BURHAN

Quadrilatères particuliers : exercices, entraînement

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/quadrilateres-particuliers/exercices/entrainement

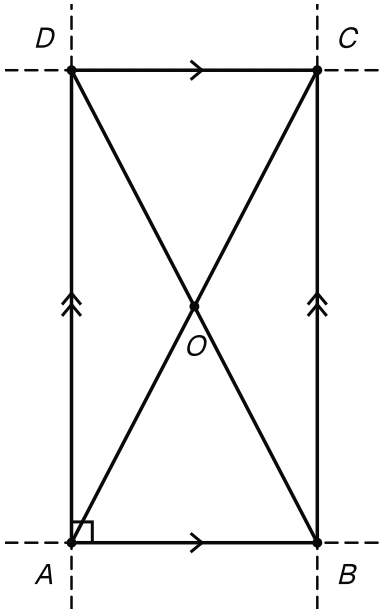
Chapitre	Palier	Exercices
Quadrilatères particuliers	Entraînement	7

Exercice 1

Le cadre d'une porte

Un menuisier assemble le cadre $ABCD$ d'une porte. Ses diagonales se coupent en O.

Il vérifie que $(AB) \parallel (DC)$ et que $(AD) \parallel (BC)$. Puis il vérifie à l'équerre que l'angle $\widehat{A}$ est droit.



Le cadre de porte ABCD : côtés opposés parallèles, angle droit en A, diagonales qui se coupent en O.

1.

Justifie que $ABCD$ est un parallélogramme.

INDICE

Outil : compte les paires de côtés opposés parallèles.

CORRIGÉ

On sait que $(AB) \parallel (DC)$ et que $(AD) \parallel (BC)$: les côtés opposés de $ABCD$ sont parallèles deux à deux.

D'après la définition du parallélogramme, $ABCD$ est un parallélogramme.

Conclusion. Le cadre $ABCD$ est un parallélogramme.

2.

Déduis-en que $ABCD$ est un rectangle.

INDICE

Outil : cherche la propriété d'un parallélogramme qui a un angle droit.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $ABCD$ est un parallélogramme. Son angle $\widehat{A}$ mesure $90°$.

D'après la propriété « un parallélogramme avec un angle droit est un rectangle », $ABCD$ est un rectangle.

Conclusion. Le cadre $ABCD$ est un rectangle.

3.

Il mesure la diagonale : $AC = 2{,}3$ m. Quelle longueur doit-il trouver pour BD ? Et pour OB ?

INDICE

Outil : la propriété des diagonales du rectangle est admise.

Point délicat : O est le milieu de $[BD]$, et pas seulement de $[AC]$.

CORRIGÉ

D'après la propriété des diagonales du rectangle (admise), les deux diagonales ont la même longueur : $BD = AC = 2{,}3$ m.

La même propriété dit aussi qu'elles ont le même milieu O. Donc OB est la moitié de BD : $OB = 2{,}3 \div 2 = 1{,}15$ m.

Conclusion. Le menuisier doit trouver $2{,}3$ m pour BD et $1{,}15$ m pour OB.

4.

Le lendemain, un autre cadre a des diagonales de $2{,}3$ m et de $2{,}25$ m. Ce cadre peut-il être un rectangle ?

INDICE

Début : imagine que ce cadre soit un rectangle. Que dirait la propriété des diagonales ?

CORRIGÉ

Non. Supposons que ce cadre soit un rectangle. D'après la propriété des diagonales du rectangle (admise), ses deux diagonales auraient alors la même longueur.

Or elles mesurent $2{,}3$ m et $2{,}25$ m, et $2{,}3 \neq 2{,}25$.

