BURHAN

Quadrilatères particuliers

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/quadrilateres-particuliers/cours

Chapitre	Semestre
Quadrilatères particuliers	Semestre 2

Des quadrilatères partout

Regarde autour de toi : un cadre de photo, un carreau de faïence, un cerf-volant, l'écran de ton téléphone.

Chacun a quatre côtés : c'est un **quadrilatère**. Pourtant, ils ne se ressemblent pas tous.

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à les reconnaître sans te tromper. Tu vas aussi prouver ce que tu observes.

Devine : Le cadre du menuisier

Un menuisier assemble un cadre en bois. Il mesure ses quatre côtés, dans l'ordre : 50 cm, 30 cm, 50 cm, 30 cm. Peut-il être sûr que son cadre est un rectangle ?

A. Oui, car ses côtés vont par paires égales.

Faux.

Faux. Un cadre mal fixé peut se pencher : les longueurs restent les mêmes, mais les coins ne sont plus droits.

B. Non, il doit aussi vérifier un angle droit.

Juste.

Oui. Les longueurs ne disent rien sur les angles : il faut aussi regarder les coins.

C. Oui, car son cadre a quatre côtés.

Faux.

Faux. Beaucoup de quadrilatères ne sont pas des rectangles : un cerf-volant, par exemple.

D. Non, aucune mesure ne permet de le savoir.

Faux.

Faux. Une vérification bien choisie suffit : un angle droit, par exemple.

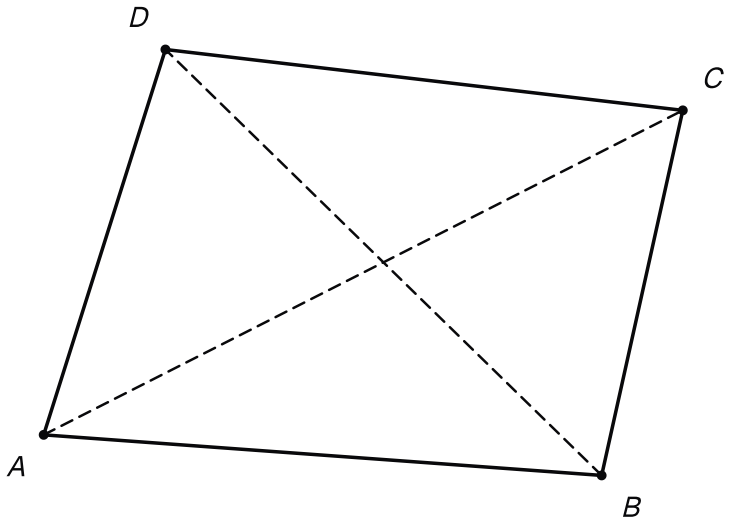
Correction

Il doit vérifier **un angle droit**.

Les longueurs ne fixent pas les angles : un cadre mal fixé peut se pencher sans qu'aucun de ses côtés ne change de longueur.

Un quadrilatère $ABCD$ se nomme **dans l'ordre de son contour** : on va de A à B, puis à C, puis à D, et on revient à A.

- Deux côtés **consécutifs** ont un sommet commun : $[AB]$ et $[BC]$ ont le sommet B.
- Deux côtés **opposés** n'ont pas de sommet commun : $[AB]$ et $[DC]$.
- Une **diagonale** joint deux sommets qui ne se suivent pas : $[AC]$ et $[BD]$.



Le quadrilatère ABCD parcouru dans l'ordre A, B, C, D, avec ses deux diagonales [AC] et [BD] en pointillés.

Rappel : un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux. Dans un parallélogramme :

- les côtés opposés ont la même longueur ;
- les diagonales ont le même milieu.

On écrit $(AB) \parallel (DC)$ pour dire que les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

Rappel : un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme. Les deux diagonales doivent être sur deux droites différentes.

Rappel : on écrit $(AB) \perp (AD)$ pour dire que les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires.

- Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.
- Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
- La **médiatrice** d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu. Un point est sur la médiatrice de $[BD]$ exactement quand il est à la même distance de B et de D.

À la fin du chapitre, tu sauras reconnaître un rectangle, un losange et un carré. Tu sauras le justifier en nommant la bonne propriété. Tu sauras aussi les construire et trouver leurs axes de symétrie.

