BURHAN

Quadrilatères particuliers : exercices, niveau examen

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/quadrilateres-particuliers/exercices/examen

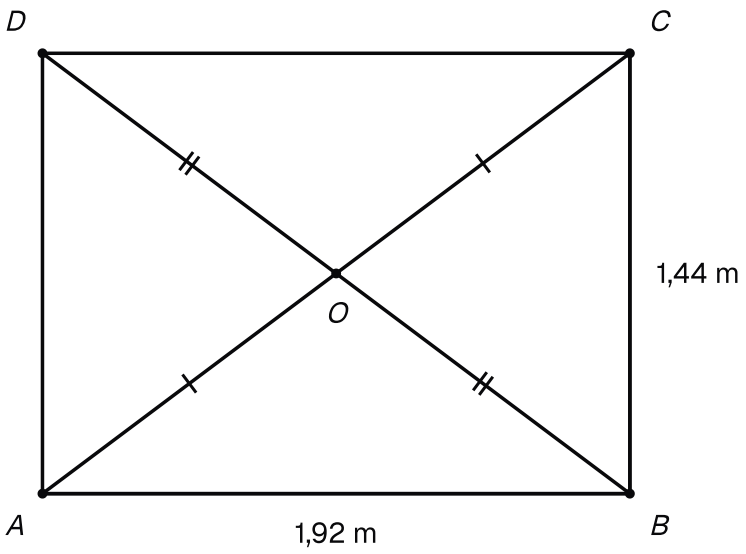
Chapitre	Palier	Exercices
Quadrilatères particuliers	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Le portail du jardin

Un portail a la forme d'un quadrilatère $ABCD$. Ses deux barres de renfort $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu O. Elles mesurent chacune $2{,}4$ m.

On mesure aussi $AB = 1{,}92$ m et $BC = 1{,}44$ m.



Le portail ABCD : barres [AC] et [BD] de 2,4 m de même milieu O, AB = 1,92 m et BC = 1,44 m.

1. 1 pts

Justifie que $ABCD$ est un parallélogramme.

INDICE

Outil : les barres sont les diagonales du portail. Que sais-tu de leur milieu ?

CORRIGÉ

Les deux barres de renfort sont les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du portail. Elles ont le même milieu O.

D'après la propriété « si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme » (rappel), $ABCD$ est un parallélogramme.

Conclusion. Le portail $ABCD$ est un parallélogramme.

2. 1,5 pts

Déduis-en que $ABCD$ est un rectangle.

INDICE

Outil : les deux barres ont la même longueur. Cherche la propriété admise sur un parallélogramme aux diagonales égales.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $ABCD$ est un parallélogramme. Ses diagonales ont la même longueur : $AC = BD = 2{,}4$ m.

D'après la propriété du parallélogramme aux diagonales de même longueur (admise), $ABCD$ est un rectangle.

Conclusion. Le portail $ABCD$ est un rectangle.

3. 1,5 pts

Donne les longueurs CD et DA. Justifie.

INDICE

Outil : un rectangle est un parallélogramme : pense à ses côtés opposés.

CORRIGÉ

D'après la propriété « le rectangle est un parallélogramme », les côtés opposés de $ABCD$ ont la même longueur.

Ainsi $CD = AB = 1{,}92$ m et $DA = BC = 1{,}44$ m.

Conclusion. Le côté $[CD]$ mesure $1{,}92$ m et le côté $[DA]$ mesure $1{,}44$ m.

4. 1 pts

Sur ton cahier, trace le portail à l'échelle : 1 cm sur le dessin pour 20 cm en vrai. Quelles longueurs traces-tu pour les barres et pour $[AB]$?

INDICE

Début : convertis en centimètres : $2{,}4$ m $= 240$ cm et $1{,}92$ m $= 192$ cm. Divise ensuite par 20.

CORRIGÉ

Barres. Une barre mesure $2{,}4$ m, soit 240 cm. Sur le dessin, elle mesure $240 \div 20 = 12$ cm.

Côté $[AB]$. Il mesure $1{,}92$ m, soit 192 cm. Sur le dessin, il mesure $192 \div 20 = 9{,}6$ cm.