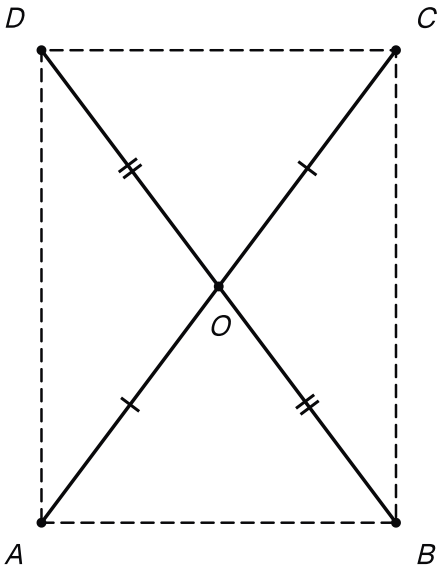
Conclusion. Ce second cadre ne peut pas être un rectangle.

Exercice 2

Deux baguettes croisées

Pour fabriquer une étagère, Ilyas cloue deux lattes $[AC]$ et $[BD]$ de 90 cm chacune. Elles se croisent en leur milieu commun O.

Il pose une planche sur les quatre bouts des lattes. Les bouts forment le quadrilatère $ABCD$.



Les lattes [AC] et [BD] d'Ilyas, de 90 cm chacune, croisées en leur milieu commun O ; la planche repose sur A, B, C et D.

1.

Justifie que $ABCD$ est un parallélogramme.

INDICE

Outil : rappel : si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, c'est un parallélogramme.

CORRIGÉ

Les lattes $[AC]$ et $[BD]$ sont les diagonales de $ABCD$. Elles se croisent en leur milieu commun O.

D'après la propriété « si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme » (rappel), $ABCD$ est un parallélogramme.

Conclusion. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

2.

Déduis-en la nature exacte de $ABCD$.

INDICE

Outil : les deux lattes ont la même longueur. Cherche la propriété admise qui utilise ce renseignement.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $ABCD$ est un parallélogramme. Ses diagonales ont la même longueur : $AC = BD = 90$ cm.

D'après la propriété du parallélogramme aux diagonales de même longueur (admise), $ABCD$ est un rectangle.

Conclusion. La nature exacte de $ABCD$: c'est un rectangle.

3.

Ilyas mesure $AB = 54$ cm et $BC = 72$ cm. Donne CD et DA.

INDICE

Outil : un rectangle est un parallélogramme. Pense aux côtés opposés.

CORRIGÉ

D'après la propriété « le rectangle est un parallélogramme », $ABCD$ est un parallélogramme. Ses côtés opposés ont donc la même longueur.

On en tire $CD = AB = 54$ cm et $DA = BC = 72$ cm.

Conclusion. Le côté $[CD]$ mesure 54 cm et le côté $[DA]$ mesure 72 cm.

4.

Sara cloue deux lattes de 90 cm, mais elles ne se croisent pas en leur milieu. Peut-elle obtenir un rectangle ?

INDICE

Point délicat : un rectangle est un parallélogramme. Que sais-tu alors de ses diagonales ?

CORRIGÉ

Non, jamais. Supposons que $ABCD$ soit un rectangle. D'après la propriété « le rectangle est un parallélogramme », ce serait un parallélogramme : ses diagonales auraient le même milieu.

Or les lattes, qui sont ses diagonales, ne se croisent pas en leur milieu. Donc $ABCD$ n'est pas un rectangle.

Sara peut par exemple obtenir un trapèze avec $AB = 84$ cm, $DC = 24$ cm et $AD = BC = 78$ cm. Ses diagonales mesurent 90 cm, mais aucun de ses angles n'est droit.

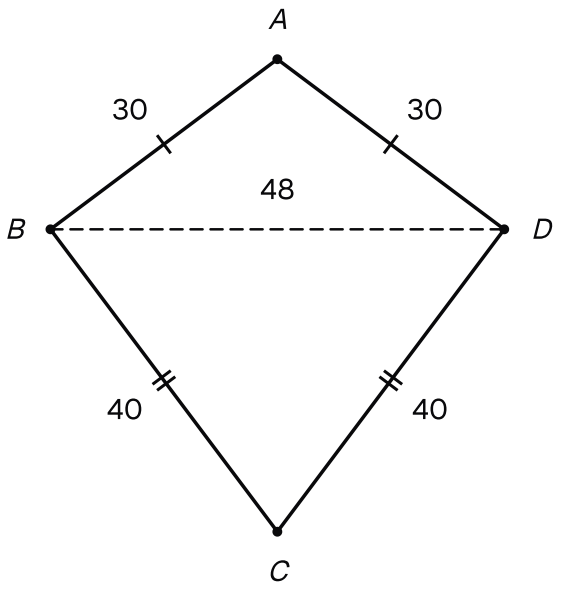
Conclusion. Sara ne peut pas obtenir un rectangle : deux lattes de même longueur ne suffisent pas, il faut aussi qu'elles se croisent en leur milieu.