Le rectangle

Des coins bien droits

Une porte, une feuille de cahier, un tableau de classe : leurs coins sont droits. Pose ton équerre sur un coin de ta feuille. Elle s'ajuste parfaitement.

On note $\widehat{A}$ l'angle du quadrilatère au sommet A. Dans $ABCD$, c'est aussi l'angle $\widehat{DAB}$.

Un angle droit mesure $90°$.

> **Vérifie : Trois quadrilatères**
>
> Trois quadrilatères sont décrits. Lequel est un rectangle ?
>
> **A.** Le quadrilatère qui a exactement deux angles droits et deux côtés de 6 cm.
> **Faux.**
> Faux. Deux angles droits ne suffisent pas : les deux autres coins peuvent être pointus.
>
> **B.** Le quadrilatère qui a quatre côtés de 5 cm, sans angle droit.
> **Faux.**
> Faux. Ses côtés sont égaux, mais aucun coin n'est droit : ce n'est pas un rectangle.
>
> **C.** Le quadrilatère qui a quatre angles droits et des côtés de 7 cm et 3 cm.
> **Juste.**
> Oui. Ses quatre coins sont droits : c'est ce qui fait un rectangle.
>
> **Correction**
> C'est le quadrilatère qui a **quatre angles droits**. Les longueurs de ses côtés n'y changent rien.

La définition

> **Définition : Le rectangle**
>
> Un **rectangle** est un quadrilatère qui a **quatre angles droits**.
>
> Dans un rectangle $ABCD$, on a donc $(AB) \perp (BC)$, $(BC) \perp (CD)$, $(CD) \perp (DA)$ et $(DA) \perp (AB)$.

En clair : un rectangle, c'est quatre coins droits. La définition ne parle pas des longueurs des côtés. Ses côtés n'ont donc pas besoin d'être tous égaux.

> **Exemple : l'écran**
>
> Un écran de téléphone $ABCD$ mesure 15 cm de haut et 7 cm de large. Tu vérifies ses quatre coins à l'équerre : $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ sont droits.

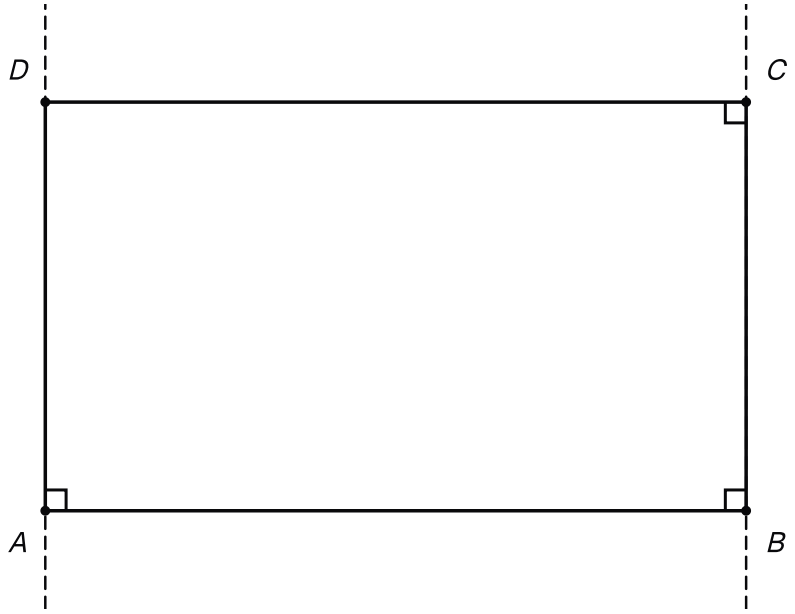
D'après la définition du rectangle, $ABCD$ est un rectangle.

Ses côtés mesurent 15 cm et 7 cm : ils ne sont pas tous égaux, et c'est permis.

Trois angles suffisent

> **Devine : Le dernier coin**
>
> Un menuisier fabrique une porte. Il vérifie à l'équerre trois coins : ils sont droits. Il n'a pas encore vérifié le quatrième. Que prévois-tu pour ce coin ?
>
> **A.** Il est forcément droit lui aussi.
>
> **Juste.**
> Oui. Avec trois angles droits, le quatrième n'a pas le choix : tu vas le prouver.
>
> **B.** On ne peut rien dire sans le mesurer.
>
> **Faux.**
> Faux. Les trois angles droits imposent le quatrième, sans aucune mesure.
>
> **C.** Il est forcément plus petit qu'un angle droit.
>
> **Faux.**
> Faux. Il ne peut pas être plus petit : les trois côtés déjà posés le forcent à être droit.
>
> **Correction**
> Le quatrième coin est **droit**. Un quadrilatère qui a trois angles droits a forcément quatre angles droits.

