés **consécutifs** ont un sommet commun, comme $[AB]$ et $[BC]$. Deux côtés **opposés** n'ont aucun sommet commun, comme $[AB]$ et $[CD]$.

Une **diagonale** relie deux sommets qui ne se suivent pas. Ici, les diagonales sont $[AC]$ et $[BD]$.

La **médiatrice** de $[AB]$ est la droite perpendiculaire à $[AB]$ en son milieu.

Un **trapèze** est un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles.

Un **axe de symétrie** est une droite de pliage : les deux moitiés de la figure se recouvrent. Un **centre de symétrie** est un point : après un demi-tour du calque autour de lui, la figure revient sur elle-même.




**Dans ABCD, [AB] et [BC] se suivent, [AB] et [CD] se font face, et les pointillés marquent [AC] et [BD].**

**Remarque : Rappel du parallélogramme**

Rappel : un parallélogramme a ses côtés opposés parallèles. Ses côtés opposés ont aussi la même longueur. Ses diagonales ont le même milieu.

Et dans l'autre sens : deux diagonales de même milieu donnent toujours un parallélogramme.

**Définition : Le rectangle**

Un **rectangle** est un quadrilatère qui a **quatre angles droits**.

Dans un rectangle $ABCD$, on a donc :

- $(AB) \perp (BC)$ et $(BC) \perp (CD)$ ;
- $(CD) \perp (DA)$ et $(DA) \perp (AB)$.

**Propriété : Trois angles droits suffisent**

Si un quadrilatère a **trois angles droits**, alors c'est un rectangle : son quatrième angle est droit lui aussi.

**Propriété : Le rectangle est un parallélogramme**

Tout rectangle est un **parallélogramme**.

Il a donc toutes les propriétés du parallélogramme : ses côtés opposés sont parallèles et ont la même longueur, et ses diagonales ont le même milieu.

**Propriété : Les diagonales du rectangle**

Les diagonales d'un rectangle ont **la même longueur** et **le même milieu**.

Dans un rectangle $ABCD$ de centre $O$, on a donc $AC = BD$ et $OA = OB = OC = OD$.

**Remarque**

Ce résultat est admis. Tu l'utilises sans le démontrer cette année.

**Exemple : Une carte postale**

Une carte postale a la forme d'un rectangle $KLMN$ de centre $O$. On mesure $KL = 15$ cm, $LM = 8$ cm et $KM = 17$ cm.

Le rectangle est un parallélogramme : ses côtés opposés ont la même longueur. Donc $MN = 15$ cm et $NK = 8$ cm.

Ses diagonales ont la même longueur et le même milieu. Donc $LN = 17$ cm et $OK = OL = OM = ON = 8{,}5$ cm.

## Le losange

Pour tracer un losange, garde le même écartement de compas. Tu reportes cette longueur pour les quatre côtés. La figure peut être penchée : seules les longueurs des côtés comptent.

**Définition : Le losange**

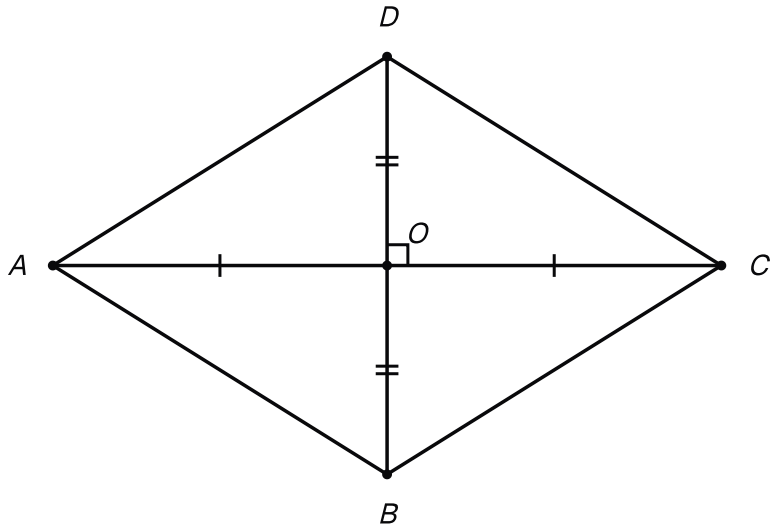
Un **losange** est un quadrilatère qui a **quatre côtés de même longueur**.