Exercice 3

Le cerf-volant de Yassine

Yassine construit un cerf-volant $ABCD$. On a $AB = AD = 30$ cm, $CB = CD = 40$ cm et $BD = 48$ cm.

Les points A et C sont de part et d'autre de la droite (BD). Trace la figure à l'échelle, en divisant chaque longueur par 10 : commence par $[BD]$, puis place A et C au compas.



Le cerf-volant de Yassine, longueurs en centimètres : AB = AD = 30, CB = CD = 40 et BD = 48.

1.

Justifie que A et C sont sur la médiatrice de $[BD]$.

INDICE

Outil : rappel : un point situé à la même distance des deux extrémités d'un segment est sur sa médiatrice.

CORRIGÉ

On a $AB = AD$: le point A est à la même distance de B et de D. D'après la propriété de la médiatrice, A est sur la médiatrice de $[BD]$.

On a aussi $CB = CD$: pour la même raison, C est sur cette médiatrice.

Conclusion. Les points A et C sont tous les deux sur la médiatrice de $[BD]$.

2.

Déduis-en que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires.

INDICE

Début : deux points distincts sont sur une seule droite.

CORRIGÉ

Les points A et C sont distincts, et tous les deux sur la médiatrice de $[BD]$. Une seule droite passe par deux points distincts : cette médiatrice est donc la droite (AC).

D'après la définition de la médiatrice, elle est perpendiculaire à $[BD]$. Donc $(AC) \perp (BD)$.

Conclusion. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du cerf-volant sont perpendiculaires.

3.

Ce cerf-volant est-il un losange ? Explique pourquoi la propriété du parallélogramme aux diagonales perpendiculaires ne s'applique pas ici.

INDICE

Point délicat : compare AB et BC. Relis ensuite le début de la propriété.

CORRIGÉ

Non. On a $AB = 30$ cm et $BC = 40$ cm : les quatre côtés n'ont pas tous la même longueur. D'après la définition du losange, $ABCD$ n'est pas un losange.

La propriété du parallélogramme aux diagonales perpendiculaires ne vaut que pour un parallélogramme. Or $ABCD$ n'en est pas un : ses côtés opposés $[AB]$ et $[CD]$ n'ont pas la même longueur.

Conclusion. Ce cerf-volant n'est pas un losange. Ses diagonales sont perpendiculaires, mais la propriété ne s'applique pas, car il n'est pas un parallélogramme.

Exercice 4

Un pendentif en losange

Un pendentif est un losange $EFGH$ de centre O. Ses diagonales mesurent $EG = 5$ cm et $FH = 12$ cm.

1.

Calcule OE et OF.

INDICE

Outil : les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu.

CORRIGÉ

D'après la propriété des diagonales du losange, O est le milieu de $[EG]$ et de $[FH]$.

Donc $OE = 5 \div 2 = 2{,}5$ cm et $OF = 12 \div 2 = 6$ cm.

Conclusion. On trouve $OE = 2{,}5$ cm et $OF = 6$ cm.

2.

Décris la construction du pendentif avec la règle, l'équerre et le compas. Justifie qu'elle donne bien un losange.

INDICE

Début : commence par $[EG]$ et son milieu.