Pourquoi est-ce vrai ? Une équerre peut se tromper d'un tout petit peu. Une preuve ne se trompe jamais. Elle utilise les deux rappels sur les droites perpendiculaires et parallèles.



Le quadrilatère ABCD de la preuve : trois angles droits codés en A, en B et en C, et aucun codage en D.

Propriété : Trois angles droits suffisent

Si un quadrilatère a **trois angles droits**, alors c'est un rectangle : son quatrième angle est droit lui aussi.

Démonstration

Étape 1. Soit $ABCD$ un quadrilatère dont les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont droits. Comme $\widehat{A}$ est droit, $(AD) \perp (AB)$. Comme $\widehat{B}$ est droit, $(BC) \perp (AB)$.

Étape 2. Les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires à la même droite (AB). Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles. Donc $(AD) \parallel (BC)$.

Étape 3. Comme $\widehat{C}$ est droit, $(DC) \perp (BC)$. Or, si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Donc $(DC) \perp (AD)$: l'angle $\widehat{D}$ est droit.

Étape 4. Les quatre angles de $ABCD$ sont droits : $ABCD$ est un rectangle.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve avance en trois temps :

1. chaque angle droit donne deux droites perpendiculaires ;
2. deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles ;
3. une perpendiculaire à l'une de deux parallèles l'est aussi à l'autre : c'est ce qui fabrique le quatrième angle droit.

Vérifie : Un argument de la preuve

Dans la preuve, quelle propriété permet de dire que $(AD) \parallel (BC)$?

A. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles.

Faux.

Faux. On ne sait pas encore que $ABCD$ est un parallélogramme : on n'a pas le droit de l'utiliser.

B. Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu.

Faux.

Faux. La preuve ne parle jamais des diagonales.

C. Deux côtés opposés de même longueur sont parallèles.

Faux.

Faux. La preuve ne mesure aucun côté : elle n'utilise que des angles droits.

D. Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

Juste.

Oui. (AD) et (BC) sont toutes deux perpendiculaires à (AB).

Correction

Les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires à la même droite (AB). Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles. Donc $(AD) \parallel (BC)$.

L'autre rappel, sur la perpendiculaire à l'une de deux parallèles, sert plus tard, pour l'angle en D.

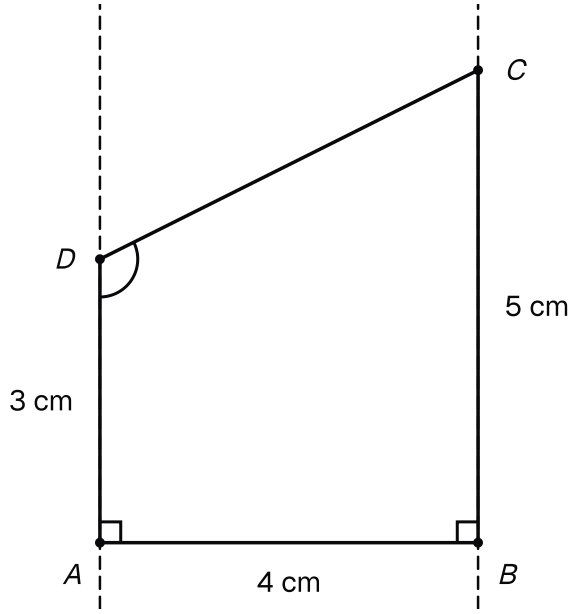
Un contre-exemple, puis à toi

Exemple : Contre-exemple : deux angles droits ne suffisent pas

Trace $[AB]$ de 4 cm. Trace en A et en B deux perpendiculaires à (AB), du même côté. Place D à 3 cm de A et C à 5 cm de B. Trace $[DC]$.

Le quadrilatère $ABCD$ a deux angles droits, en A et en B. Vérifie $\widehat{D}$ à l'équerre : il n'est pas droit.