Tracé. Trace $[AC]$ de 12 cm et marque son milieu O. La diagonale $[BD]$ mesure aussi 12 cm et a pour milieu O. Au compas, place donc B à 6 cm de O et à $9{,}6$ cm de A. Trace la droite (BO) et place D sur elle, de l'autre côté de O, avec $OD = 6$ cm.

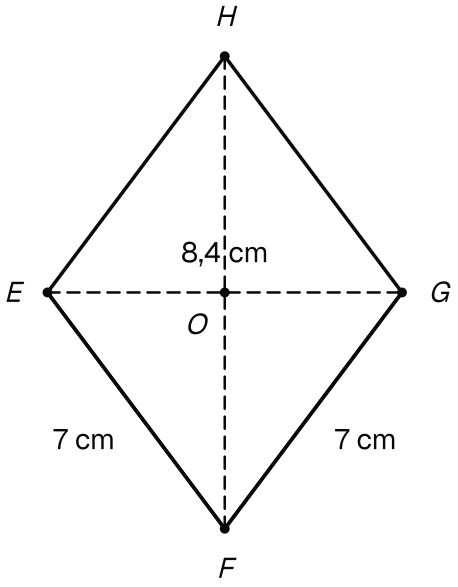
Conclusion. Sur le dessin, chaque barre mesure 12 cm et le côté $[AB]$ mesure $9{,}6$ cm.

Exercice 2 — 5 pts

Une pièce de vitrail

Une pièce de vitrail est un parallélogramme $EFGH$. On sait que $EF = FG = 7$ cm.

Ses diagonales se coupent en O. Elles mesurent $EG = 8{,}4$ cm et $FH = 11{,}2$ cm.



La pièce de vitrail EFGH : EF = FG = 7 cm, et des diagonales de 8,4 cm et de 11,2 cm qui se coupent en O.

1. — 1 pts

Justifie que $EFGH$ est un losange.

INDICE

Outil : $[EF]$ et $[FG]$ ont le sommet F en commun.

CORRIGÉ

Les côtés $[EF]$ et $[FG]$ ont le sommet F en commun : ils sont consécutifs. Ils mesurent tous deux 7 cm.

D'après la propriété du parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux, $EFGH$ est un losange.

Conclusion. La pièce de vitrail $EFGH$ est un losange.

2. 1,5 pts

Que peux-tu dire des droites (EG) et (FH) ? Calcule OE et OF.

INDICE

Outil : la propriété des diagonales du losange donne deux renseignements.

CORRIGÉ

D'après la propriété des diagonales du losange, les droites (EG) et (FH) sont perpendiculaires : $(EG) \perp (FH)$.

La même propriété dit que O est le milieu de chaque diagonale. Donc $OE = 8{,}4 \div 2 = 4{,}2$ cm et $OF = 11{,}2 \div 2 = 5{,}6$ cm.

Conclusion. Les droites (EG) et (FH) sont perpendiculaires ; OE mesure $4{,}2$ cm et OF mesure $5{,}6$ cm.

3. 1,5 pts

Ce losange est-il un carré ? Justifie.

INDICE

Point délicat : les diagonales d'un carré ont une propriété de plus. Laquelle ?

CORRIGÉ

Non. Supposons que $EFGH$ soit un carré. D'après la propriété « le carré est un rectangle et un losange », ce serait un rectangle. D'après la propriété des diagonales du rectangle (admise), ses diagonales auraient la même longueur.

Or $EG = 8{,}4$ cm et $FH = 11{,}2$ cm, donc $EG \neq FH$.

Conclusion. Le losange $EFGH$ n'est pas un carré.

4. 1 pts

Nomme le centre de symétrie et les axes de symétrie de cette pièce.

INDICE

Outil : la propriété du centre et des axes de symétrie est admise. Le losange n'est pas un carré.

CORRIGÉ

D'après la propriété du centre et des axes de symétrie (admise), le centre de symétrie d'un losange est le point commun de ses diagonales : ici, c'est O.

D'après la question 3, ce losange n'est pas un carré. La même propriété lui donne alors deux axes : ses diagonales (EG) et (FH).

