BURHAN

Quadrilatères particuliers : exercices, application

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/quadrilateres-particuliers/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Quadrilatères particuliers	Application	8

Exercice 1

Les angles d'un cadre

Karim fabrique un cadre $ABCD$ pour un tableau. Ses sommets sont nommés dans l'ordre du contour.

À l'équerre, il vérifie que les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont droits. Il mesure $AB = 120$ cm et $BC = 80$ cm.



Le cadre de Karim, longueurs en centimètres : angles droits codés en A, en B et en C, AB = 120 et BC = 80.

1.

Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifie.

INDICE

Outil : compte les angles droits connus. Une propriété du chapitre dit combien il en faut.

CORRIGÉ

Le quadrilatère $ABCD$ a trois angles droits : $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

D'après la propriété des trois angles droits, cela suffit pour que $ABCD$ soit un rectangle. Son quatrième angle $\widehat{D}$ est donc droit lui aussi.

Conclusion. Le cadre $ABCD$ est un rectangle.

2.

Donne les longueurs CD et DA sans les mesurer. Justifie.

INDICE

Outil : un rectangle est un parallélogramme. Pense à ses côtés opposés.

Point délicat : $[CD]$ est opposé à $[AB]$, et $[DA]$ est opposé à $[BC]$.

CORRIGÉ

D'après la propriété « le rectangle est un parallélogramme », $ABCD$ est un parallélogramme. Ses côtés opposés ont donc la même longueur.

Le côté $[CD]$ est opposé à $[AB]$: $CD = AB = 120$ cm.

Le côté $[DA]$ est opposé à $[BC]$: $DA = BC = 80$ cm.

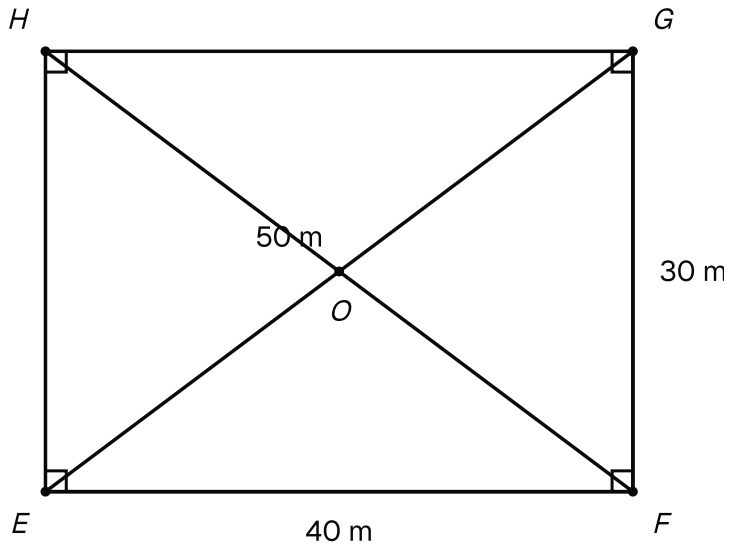
Conclusion. Sans mesurer, Karim sait que $[CD]$ mesure 120 cm et que $[DA]$ mesure 80 cm.

Exercice 2

L'arbitre au centre du terrain

Un terrain de jeu est un rectangle $EFGH$ de centre O. Le centre O est le point où les diagonales se coupent.

On sait que $EF = 40$ m, $FG = 30$ m et $EG = 50$ m. Sur ton cahier, trace-le à l'échelle : un rectangle de 8 cm sur 6 cm.



Le terrain rectangulaire EFGH de centre O : EF = 40 m, FG = 30 m et la diagonale EG = 50 m.

1.

Quelle est la longueur de la diagonale $[FH]$? Justifie.

INDICE

Outil : cherche la propriété des diagonales du rectangle. Elle est admise : tu l'utilises sans la prouver.

CORRIGÉ

D'après la propriété des diagonales du rectangle (admise), les deux diagonales $[EG]$ et $[FH]$ du terrain ont la même longueur.