Ce n'est pas un rectangle. Il faut bien **trois** angles droits.



Le contre-exemple : ABCD a deux angles droits, en A et en B, mais son angle en D n'est pas droit.

À toi : Un plan de jardin

Sur un plan de jardin, le quadrilatère $EFGH$ a des angles droits en E, en F et en G. On a $EF = 9$ m et $FG = 4$ m. Quelle est la nature de $EFGH$? Justifie. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Compte les angles droits que donne l'énoncé.
Indice 2
Une propriété du cours parle exactement de trois angles droits.
Indice 3
Point délicat : les longueurs ne servent pas ici. La nature se lit sur les angles.

Réponse
$EFGH$ a trois angles droits, en E, F et G. D'après la propriété des trois angles droits, $EFGH$ est un rectangle.

Les longueurs EF et FG ne servent pas ici.

Conclusion. $EFGH$ est un rectangle : son angle $\widehat{H}$ est droit lui aussi.

Le rectangle est un parallélogramme

Prévoir une longueur

Devine : Le côté caché

Le rectangle $ABCD$ a $AB = 8$ cm et $BC = 5$ cm. Sans mesurer, combien mesure le côté $[DC]$?

A. 5 cm

Faux.

Faux. $[DC]$ et $[BC]$ sont consécutifs : ils n'ont aucune raison d'être égaux.

B. 8 cm

Juste.

Oui. $[DC]$ est le côté opposé à $[AB]$.

C. 13 cm

Faux.

Faux. On n'additionne pas les longueurs de deux côtés pour en trouver un troisième.

D. On ne peut pas savoir

Faux.

Faux. Le rectangle a une propriété qui donne cette longueur.

Correction

$DC = 8$ cm.

Le côté $[DC]$ est opposé à $[AB]$, et les côtés opposés d'un rectangle ont la même longueur. La propriété qui suit le prouve.

Pourquoi est-ce vrai ? Si le rectangle est un parallélogramme, il a toutes les propriétés du parallélogramme. Il suffit donc de montrer que ses côtés opposés sont parallèles.

La preuve

Propriété : Le rectangle est un parallélogramme

Tout rectangle est un **parallélogramme**.

Il a donc toutes les propriétés du parallélogramme : ses côtés opposés sont parallèles et ont la même longueur, et ses diagonales ont le même milieu.

Démonstration

Étape 1. Soit $ABCD$ un rectangle. Les droites (AD) et (BC) sont toutes deux perpendiculaires à (AB). Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles. Donc $(AD) \parallel (BC)$.

Étape 2. De même, (AB) et (DC) sont toutes deux perpendiculaires à (AD). Donc $(AB) \parallel (DC)$.

Étape 3. Les côtés opposés de $ABCD$ sont parallèles deux à deux. D'après la définition du parallélogramme, $ABCD$ est un parallélogramme.

Étape 4. D'après les propriétés du parallélogramme, ses côtés opposés ont la même longueur et ses diagonales ont le même milieu.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On utilise deux fois la même propriété : deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles. Une fois les côtés opposés parallèles, la définition du parallélogramme conclut. Le rectangle reçoit alors toutes les propriétés du parallélogramme.

Vérifie : La conclusion de la preuve

La preuve montre que les côtés opposés de $ABCD$ sont parallèles. Pourquoi cela suffit-il pour dire que $ABCD$ est un parallélogramme ?

A. C'est la définition du parallélogramme.
Juste.
Oui. Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.

B. Ses diagonales ont le même milieu.
Faux.
Faux. La preuve n'a rien dit des diagonales à cette étape.

C. Ses quatre angles sont droits.
Faux.
Faux. Les angles droits ont servi au début, mais ce n'est pas eux qui définissent un parallélogramme.

D. On a $AB = DC$.
Faux.
Faux. L'égalité des côtés opposés est une conséquence, pas l'argument.

Correction
Un parallélogramme est **défini** par ses côtés opposés parallèles deux à deux. La preuve l'a montré : $ABCD$ est donc un parallélogramme.

Exemple : un cadre de tableau

Un cadre rectangulaire $ABCD$ a $AB = 48$ cm et $BC = 36$ cm.

Tout rectangle est un parallélogramme, et les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur. On obtient $DC = 48$ cm et $AD = 36$ cm.

De plus, ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.