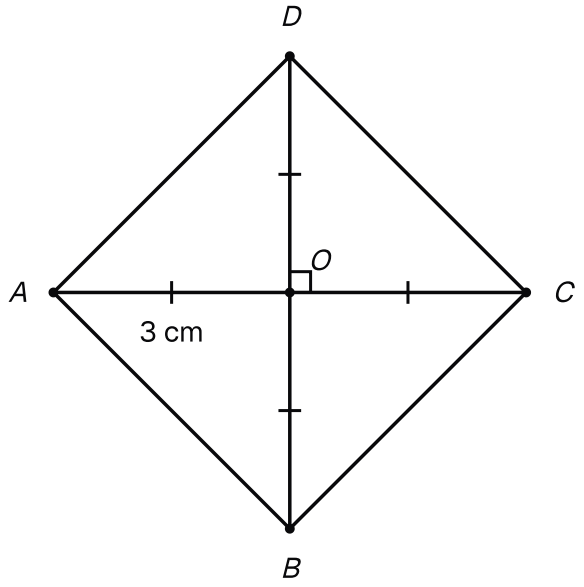
Conclusion. Le centre de symétrie de la pièce est O ; ses deux axes sont les droites (EG) et (FH).

Exercice 3 — 5 pts

Un dessous de verre

Sur le plan d'un dessous de verre $ABCD$, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O.

On lit $OA = OB = OC = OD = 3$ cm. À l'équerre, on vérifie que $(AC) \perp (BD)$.



Le dessous de verre ABCD : OA = OB = OC = OD = 3 cm, et des diagonales perpendiculaires en O.

1. — 1 pts

Justifie que $ABCD$ est un parallélogramme.

INDICE

Outil : $OA = OC$ et $OB = OD$: le point O est le milieu de quels segments ?

CORRIGÉ

Les diagonales se coupent en O. On a $OA = OC$: O est le milieu de $[AC]$. On a $OB = OD$: O est le milieu de $[BD]$.

D'après la propriété « si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme » (rappel), $ABCD$ est un parallélogramme.

Conclusion. Le dessous de verre $ABCD$ est un parallélogramme.

2. 1,5 pts

Calcule AC et BD. Déduis-en que $ABCD$ est un rectangle.

INDICE

Début : $AC = OA + OC$.

Ensuite : cherche la propriété admise sur un parallélogramme aux diagonales égales.

CORRIGÉ

Le point O est sur chaque diagonale, entre ses deux extrémités. On a $AC = 3 + 3 = 6$ cm et $BD = 3 + 3 = 6$ cm.

Le parallélogramme $ABCD$ a des diagonales de même longueur. D'après la propriété du parallélogramme aux diagonales de même longueur (admise), $ABCD$ est un rectangle.

Conclusion. Les diagonales mesurent 6 cm chacune, et $ABCD$ est un rectangle.

3. 1,5 pts

Justifie que $ABCD$ est aussi un losange. Déduis-en sa nature exacte.

INDICE

Outil : un renseignement de l'énoncé n'a pas encore servi.

Ensuite : un rectangle qui est aussi un losange : relis la définition du carré.

CORRIGÉ

Losange. L'énoncé donne $(AC) \perp (BD)$: les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont perpendiculaires. D'après la propriété du parallélogramme aux diagonales perpendiculaires, c'est un losange.

Carré. D'après la question 2, $ABCD$ est aussi un rectangle. Il a donc quatre angles droits et quatre côtés de même longueur. D'après la définition du carré, c'est un carré.

Conclusion. Le quadrilatère $ABCD$ est un losange, et sa nature exacte est celle d'un carré.

4. 1 pts

Sur ta figure, tu mesures AB : environ $4{,}2$ cm. Sans mesurer, donne BC, CD et DA. Justifie.

INDICE

Outil : relis la définition du carré.

CORRIGÉ

D'après la question 3, $ABCD$ est un carré. D'après la définition du carré, ses quatre côtés ont la même longueur.

Donc $BC = CD = DA = AB$, soit environ $4{,}2$ cm.