Donc $FH = EG = 50$ m.

Conclusion. La diagonale $[FH]$ mesure 50 m.

2.

Un arbitre se place au centre O. À quelle distance est-il de chaque coin du terrain ?

INDICE

Outil : les diagonales ont le même milieu O.

Début : O est le milieu de $[EG]$, donc OE est la moitié de EG.

CORRIGÉ

D'après la propriété des diagonales du rectangle (admise), le centre O est le milieu de $[EG]$ et de $[FH]$.

Le point O coupe $[EG]$ en deux moitiés : $OE = OG = 50 \div 2 = 25$ m.

La diagonale $[FH]$ mesure aussi 50 m. De même, $OF = OH = 25$ m.

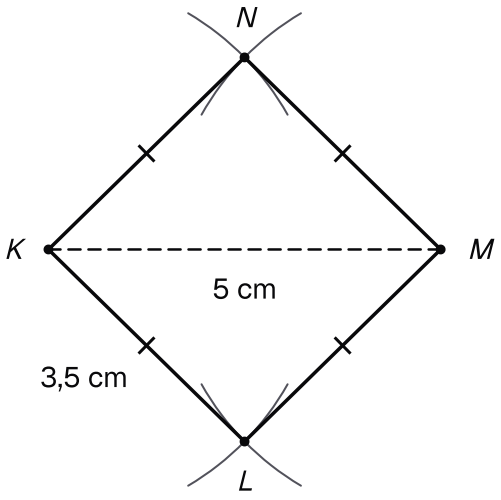
Conclusion. L'arbitre est à 25 m de chacun des quatre coins du terrain.

Exercice 3

Un badge en carton

Nora découpe un badge $KLMN$ dans du carton. Elle mesure ses quatre côtés : $KL = LM = MN = NK = 3{,}5$ cm.

Trace un badge pareil. Commence par une diagonale $[KM]$ de 5 cm. Puis, au compas, garde le même écartement de $3{,}5$ cm pour placer L et N.



Le badge KLMN : la diagonale [KM] de 5 cm, puis L et N placés au compas à 3,5 cm de K et de M.

1.

Quelle est la nature du badge $KLMN$? Justifie.

INDICE

Outil : relis la définition du losange. Elle parle des côtés.

CORRIGÉ

Le badge $KLMN$ a quatre côtés de $3{,}5$ cm : ils ont tous la même longueur.

D'après la définition du losange, $KLMN$ est donc un losange.

Conclusion. Le badge $KLMN$ est un losange.

2.

Nora trace les diagonales $[KM]$ et $[LN]$. Elles se coupent en O. Que peut-elle dire des droites (KM) et (LN) ? Et du point O ?

INDICE

Outil : cherche la propriété des diagonales du losange. Elle donne deux informations.

CORRIGÉ

D'après la propriété des diagonales du losange, les diagonales $[KM]$ et $[LN]$ se coupent à angle droit, en leur milieu.

Les droites sont donc perpendiculaires : $(KM) \perp (LN)$.

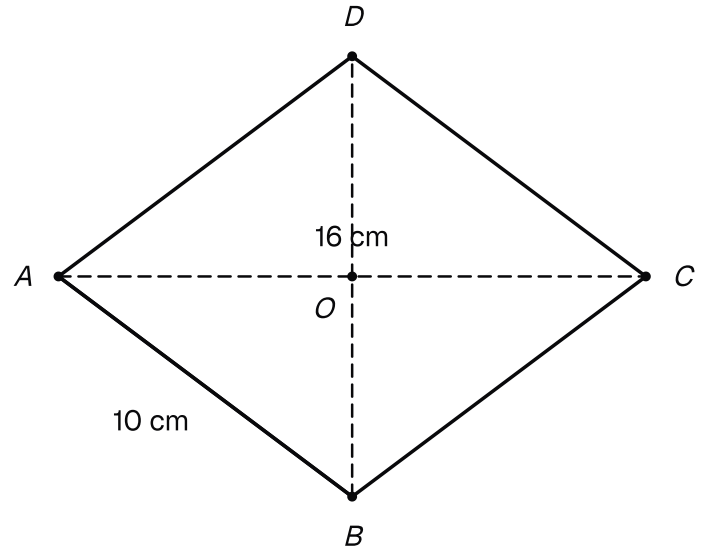
Le point O est le milieu de $[KM]$ et aussi le milieu de $[LN]$.