Mesurer les diagonales

Vérifie : Deux diagonales à mesurer

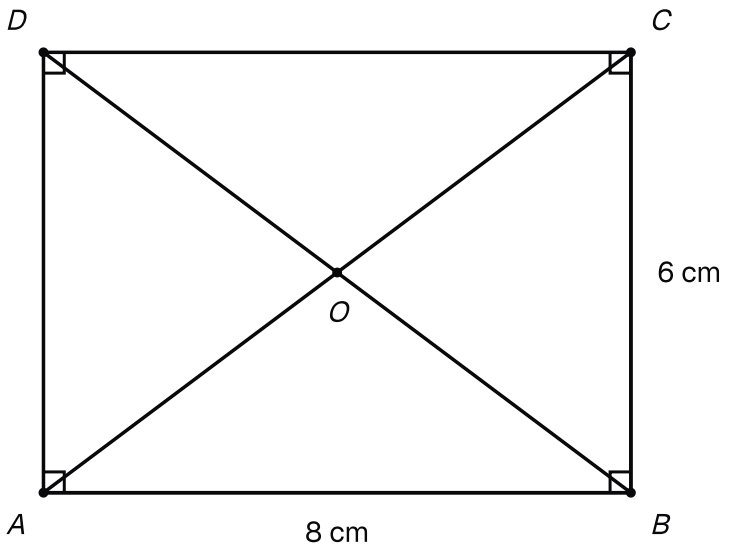
Trace un rectangle $ABCD$ avec $AB = 8$ cm et $BC = 6$ cm. Trace ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Elles se coupent en O. Mesure AC, BD, puis OA, OB, OC et OD. Que remarques-tu ?

Indice 1
Mesure d'abord les deux diagonales entières.

Indice 2
Mesure ensuite les quatre morceaux à partir de O.

Réponse
Tu trouves $AC = 10$ cm et $BD = 10$ cm : les diagonales ont la même longueur.

Tu trouves aussi $OA = OB = OC = OD = 5$ cm : elles se coupent en leur milieu.



Le rectangle ABCD à tracer, 8 cm sur 6 cm, et ses diagonales qui se croisent en O : les mesures restent à faire.

Propriété : Les diagonales du rectangle

Les diagonales d'un rectangle ont **la même longueur** et **le même milieu**.

Dans un rectangle $ABCD$ de centre O, on a donc $AC = BD$ et $OA = OB = OC = OD$.

Remarque

Ce résultat est admis. Ce qui est admis, c'est la même longueur des diagonales : tu l'as vérifiée en mesurant. Sa preuve demande des outils que tu verras plus tard.

Le même milieu, lui, vient de ce que le rectangle est un parallélogramme.

Exemple : calculer des longueurs

$EFGH$ est un rectangle de centre O, et $EG = 13$ cm.

Même longueur. Les deux diagonales du rectangle sont égales : $FH = 13$ cm.

Même milieu. Elles se coupent en leur milieu O : $OF = 13 \div 2 = 6{,}5$ cm. De même, $OE = OG = OH = 6{,}5$ cm.

À toi

Attention : pas dans l'autre sens

✗ « Ce parallélogramme est un rectangle, car c'est un parallélogramme. »

✓ Tout rectangle est un parallélogramme. Mais un parallélogramme n'est pas toujours un rectangle : souviens-toi du cadre penché du menuisier. Pour conclure, il faut une information de plus, par exemple un angle droit.

À toi : Une table rectangulaire

Le plateau d'une table est un rectangle $ABCD$ de centre O. On sait que $AB = 150$ cm et $OA = 85$ cm. Donne DC, AC, BD et OD. Justifie chaque longueur. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le rectangle est un parallélogramme : pense aux côtés opposés.
Indice 2
O est le milieu de $[AC]$: la diagonale vaut le double de OA.
Indice 3
Point délicat : pour BD, utilise la propriété des diagonales du rectangle, pas celle du parallélogramme seule.

Réponse
Côté opposé. Tout rectangle est un parallélogramme, donc ses côtés opposés ont la même longueur : $DC = AB = 150$ cm.

Première diagonale. Le point O est le milieu de $[AC]$, donc $AC = 2 \times 85 = 170$ cm.

Seconde diagonale. Les diagonales d'un rectangle sont égales : $BD = 170$ cm.