Dans un losange $ABCD$, on a donc $AB = BC = CD = DA$.

**Propriété : Les diagonales du losange**

Les diagonales d'un losange sont **perpendiculaires** et ont **le même milieu**.

Par conséquent, tout losange est un **parallélogramme**.




**Losange ABCD : ses diagonales se croisent à angle droit en O, qui est le milieu de chacune.**

**Exemple : Un vitrail**

Un vitrail contient un losange $PQRS$ de centre $O$. Ses côtés mesurent $29$ cm. Ses diagonales mesurent $PR = 42$ cm et $QS = 40$ cm.

Les diagonales ont le même milieu : $OP = OR = 21$ cm et $OQ = OS = 20$ cm.

Elles sont perpendiculaires : l'angle $\widehat{POQ}$ mesure $90°$.

**À retenir : Le losange est un parallélogramme**

> Le losange est un parallélogramme. Dans le vitrail, ses côtés opposés sont donc parallèles : $(PQ) \parallel (SR)$ et $(QR) \parallel (PS)$.

### Le carré

**Définition : Le carré**

Un **carré** est un quadrilatère qui a **quatre angles droits** et **quatre côtés de même longueur**.

**Propriété : Le carré est un rectangle et un losange**

Un carré est **à la fois un rectangle et un losange**.

Il a donc toutes leurs propriétés. En particulier, ses diagonales ont **la même longueur**, **le même milieu**, et elles sont **perpendiculaires**.

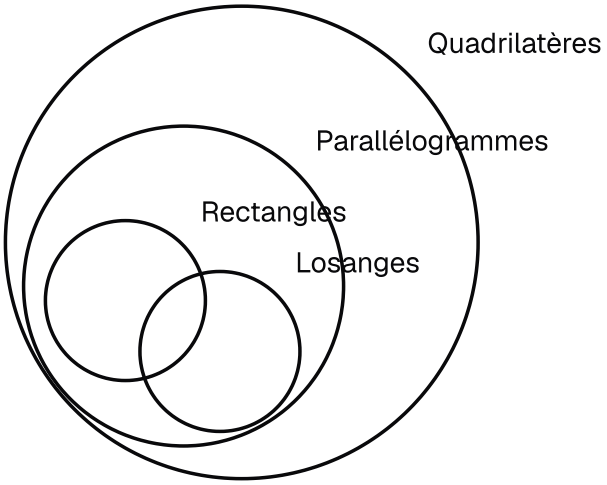
**Exemple : Un carreau de faïence**

Un carreau de faïence est un carré $WXYZ$ de $20$ cm de côté, de centre $O$.

C'est un rectangle : ses diagonales ont la même longueur, donc $WY = XZ$. Elles ont aussi le même milieu $O$.

C'est un losange : ses diagonales sont perpendiculaires, donc $(WY) \perp (XZ)$.

> **À retenir : Les familles de quadrilatères**
>
> - Un carré appartient aux deux familles : rectangles et losanges.
> - Rectangles et losanges appartiennent eux-mêmes à la famille des parallélogrammes.
> - L'inverse est faux. Un rectangle de $9$ cm sur $4$ cm n'est pas un losange. Un losange sans angle droit n'est pas un rectangle.




**Chaque famille dans la suivante : la zone commune aux rectangles et aux losanges est celle des carrés.**

### Reconnaître un rectangle, un losange ou un carré

Pour reconnaître une figure, cherche d'abord un parallélogramme. Ensuite, un seul indice suffit. Cet indice peut être un angle, deux côtés ou les diagonales.

**Propriété : Parallélogramme qui a un angle droit**

Si un **parallélogramme** a **un angle droit**, alors c'est un rectangle.