Conclusion. Nora peut dire que (KM) et (LN) sont perpendiculaires, et que O est le milieu commun des deux diagonales.

Exercice 4

Un carreau de mosaïque

Un carreau de mosaïque est un losange $ABCD$ de centre O. Ses diagonales mesurent $AC = 16$ cm et $BD = 12$ cm. Son côté $[AB]$ mesure 10 cm.



Le carreau de mosaïque ABCD de centre O : AC = 16 cm, BD = 12 cm et AB = 10 cm.

1.

Calcule OA et OB.

INDICE

Outil : les diagonales d'un losange ont le même milieu.

CORRIGÉ

D'après la propriété des diagonales du losange, O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$.

Chaque longueur cherchée est la moitié d'une diagonale : $OA = 16 \div 2 = 8$ cm et $OB = 12 \div 2 = 6$ cm.

Conclusion. On trouve $OA = 8$ cm et $OB = 6$ cm.

2.

Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$?

INDICE

Outil : la même propriété dit comment les diagonales se coupent.

CORRIGÉ

D'après la propriété des diagonales du losange, $(AC) \perp (BD)$.

Ces deux droites se coupent en O en formant un angle droit.

Conclusion. L'angle $\widehat{AOB}$ mesure $90°$.

3.

Donne BC, CD et DA.

INDICE

Outil : relis la définition du losange.

CORRIGÉ

D'après la définition du losange, les quatre côtés du carreau ont la même longueur. On connaît $AB = 10$ cm.

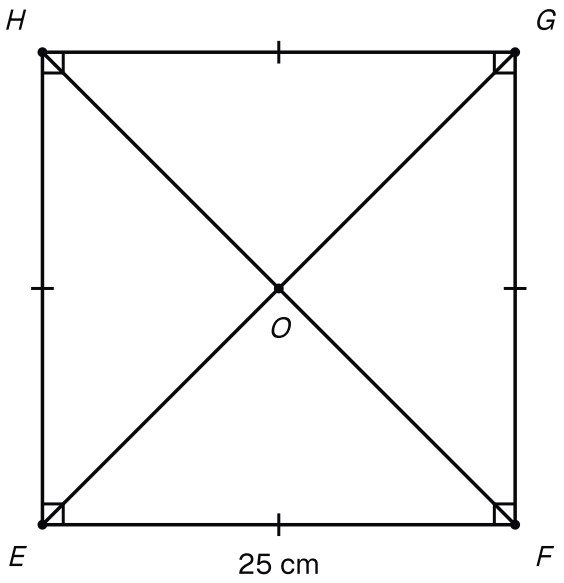
Donc $BC = CD = DA = AB = 10$ cm.

Conclusion. Les côtés $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ mesurent chacun 10 cm.

Exercice 5

Une dalle de terrasse

Une dalle de terrasse est un carré $EFGH$ de 25 cm de côté. Ses diagonales $[EG]$ et $[FH]$ se coupent en O.



La dalle carrée EFGH de 25 cm de côté, avec ses diagonales [EG] et [FH] qui se coupent en O.

1.

Ce carré est-il un rectangle ? Est-il un losange ? Justifie.

INDICE

Outil : compare la définition du carré avec celles du rectangle et du losange.

CORRIGÉ

Oui aux deux questions, d'après la propriété « le carré est un rectangle et un losange ».

Rectangle. La dalle $EFGH$ a quatre angles droits, comme tout rectangle.

Losange. Ses quatre côtés mesurent 25 cm : ils ont la même longueur, comme dans tout losange.

Conclusion. Oui : la dalle carrée est un rectangle, et c'est aussi un losange.

2.