Demi-diagonale. Elles ont aussi le même milieu O : $OD = 170 \div 2 = 85$ cm.

Conclusion. $DC = 150$ cm, $AC = BD = 170$ cm et $OD = 85$ cm.

Reconnaître un rectangle

Un seul angle droit

Devine : Le cadre, encore

Le menuisier a fixé son cadre : ses côtés opposés sont parallèles, c'est un parallélogramme. Il vérifie un seul coin à l'équerre : il est droit. Que peut-il conclure ?

A. Il doit encore vérifier les trois autres coins.
Faux.
Faux. Dans un parallélogramme, un angle droit impose les trois autres.

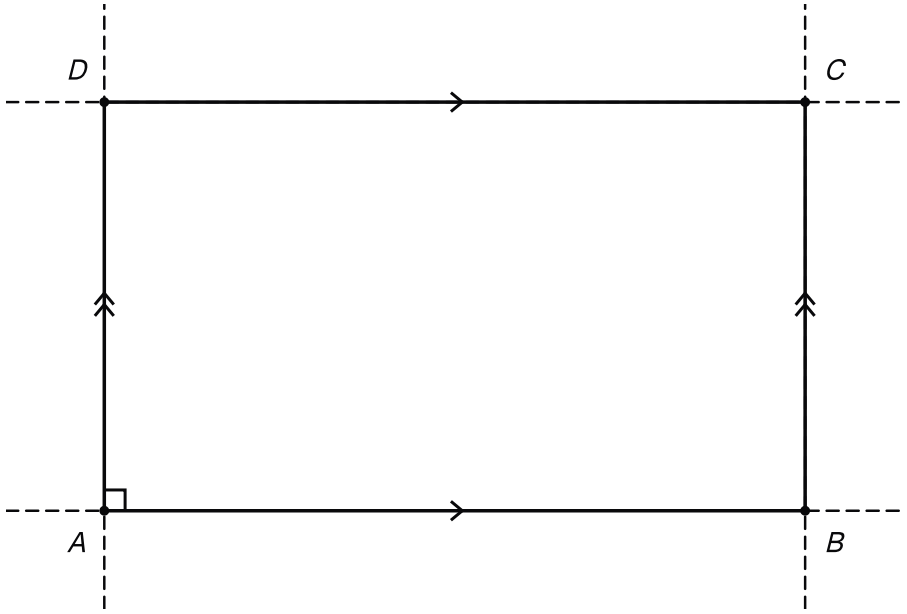
B. Il doit encore vérifier deux autres coins.
Faux.
Faux. Même un seul coin suffit, parce que le cadre est un parallélogramme.

C. Son cadre est un rectangle.
Juste.
Oui. Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.

D. Il ne peut rien conclure du tout.
Faux.
Faux. Un angle droit dans un parallélogramme est une information décisive.

Correction
Son cadre est un **rectangle**. C'est un parallélogramme qui a un angle droit.

Pourquoi est-ce vrai ? Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles. Un angle droit va donc se transmettre d'un coin à l'autre, grâce aux rappels sur les perpendiculaires.



Un parallélogramme ABCD dont seul l'angle en A est codé droit : ses côtés parallèles vont transmettre cet angle.

La preuve

Propriété : Parallélogramme qui a un angle droit

Si un **parallélogramme** a **un angle droit**, alors c'est un rectangle.

Démonstration

Étape 1. Soit $ABCD$ un parallélogramme dont l'angle $\widehat{A}$ est droit : $(AD) \perp (AB)$.

Étape 2. Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles : $(AB) \parallel (DC)$. Or, si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Comme $(AD) \perp (AB)$, on a $(AD) \perp (DC)$: l'angle $\widehat{D}$ est droit.

Étape 3. De même, $(AD) \parallel (BC)$ et $(AB) \perp (AD)$, donc $(AB) \perp (BC)$: l'angle $\widehat{B}$ est droit.

Étape 4. $ABCD$ a trois angles droits. D'après la propriété des trois angles droits, c'est un rectangle.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Les côtés opposés parallèles transmettent l'angle droit au coin voisin. On obtient trois angles droits. La propriété des trois angles droits termine la preuve : on réutilise un résultat déjà démontré.

Vérifie : La dernière étape

À la fin de la preuve, $ABCD$ a trois angles droits. Quelle propriété permet de conclure que c'est un rectangle ?