Ensuite : les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

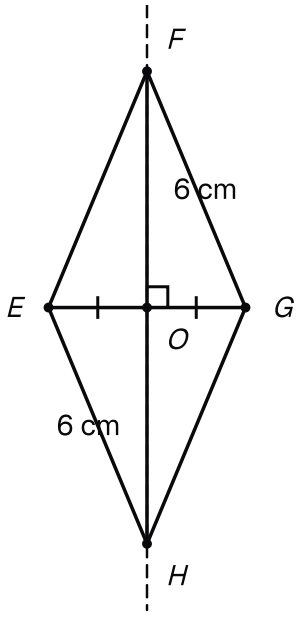
CORRIGÉ

Construction. Trace $[EG]$ de 5 cm et marque son milieu O. À l'équerre, trace la perpendiculaire à (EG) qui passe par O. Au compas, place F et H sur cette droite, de chaque côté de O, à 6 cm de O.

Parallélogramme. Les diagonales $[EG]$ et $[FH]$ ont le même milieu O. D'après la propriété « si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme » (rappel), $EFGH$ est un parallélogramme.

Losange. Ces diagonales sont perpendiculaires. D'après la propriété du parallélogramme aux diagonales perpendiculaires, $EFGH$ est un losange.

Conclusion. Cette construction donne bien le losange $EFGH$, avec $EG = 5$ cm et $FH = 12$ cm.



La construction du pendentif : [EG] de 5 cm, la perpendiculaire en son milieu O, puis F et H à 6 cm de O.

3.

Ce losange est-il un carré ? Justifie.

INDICE

Point délicat : compare EG et FH. Un carré est un rectangle : que dit-on de ses diagonales ?

CORRIGÉ

Non. Supposons que $EFGH$ soit un carré. D'après la propriété « le carré est un rectangle et un losange », ce serait un rectangle.

D'après la propriété des diagonales du rectangle (admise), ses diagonales auraient alors la même longueur.

Or $EG = 5$ cm et $FH = 12$ cm, et $5 \neq 12$.

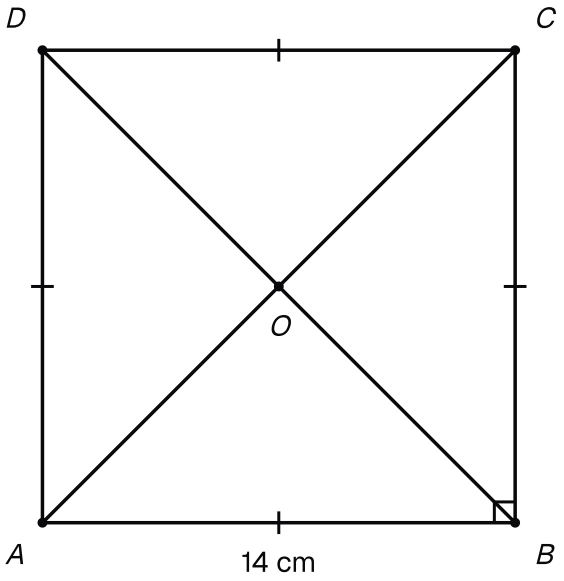
Conclusion. Ce losange n'est pas un carré.

Exercice 5

Un carreau du carrelage

Dans un carrelage, Amine observe un carreau $ABCD$. Ses quatre côtés mesurent 14 cm.

À l'équerre, il vérifie que l'angle $\widehat{B}$ est droit. Les diagonales se coupent en O.



Le carreau d'Amine : quatre côtés de 14 cm, l'angle en B codé droit, et les diagonales qui se croisent en O.

1.

Quelle est la nature de $ABCD$? Justifie en deux étapes.

INDICE

Début : quatre côtés égaux : quelle famille ?

Ensuite : ajoute l'angle droit.

CORRIGÉ

Losange. Les quatre côtés de $ABCD$ mesurent 14 cm. D'après la définition du losange, $ABCD$ est un losange.

Carré. Ce losange a un angle droit, l'angle $\widehat{B}$. D'après la propriété pour reconnaître un carré, $ABCD$ est un carré.

Conclusion. Le carreau $ABCD$ est un carré.

2.

Amine mesure AC et trouve environ $19{,}8$ cm. Que vaut BD ? Que vaut OB ?