**Propriété : Parallélogramme aux diagonales de même longueur**

Si un **parallélogramme** a des diagonales de **même longueur**, alors c'est un rectangle.

**Remarque**

Ce résultat est admis. Tu l'utilises sans le démontrer cette année.

**Propriété : Parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux**

Si un **parallélogramme** a **deux côtés consécutifs de même longueur**, alors c'est un losange.

**Propriété : Parallélogramme aux diagonales perpendiculaires**

Si un **parallélogramme** a des diagonales **perpendiculaires**, alors c'est un losange.

**Propriété : Reconnaître un carré**

- Si un **rectangle** a **deux côtés consécutifs de même longueur**, alors c'est un carré.
- Si un **losange** a **un angle droit**, alors c'est un carré.

**Méthode : Prouver qu'une figure est un rectangle**

1. **Compter les angles droits.** Avec trois angles droits, le quadrilatère est un rectangle.
2. **Sinon, passer par le parallélogramme.** Établis d'abord que la figure est un parallélogramme. Il te faut alors un seul angle droit, ou des diagonales égales.
3. **Écrire la conclusion.** Cite la propriété employée, puis le nom de la figure.

**Méthode : Prouver qu'une figure est un losange**

1. **Regarder les quatre côtés.** Si l'énoncé les donne tous égaux, la figure est un losange.
2. **Sinon, passer par le parallélogramme.** Une fois le parallélogramme établi, il suffit de deux côtés consécutifs égaux. Des diagonales perpendiculaires suffisent aussi.
3. **Écrire la conclusion.** Nomme la propriété utilisée.

**Méthode : Prouver qu'une figure est un carré**

1. **Partir d'un rectangle.** Cherche deux côtés consécutifs de même longueur.
2. **Ou partir d'un losange.** Cherche un angle droit.
3. **Conclure.** Avec quatre angles droits et quatre côtés de même longueur, la figure est un carré.

**Exemple : Un indice suffit**

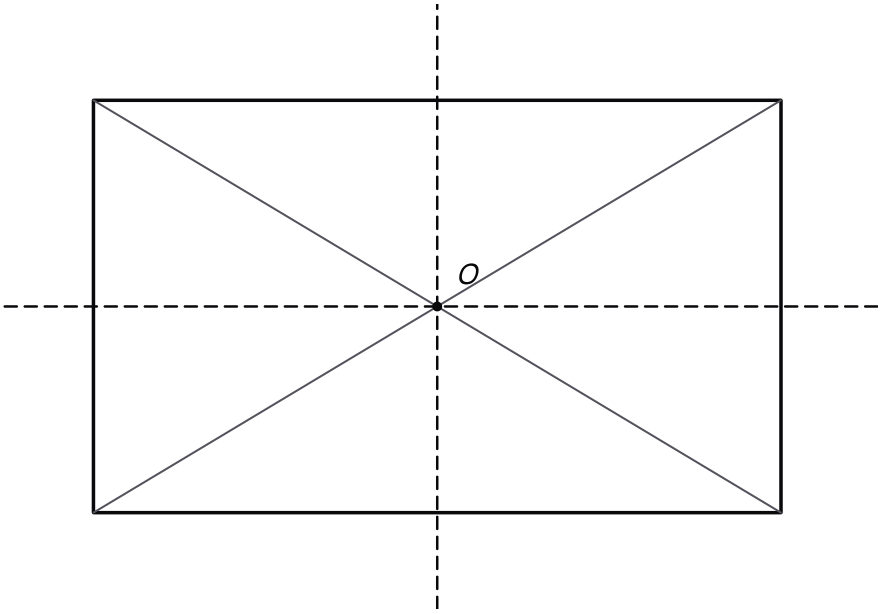
Trois parallélogrammes, trois indices :

- $DEFG$ a $DE = EF = 4$ cm. Deux côtés consécutifs sont égaux : c'est un losange.
- $IJKL$ a des diagonales $IK = JL = 11$ cm. Elles ont la même longueur : c'est un rectangle.
- $RSTU$ a un angle $\widehat{R}$ droit : c'est un rectangle. Comme $RS = ST$, ce rectangle est un carré.