Fatima mesure EG. Sans mesurer, que peut-elle dire de FH ?

INDICE

Outil : le carré est un rectangle. Pense à la longueur des diagonales.

CORRIGÉ

D'après la propriété « le carré est un rectangle et un losange », $EFGH$ est un rectangle.

D'après la propriété des diagonales du rectangle (admise), ses diagonales ont la même longueur : $FH = EG$.

Conclusion. Sans mesurer, Fatima sait que la diagonale $[FH]$ a la même longueur que $[EG]$.

3.

Sans mesurer, que peut-elle dire de l'angle $\widehat{EOF}$?

INDICE

Outil : le carré est aussi un losange. Pense à la position des diagonales.

CORRIGÉ

D'après la propriété « le carré est un rectangle et un losange », $EFGH$ est aussi un losange.

D'après la propriété des diagonales du losange, $(EG) \perp (FH)$. Ces diagonales se coupent en O.

Conclusion. L'angle $\widehat{EOF}$ est droit : il mesure $90°$.

Exercice 6

Vrai ou faux sur les familles

Pour chaque phrase, réponds par vrai ou faux. Justifie avec une propriété ou avec un contre-exemple.

Un **contre-exemple** est une figure qui montre qu'une phrase est fausse.

1.

Tout carré est un losange.

INDICE

Outil : regarde les côtés d'un carré.

CORRIGÉ

Vrai. Un carré a quatre côtés de même longueur.

D'après la définition du losange, un tel quadrilatère est un losange.

Conclusion. La phrase est vraie : tout carré est un losange.

2.

Tout rectangle est un carré.

INDICE

Outil : cherche un rectangle aux côtés très différents.

CORRIGÉ

Faux. Un seul contre-exemple suffit : un rectangle de 6 cm sur 2 cm.

Ce rectangle a bien quatre angles droits. Mais deux de ses côtés consécutifs mesurent 6 cm et 2 cm, et $6 \neq 2$.

Ses quatre côtés n'ont donc pas tous la même longueur : ce n'est pas un carré.

Conclusion. La phrase est fausse : un rectangle n'est pas toujours un carré.

3.

Tout losange est un parallélogramme.

INDICE

Outil : relis la propriété des diagonales du losange jusqu'au bout.

CORRIGÉ

Vrai. D'après la propriété des diagonales du losange, les diagonales d'un losange ont le même milieu.

D'après la propriété « si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme » (rappel), ce losange est un parallélogramme.

Conclusion. La phrase est vraie : tout losange est un parallélogramme.

4.

Un losange de 5 cm de côté qui a un angle droit est un carré.

INDICE

Outil : cherche la propriété pour reconnaître un carré.

CORRIGÉ

Vrai. D'après la propriété pour reconnaître un carré, un losange qui a un angle droit est un carré.

La longueur du côté, ici 5 cm, ne joue aucun rôle.

Conclusion. La phrase est vraie : ce losange est un carré.

Exercice 7

Un seul renseignement

Voici quatre parallélogrammes. Pour chacun, un seul renseignement est donné.

Dis s'il s'agit d'un rectangle ou d'un losange. Nomme la propriété utilisée.

1.

Le parallélogramme $ABCD$ a un angle $\widehat{B}$ droit.

INDICE

Outil : un angle droit dans un parallélogramme : quelle famille ?

CORRIGÉ

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, et son angle $\widehat{B}$ est droit.

D'après la propriété « un parallélogramme avec un angle droit est un rectangle », $ABCD$ est un rectangle.

Conclusion. Le parallélogramme $ABCD$ est un rectangle.

2.

Le parallélogramme $EFGH$ a $EF = FG = 6$ cm.

INDICE

Point délicat : $[EF]$ et $[FG]$ ont le sommet F en commun : ils sont consécutifs.

CORRIGÉ

Les côtés $[EF]$ et $[FG]$ ont le sommet F en commun : ils sont consécutifs. Ils ont la même longueur, 6 cm.

D'après la propriété du parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux, $EFGH$ est un losange.