INDICE

Outil : un carré est un rectangle. Pense aux diagonales du rectangle.

CORRIGÉ

D'après la propriété « le carré est un rectangle et un losange », $ABCD$ est un rectangle. D'après la propriété des diagonales du rectangle (admise), $BD = AC$, soit environ $19{,}8$ cm.

Ces diagonales ont aussi le même milieu O. Donc OB vaut la moitié de BD, soit environ $9{,}9$ cm.

Conclusion. La diagonale $[BD]$ mesure environ $19{,}8$ cm, et OB vaut environ $9{,}9$ cm.

3.

Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$? Justifie.

INDICE

Outil : un carré est aussi un losange.

CORRIGÉ

D'après la propriété « le carré est un rectangle et un losange », $ABCD$ est aussi un losange.

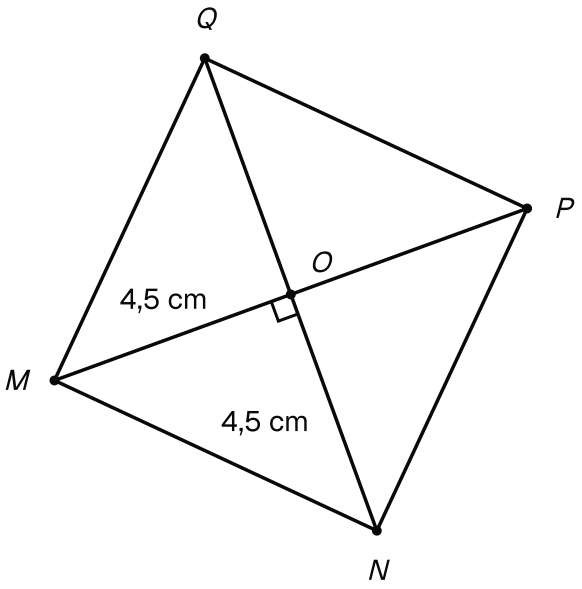
D'après la propriété des diagonales du losange, $(AC) \perp (BD)$. Donc $\widehat{AOB} = 90°$.

Conclusion. L'angle $\widehat{AOB}$ est droit : il mesure $90°$.

Exercice 6

Du parallélogramme au carré

Le parallélogramme $MNPQ$ a pour centre O. On mesure $OM = 4{,}5$ cm et $ON = 4{,}5$ cm. À l'équerre, on vérifie que $(MP) \perp (NQ)$.



Le parallélogramme MNPQ de centre O : OM = 4,5 cm, ON = 4,5 cm, et ses diagonales perpendiculaires.

1.

Calcule MP et NQ.

INDICE

Outil : rappel : les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu.

CORRIGÉ

D'après les propriétés du parallélogramme, O est le milieu de $[MP]$ et de $[NQ]$. Chaque diagonale mesure donc le double de la longueur mesurée depuis O.

Donc $MP = 2 \times 4{,}5 = 9$ cm et $NQ = 2 \times 4{,}5 = 9$ cm.

Conclusion. Les deux diagonales mesurent 9 cm.

2.

Déduis-en que $MNPQ$ est un rectangle.

INDICE

Outil : des diagonales de même longueur dans un parallélogramme.

CORRIGÉ

D'après la question 1, les diagonales du parallélogramme $MNPQ$ ont la même longueur : $MP = NQ = 9$ cm.

D'après la propriété du parallélogramme aux diagonales de même longueur (admise), $MNPQ$ est un rectangle.

Conclusion. Le parallélogramme $MNPQ$ est un rectangle.

3.

Justifie que $MNPQ$ est aussi un losange.

INDICE

Outil : relis l'énoncé : un renseignement n'a pas encore servi.

CORRIGÉ

L'énoncé donne $(MP) \perp (NQ)$: les diagonales du parallélogramme $MNPQ$ sont perpendiculaires.

D'après la propriété du parallélogramme aux diagonales perpendiculaires, $MNPQ$ est un losange.

Conclusion. Le parallélogramme $MNPQ$ est aussi un losange.

4.