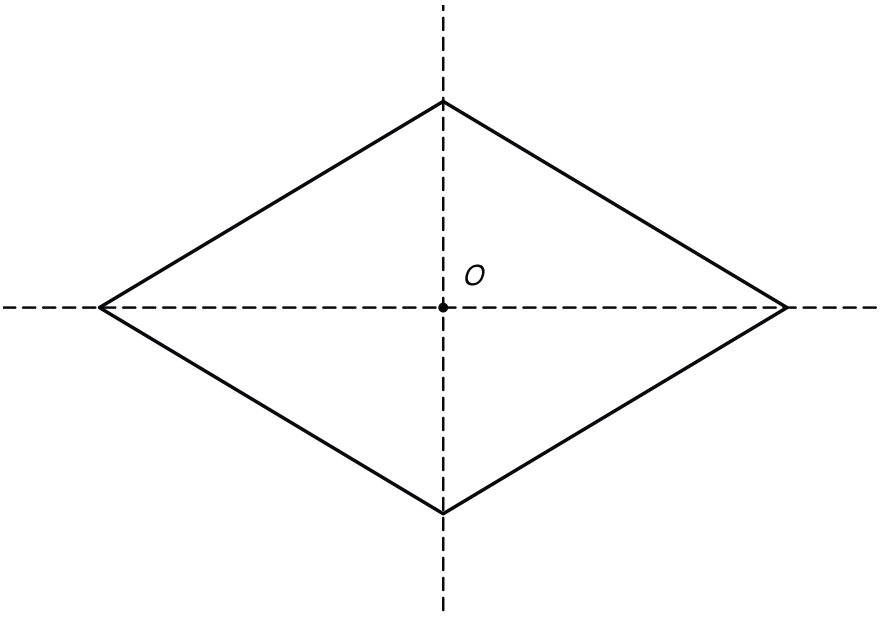
## Centre, axes et constructions

**Propriété : Centre et axes de symétrie**

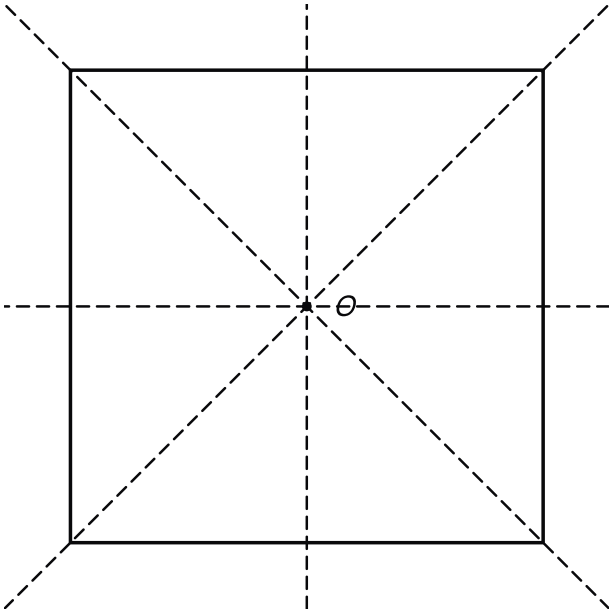
- Le point d'intersection des diagonales d'un rectangle, d'un losange ou d'un carré est son **centre de symétrie**.
- Un rectangle qui n'est pas un carré a **deux axes de symétrie** : les médiatrices de ses côtés.
- Un losange qui n'est pas un carré a **deux axes de symétrie** : ses diagonales.
- Un carré a **quatre axes de symétrie** : les médiatrices de ses côtés et ses diagonales.




**Rectangle non carré : deux axes, qui joignent les milieux de ses côtés opposés, et un centre O.**




**Losange non carré : ses deux diagonales sont ses axes, et leur point commun O est son centre.**




**Le carré cumule les axes : deux droites par les milieux des côtés et deux diagonales, toutes par O.**

**Remarque**

Ce résultat est admis. Tu l'utilises sans le démontrer cette année.