Conclusion. Le parallélogramme $EFGH$ est un losange.

3.

Le parallélogramme $IJKL$ a des diagonales $IK = JL = 10$ cm.

INDICE

Outil : des diagonales de même longueur dans un parallélogramme. Cette propriété est admise.

CORRIGÉ

Les diagonales du parallélogramme $IJKL$ ont la même longueur : $IK = JL = 10$ cm.

D'après la propriété du parallélogramme aux diagonales de même longueur (admise), $IJKL$ est un rectangle.

Conclusion. Le parallélogramme $IJKL$ est un rectangle.

4.

Le parallélogramme $MNPQ$ a des diagonales perpendiculaires : $(MP) \perp (NQ)$.

INDICE

Outil : pense à la propriété du parallélogramme aux diagonales perpendiculaires.

CORRIGÉ

Les diagonales $[MP]$ et $[NQ]$ du parallélogramme $MNPQ$ sont perpendiculaires.

D'après la propriété du parallélogramme aux diagonales perpendiculaires, $MNPQ$ est un losange.

Conclusion. Le parallélogramme $MNPQ$ est un losange.

Exercice 8

Les axes d'un drapeau

Un drapeau est un rectangle $ABCD$ de 8 cm sur 5 cm, avec $AB = 8$ cm. Trace-le sur ton cahier, puis décalque-le.

1.

Trace ses diagonales. Quel rôle joue leur point commun pour la symétrie ?

INDICE

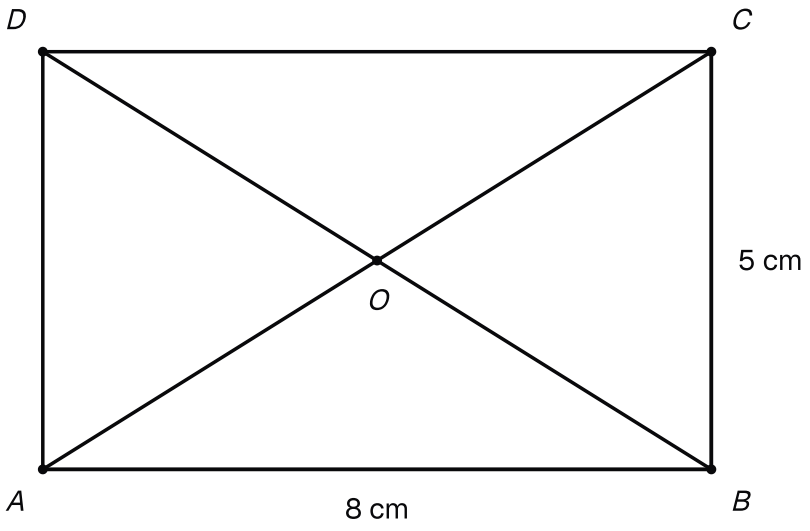
Outil : cherche la propriété du centre et des axes de symétrie. Elle est admise.

CORRIGÉ

D'après la propriété du centre et des axes de symétrie (admise), le point commun des diagonales d'un rectangle est son centre de symétrie.

Pour le vérifier, pique le calque sur ce point avec la pointe du compas. Fais-lui faire un demi-tour : il recouvre exactement la figure.

Conclusion. Le point commun des diagonales est le centre de symétrie du drapeau.



Le drapeau ABCD de 8 cm sur 5 cm : ses diagonales se coupent en son centre de symétrie, nommé O sur la figure.

2.

Combien d'axes de symétrie a ce drapeau ? Lesquels ?