Conclus : quelle est la nature exacte de $MNPQ$?

INDICE

Début : un rectangle a quatre angles droits ; un losange a quatre côtés égaux.

CORRIGÉ

D'après les questions 2 et 3, $MNPQ$ est un rectangle et un losange. Il a donc quatre angles droits et quatre côtés de même longueur.

D'après la définition du carré, $MNPQ$ est un carré.

Conclusion. La nature exacte de $MNPQ$: c'est un carré.

Exercice 7

Un carré tracé par ses diagonales

Lina dessine le plan d'un bac à fleurs carré $ABCD$. Sur son plan, les diagonales mesurent 12 cm. Elle a une règle graduée, une équerre et un compas.

1.

Écris sa construction en quatre lignes, une étape par ligne.

INDICE

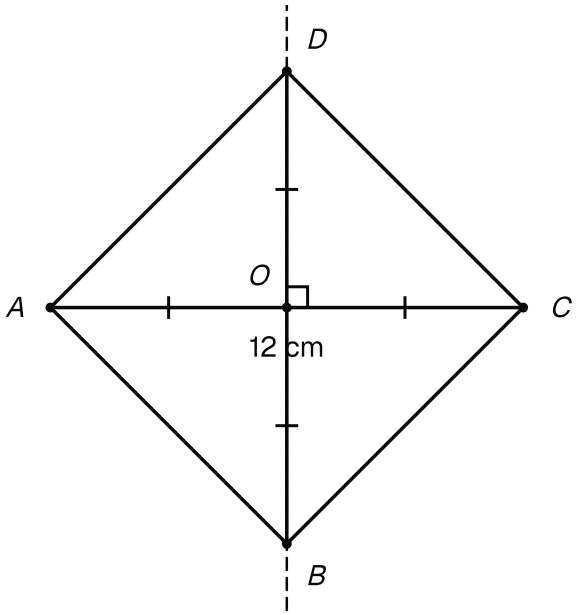
Début : trace $[AC]$ et marque son milieu O.

Ensuite : quelle position pour $[BD]$? Quelle longueur ?

CORRIGÉ

1. Trace $[AC]$ de 12 cm.
2. Marque son milieu O : $OA = OC = 6$ cm.
3. À l'équerre, trace la perpendiculaire à (AC) qui passe par O.
4. Au compas, place B et D sur cette droite, de chaque côté de O, avec $OB = OD = 6$ cm.

Conclusion. Les diagonales du bac $ABCD$ mesurent 12 cm, sont perpendiculaires et ont le même milieu O.



Le plan de Lina : [AC] de 12 cm, la perpendiculaire en son milieu O, puis B et D à 6 cm de O.

2.

Justifie que la figure obtenue est un carré.

INDICE

Début : même milieu : quelle famille ?

Ensuite : utilise la même longueur, puis la perpendicularité.

CORRIGÉ

Parallélogramme. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu O. D'après la propriété « si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme » (rappel), $ABCD$ est un parallélogramme.

Rectangle. Ces diagonales mesurent toutes deux 12 cm. D'après la propriété du parallélogramme aux diagonales de même longueur (admise), $ABCD$ est un rectangle.

Losange. Elles sont aussi perpendiculaires. D'après la propriété du parallélogramme aux diagonales perpendiculaires, $ABCD$ est un losange.

Carré. Le quadrilatère $ABCD$ a donc quatre angles droits et quatre côtés de même longueur. D'après la définition du carré, c'est un carré.

Conclusion. La figure obtenue est bien un carré.

3.

Combien d'axes de symétrie a ce carré ? Vérifie en pliant un calque.

INDICE

Outil : la propriété du centre et des axes de symétrie est admise.

CORRIGÉ

D'après la propriété du centre et des axes de symétrie (admise), un carré a quatre axes de symétrie.

Ce sont ses diagonales (AC) et (BD), et les médiatrices de $[AB]$ et de $[BC]$. Plie le calque le long de chacun de ces axes : les deux moitiés se recouvrent.

Conclusion. Ce carré a quatre axes de symétrie.