A. La définition du rectangle.

Faux.

Faux. La définition demande quatre angles droits : on n'en a montré que trois.

B. La propriété des trois angles droits.

Juste.

Oui. Un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle.

C. La définition du parallélogramme.

Faux.

Faux. On savait déjà que $ABCD$ est un parallélogramme : cela ne dit rien de ses angles.

D. La propriété des diagonales du rectangle.

Faux.

Faux. Les diagonales n'interviennent pas dans cette preuve.

Correction

La preuve a obtenu trois angles droits. D'après la propriété des trois angles droits, $ABCD$ est un rectangle.

Exemple : rédiger avec deux propriétés

Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu O. De plus, l'angle $\widehat{B}$ est droit.

Un parallélogramme. Ses diagonales ont le même milieu, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Un angle droit. Ce parallélogramme a un angle droit en B. D'après la propriété du parallélogramme qui a un angle droit, $ABCD$ est un rectangle.

Des diagonales de même longueur

Devine : Deux baguettes en croix

Pour une décoration, Salma attache deux baguettes de 60 cm en leur milieu. Elle tend une ficelle entre leurs quatre extrémités. Quelle forme obtient-elle, quel que soit l'angle entre les baguettes ?

A. Toujours un carré.

Faux.

Faux. Si les baguettes ne sont pas perpendiculaires, les côtés ne sont pas tous égaux.

B. Toujours un losange.

Faux.

Faux. Ses côtés consécutifs n'ont pas la même longueur en général.

C. Un rectangle, mais seulement pour un angle droit entre les baguettes.

Faux.

Faux. C'est un rectangle quel que soit l'angle ; avec un angle droit, c'est même un carré.

D. Toujours un rectangle.

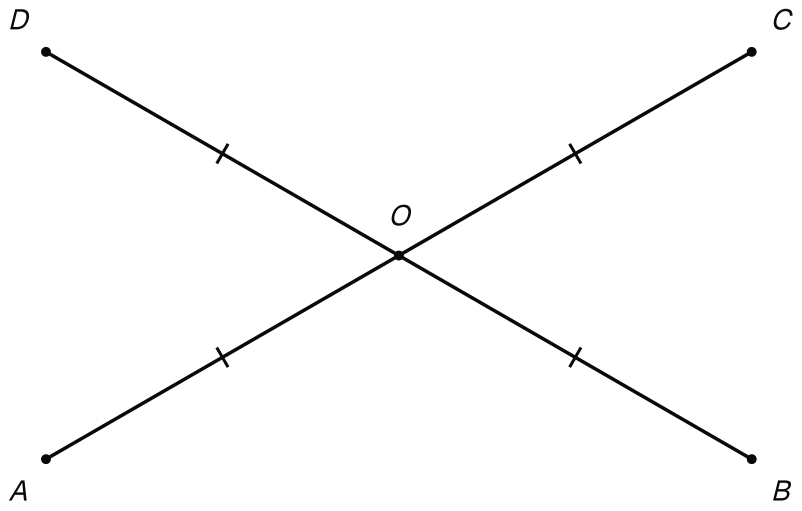
Juste.

Oui. Les baguettes ont le même milieu et la même longueur : ce sont les diagonales d'un rectangle.

Correction

Elle obtient **toujours un rectangle**.

Les diagonales ont le même milieu : c'est un parallélogramme. Elles ont aussi la même longueur.



Les deux baguettes de Salma, de même longueur, attachées en leur milieu O ; la ficelle relie ensuite leurs bouts.

Propriété : Parallélogramme aux diagonales de même longueur

Si un **parallélogramme** a des diagonales de **même longueur**, alors c'est un rectangle.

Remarque

Ce résultat est admis. Tu peux le constater avec les baguettes de Salma : la figure est toujours un rectangle.

Exemple : le carreleur

Un carreleur vérifie un carreau $ABCD$. Il mesure ses diagonales : $AC = 50$ cm et $BD = 50$ cm. Elles se coupent en leur milieu.

Les diagonales ont le même milieu, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Ce parallélogramme a deux diagonales égales. D'après la propriété des diagonales de même longueur, $ABCD$ est un rectangle.