INDICE

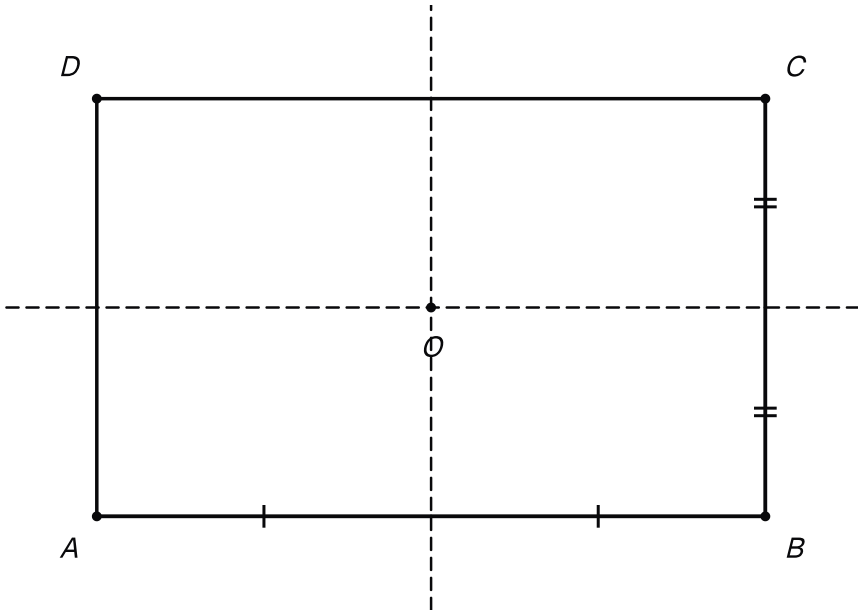
Point délicat : ce rectangle n'est pas un carré. Plie le calque le long d'une diagonale pour voir.

CORRIGÉ

Le drapeau est un rectangle qui n'est pas un carré : ses côtés consécutifs mesurent 8 cm et 5 cm, et $8 \neq 5$.

D'après la propriété du centre et des axes de symétrie (admise), les axes d'un tel rectangle sont les médiatrices de ses côtés : il en a deux. Ses diagonales ne sont pas des axes.

Conclusion. Ce drapeau a deux axes de symétrie : la médiatrice de $[AB]$ et la médiatrice de $[BC]$.



Les deux axes du drapeau : la médiatrice de [AB] et celle de [BC], qui se croisent au centre O.

3.

Un autre drapeau est un carré $EFGH$ de 5 cm de côté. A-t-il plus d'axes ? Lesquels ?

INDICE

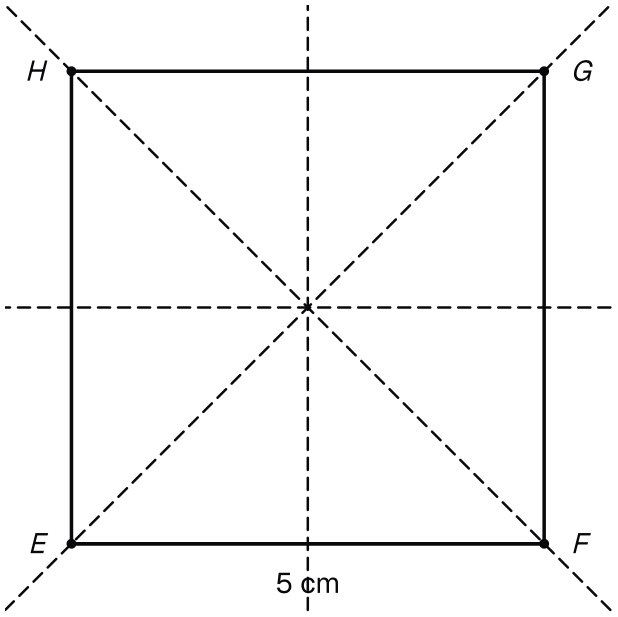
Outil : la même propriété traite le cas du carré à part.

CORRIGÉ

Oui. D'après la propriété du centre et des axes de symétrie (admise), un carré a quatre axes de symétrie.

Ce sont ses deux diagonales (EG) et (FH), puis la médiatrice de $[EF]$ et la médiatrice de $[FG]$.

Conclusion. Le drapeau carré a quatre axes, alors que le drapeau rectangle n'en a que deux.



Le drapeau carré EFGH de 5 cm de côté et ses quatre axes : (EG), (FH) et les médiatrices de [EF] et de [FG].