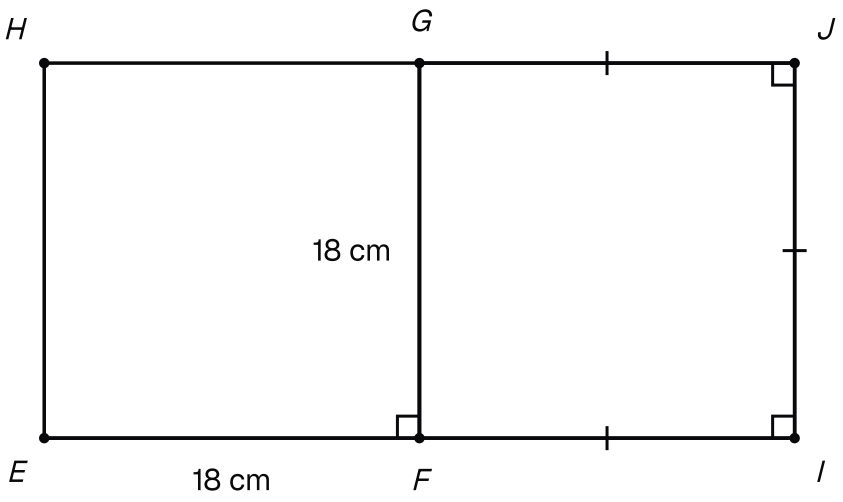
Conclusion. Sans mesurer, les côtés $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ mesurent chacun environ $4{,}2$ cm.

Exercice 4 5 pts

Deux plaques côte à côte

Une plaque de liège est un parallélogramme $EFGH$. À l'équerre, on vérifie que l'angle $\widehat{F}$ est droit. On mesure $EF = FG = 18$ cm.

On pose contre elle une seconde plaque, le carré $FIJG$ de 18 cm de côté. Les deux plaques ont en commun le côté $[FG]$. Les points E, F et I sont alignés dans cet ordre, ainsi que les points H, G et J.



Les deux plaques : le parallélogramme EFGH, d'angle droit en F, et le carré FIJG de 18 cm, accolés le long de [FG].

1. 1 pts

Justifie que $EFGH$ est un rectangle.

INDICE

Outil : $EFGH$ est un parallélogramme. Un seul angle droit suffit-il ?

CORRIGÉ

D'après l'énoncé, $EFGH$ est un parallélogramme, et son angle $\widehat{F}$ est droit.

D'après la propriété « un parallélogramme avec un angle droit est un rectangle », $EFGH$ est un rectangle.

Conclusion. La plaque $EFGH$ est un rectangle.

2. 1,5 pts

Déduis-en que $EFGH$ est un carré. Donne GH et HE.

INDICE

Outil : les côtés $[EF]$ et $[FG]$ ont le sommet F en commun. Pour un rectangle, quelle propriété en tire un carré ?

CORRIGÉ

D'après la question 1, $EFGH$ est un rectangle. Ses côtés $[EF]$ et $[FG]$ sont consécutifs et de même longueur : $EF = FG = 18$ cm.

D'après la propriété du rectangle ayant deux côtés consécutifs égaux, $EFGH$ est un carré.

D'après la définition du carré, ses quatre côtés ont la même longueur : $GH = HE = 18$ cm.

Conclusion. La plaque $EFGH$ est un carré, et ses côtés $[GH]$ et $[HE]$ mesurent 18 cm.

3. 1,5 pts

Justifie que le grand quadrilatère $EIJH$ est un rectangle. Calcule EI et IJ.

INDICE

Début : le côté $[EI]$ est sur la droite (EF), et le côté $[HJ]$ sur la droite (HG). Cherche trois angles droits de $EIJH$ parmi les angles des deux carrés.

CORRIGÉ

Angle en E. Les côtés $[EI]$ et $[EH]$ de $EIJH$ sont portés par les droites (EF) et (EH). Ces droites sont perpendiculaires, car l'angle $\widehat{E}$ du carré $EFGH$ est droit. L'angle de $EIJH$ en E est donc droit.

Angles en I et en J. Le côté $[IE]$ passe par F, et le côté $[JH]$ passe par G. Les angles de $EIJH$ en I et en J sont donc ceux du carré $FIJG$: ils sont droits.

Nature. On connaît donc trois angles droits de $EIJH$. D'après la propriété des trois angles droits, le grand quadrilatère est donc un rectangle.

Longueurs. Le point F est entre E et I, donc $EI = EF + FI = 18 + 18 = 36$ cm et $IJ = 18$ cm, côté du carré $FIJG$.