**Méthode : Trouver le centre et les axes**

1. **Le centre.** Les diagonales se croisent en un point : c'est le centre de symétrie.
2. **Les axes.** Décalque la figure. Plie le calque selon la droite à tester. Si les deux parties se recouvrent, cette droite est un axe.
3. **Compter.** Un carré a quatre axes. Un rectangle non carré en a deux, comme un losange non carré.

**Exemple : Une nappe**

Une nappe rectangulaire mesure $1{,}6$ m sur $1{,}2$ m : ce n'est pas un carré.

Plie-la en deux dans le sens de la longueur, puis dans l'autre sens. À chaque fois, les bords se recouvrent. Ces deux plis sont ses deux axes de symétrie.

Le point où ses diagonales se coupent est son centre de symétrie. Un mouchoir carré, lui, a quatre axes.

**Méthode : Construire à partir des diagonales**

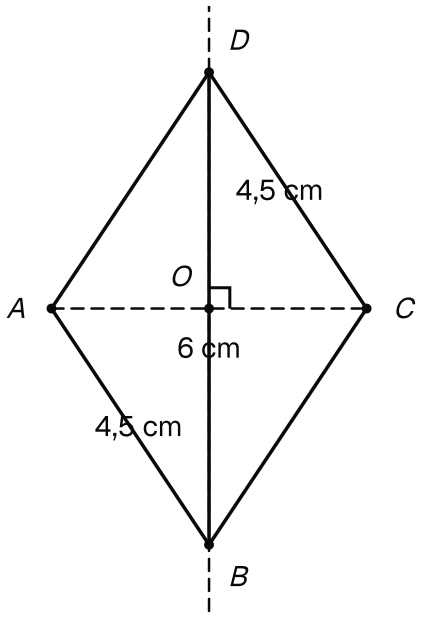
1. **Tracer une diagonale.** Marque son milieu $O$.
2. **Tracer l'autre diagonale** sur une autre droite, avec le même milieu $O$. Tu obtiens un parallélogramme.

3. **Choisir selon la figure voulue.** Même longueur : rectangle. Perpendiculaires : losange. Les deux : carré.
4. **Justifier.** Nomme la propriété qui garantit la figure.

**Exemple : Un losange tracé à partir de ses diagonales**

On veut un losange $ABCD$ dont les diagonales mesurent $6$ cm et $9$ cm.

1. Trace $[AC]$ de $6$ cm. Place son milieu $O$, à $3$ cm de $A$.
2. À l'équerre, trace la perpendiculaire à $(AC)$ en $O$. Place sur elle $B$ et $D$, de chaque côté de $O$, avec $OB = OD = 4{,}5$ cm.
3. Les diagonales ont le même milieu : $ABCD$ est un parallélogramme. Elles sont perpendiculaires : c'est un losange.




**Le losange du résumé : [AC] de 6 cm, la perpendiculaire en son milieu O, puis B et D à 4,5 cm de O.**

## Tableau et erreurs à éviter

**À retenir : Tableau récapitulatif**

| | Rectangle | Losange | Carré |
|---|---|---|---|
| Côtés | opposés de même longueur | quatre côtés égaux | quatre côtés égaux |
| Angles | quatre angles droits | pas forcément droits | quatre angles droits |

| | Rectangle | Losange | Carré |
|---|---|---|---|
| Diagonales | même longueur, même milieu | perpendiculaires, même milieu | même longueur, perpendiculaires, même milieu |
| Centre de symétrie | point commun des diagonales | point commun des diagonales | point commun des diagonales |
| Axes de symétrie | deux : médiatrices des côtés | deux : les diagonales | quatre |

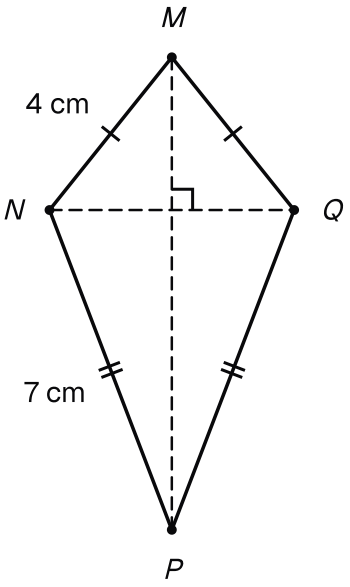
Pour le rectangle et le losange, le nombre d'axes vaut pour une figure qui n'est pas un carré.