Conclusion. Le grand quadrilatère $EIJH$ est un rectangle, avec $EI = 36$ cm et $IJ = 18$ cm.

4. 1 pts

Justifie que la droite (FG) est un axe de symétrie du rectangle $EIJH$.

INDICE

Point délicat : le point F est le milieu de quel côté de $EIJH$? Relis la définition de la médiatrice.

CORRIGÉ

Médiatrice de $[EI]$. On a $EF = FI = 18$ cm, et F est sur $[EI]$: F est le milieu de $[EI]$. De plus, $(FG) \perp (EI)$, car l'angle $\widehat{EFG}$ du carré est droit. D'après la définition de la médiatrice (rappel), (FG) est la médiatrice de $[EI]$.

Axes du rectangle. Le rectangle $EIJH$ n'est pas un carré : ses côtés consécutifs $[EI]$ et $[IJ]$ mesurent 36 cm et 18 cm, et $36 \neq 18$. D'après la propriété du centre et des axes de symétrie (admise), ses axes sont les médiatrices de ses côtés.

Conclusion. La droite (FG), médiatrice du côté $[EI]$, est un axe de symétrie du rectangle $EIJH$.

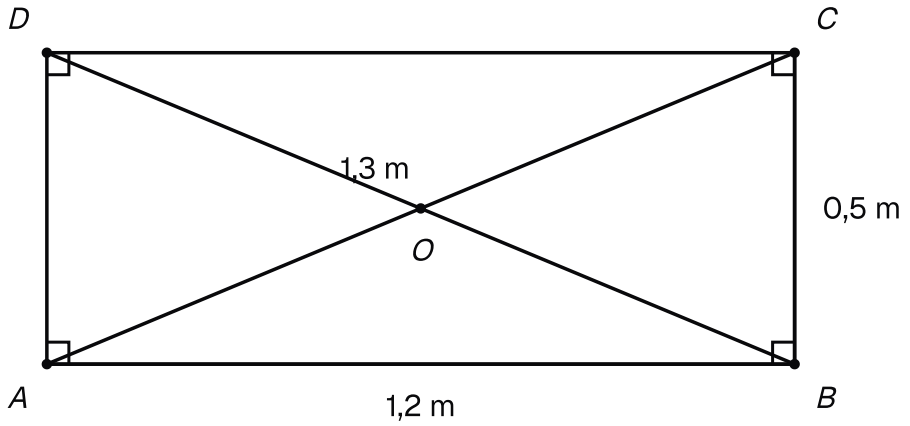
Exercice 5

5 pts

Un panneau d'affichage

Un panneau d'affichage est un rectangle $ABCD$. Ses diagonales se coupent en O.

On mesure $AB = 1{,}2$ m, $BC = 0{,}5$ m et la diagonale $AC = 1{,}3$ m.



Le panneau ABCD : AB = 1,2 m, BC = 0,5 m, la diagonale AC = 1,3 m, et les diagonales qui se coupent en O.

1.

1 pts

Donne AD et BD. Justifie.

INDICE

Outil : pour AD, pense aux côtés opposés. Pour BD, cherche la propriété admise des diagonales du rectangle.

CORRIGÉ

D'après la propriété « le rectangle est un parallélogramme », les côtés opposés $[AD]$ et $[BC]$ ont la même longueur : $AD = BC = 0{,}5$ m.

D'après la propriété des diagonales du rectangle (admise), $BD = AC = 1{,}3$ m.

Conclusion. On trouve $AD = 0{,}5$ m et $BD = 1{,}3$ m.

2. 1,5 pts

Ce panneau est-il un losange ? Est-il un carré ? Justifie.

INDICE

Outil : compare deux côtés consécutifs, par exemple $[AB]$ et $[BC]$. Ensuite, demande-toi si un carré est toujours un losange.

CORRIGÉ

Non. Ce panneau n'est ni un losange, ni un carré.

Losange. Les côtés consécutifs $[AB]$ et $[BC]$ mesurent $1{,}2$ m et $0{,}5$ m, et $1{,}2 \neq 0{,}5$. D'après la définition du losange, il faudrait quatre côtés de même longueur : $ABCD$ n'est pas un losange.

Carré. D'après la propriété « le carré est un rectangle et un losange », tout carré est un losange. Comme $ABCD$ n'est pas un losange, ce n'est pas un carré non plus.

Conclusion. Le panneau $ABCD$ n'est pas un losange, et il n'est pas un carré.

3. 1,5 pts

Léa décalque le panneau. Elle plie le calque le long de la diagonale (AC). Les deux moitiés se recouvrent-elles ? Justifie.

INDICE

Point délicat : pendant le pliage, le point A ne bouge pas. Sur quel côté le côté $[AB]$ devrait-il tomber ?

CORRIGÉ

Non. Le point A est sur le pli : il reste en place.

Si les deux moitiés se recouvraient, le côté $[AB]$ tomberait sur l'autre côté qui part de A, le côté $[AD]$. On aurait alors $AB = AD$.

Or $AB = 1{,}2$ m et, d'après la propriété « le rectangle est un parallélogramme », $AD = BC = 0{,}5$ m. Comme $1{,}2 \neq 0{,}5$, on n'a pas $AB = AD$.

Conclusion. Les moitiés ne se recouvrent pas : la diagonale (AC) n'est pas un axe de symétrie du panneau.

4. 1 pts

Où Léa doit-elle plier le calque pour que les deux moitiés se recouvrent ? Donne les deux plis possibles. Précise à quelle distance de A l'un coupe $[AB]$, et à quelle distance de B l'autre coupe $[BC]$.

INDICE

Outil : $ABCD$ est un rectangle qui n'est pas un carré. Relis la propriété du centre et des axes de symétrie.

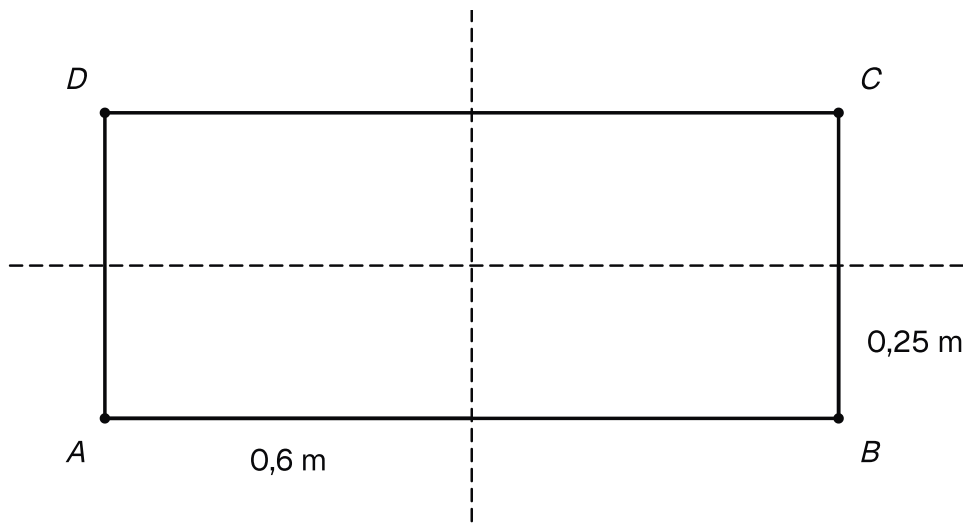
CORRIGÉ

D'après la question 2, $ABCD$ est un rectangle qui n'est pas un carré. D'après la propriété du centre et des axes de symétrie (admise), ses axes sont les médiatrices de ses côtés : il y en a deux.

Premier pli. C'est la médiatrice de $[AB]$. Elle coupe $[AB]$ en son milieu, à $1{,}2 \div 2 = 0{,}6$ m de A.

Second pli. C'est la médiatrice de $[BC]$. Elle coupe $[BC]$ en son milieu, à $0{,}5 \div 2 = 0{,}25$ m de B.

Conclusion. Léa doit plier le calque le long de la médiatrice de $[AB]$, à $0{,}6$ m de A, ou le long de la médiatrice de $[BC]$, à $0{,}25$ m de B.



Les deux plis de Léa : la médiatrice de [AB], à 0,6 m de A, et la médiatrice de [BC], à 0,25 m de B.