**Attention : Des diagonales perpendiculaires ne suffisent pas**

Le quadrilatère $MNPQ$ a $MN = MQ = 4$ cm et $PN = PQ = 7$ cm, avec $M$ et $P$ de part et d'autre de $(NQ)$ : il a la forme d'un **cerf-volant**.

Ses diagonales $[MP]$ et $[NQ]$ sont perpendiculaires. Pourtant $MN \neq NP$ : ce n'est pas un losange.

Vérifie d'abord que la figure est un parallélogramme.



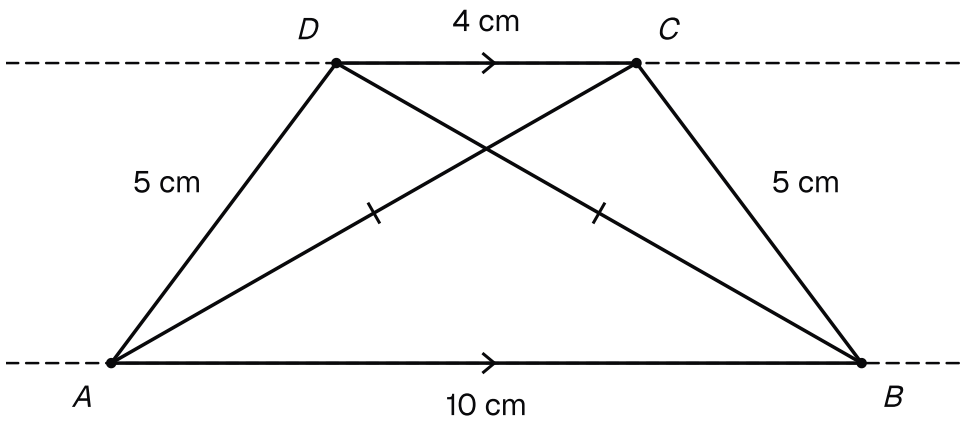

**Le cerf-volant MNPQ : diagonales perpendiculaires, mais MN = 4 cm et NP = 7 cm, donc pas un losange.**

**Attention : Des diagonales de même longueur ne suffisent pas**

Dans le trapèze $ABCD$, les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles. On a $AB = 10$ cm, $DC = 4$ cm et $AD = BC = 5$ cm.

Ses diagonales ont la même longueur. Pourtant, aucun de ses angles n'est droit.

Leurs milieux sont deux points distincts. Le trapèze n'est donc pas un parallélogramme.




**Le trapèze ABCD du résumé : AB = 10 cm, DC = 4 cm, AD = BC = 5 cm, et deux diagonales de même longueur.**

**Attention : Un carré est un rectangle**

Une dalle carrée a quatre angles droits : c'est donc un rectangle. C'est aussi un losange.

La phrase « c'est un carré, donc ce n'est pas un rectangle » est fausse. À l'inverse, un rectangle dont deux côtés consécutifs sont différents n'est pas un carré.

**Attention : Les diagonales d'un rectangle ne sont pas des axes**

Prends une feuille de $21$ cm sur $29{,}7$ cm. Plie-la le long d'une diagonale. Les deux parties ne se recouvrent pas.

Cette diagonale n'est donc pas un axe de symétrie. Les axes de la feuille sont les médiatrices de ses côtés.

**Attention : La position ne change pas la nature**

Un carreau carré posé sur un coin reste un carré : ses angles restent droits. Un losange dessiné « debout » reste aussi un losange.

Attention : les diagonales d'un losange n'ont pas forcément la même longueur. Quand elles sont égales, le losange est un carré.