La méthode

Méthode : démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle

1. **Lire les données** : note ce que l'énoncé donne sur les angles, les côtés et les diagonales.
2. **Compter les angles droits** : trois suffisent.
3. **Sinon, passer par le parallélogramme** : montre d'abord que c'est un parallélogramme.
4. **Ajouter un indice** : un angle droit, ou des diagonales de même longueur.
5. **Rédiger** : écris chaque étape avec « donc », et nomme la propriété utilisée.

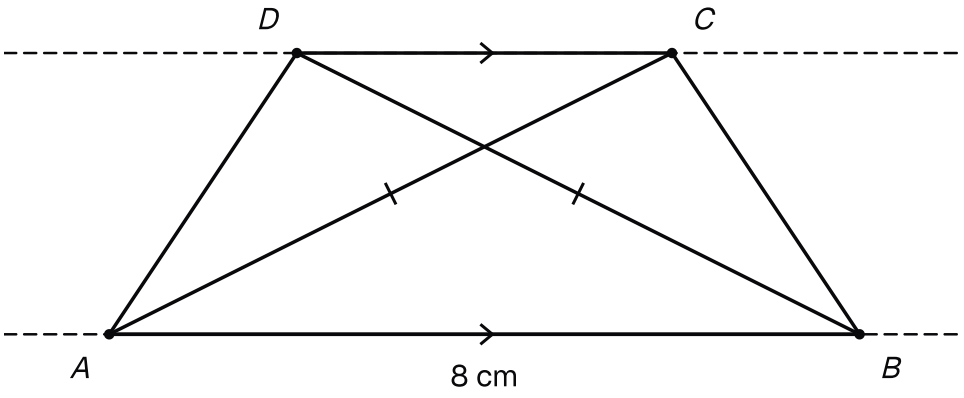
Attention : un trapèze trompeur

Un **trapèze** est un quadrilatère qui a deux côtés parallèles.

Trace $[AB]$ de 8 cm. Trace la parallèle à (AB) à 3 cm au-dessus. Place D au-dessus du point de $[AB]$ situé à 2 cm de A. Place C au-dessus du point situé à 6 cm de A.

✗ « $AC = BD$, donc $ABCD$ est un rectangle. »

✓ Ses diagonales ont la même longueur, mais pas le même milieu. Ce n'est pas un parallélogramme, et ses angles ne sont pas droits.



Le trapèze trompeur : ses diagonales [AC] et [BD] ont la même longueur, et pourtant ABCD n'est pas un rectangle.

À toi : Un panneau

Les diagonales du panneau $ABCD$ se coupent en O. On mesure $OA = OC = 35$ cm et $OB = OD = 35$ cm. Quelle est la nature de $ABCD$? Justifie. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Regarde d'abord où se trouve O sur chaque diagonale.
Indice 2
Calcule AC et BD.
Indice 3
Point délicat : montre d'abord que c'est un parallélogramme. Des diagonales de même longueur seules ne suffisent pas.

Réponse
Un parallélogramme. O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$. Les diagonales ont le même milieu, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Les diagonales. On a $AC = 35 + 35 = 70$ cm et $BD = 70$ cm : elles ont la même longueur.

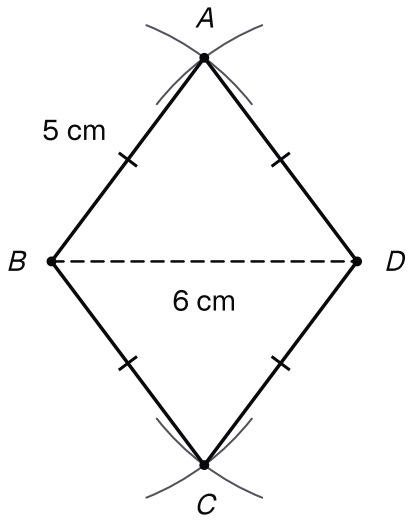
Conclusion. D'après la propriété des diagonales de même longueur, le parallélogramme $ABCD$ est un rectangle.

Le losange

Quatre côtés égaux

Trace un segment $[BD]$ de 6 cm. Ouvre ton compas de 5 cm. Trace un arc de centre B et un arc de centre D au-dessus de $[BD]$: ils se coupent en A. Fais de même au-dessous : tu obtiens C.

Trace $ABCD$. Ses quatre côtés mesurent 5 cm : ils viennent tous du même écartement du compas.



Le losange tracé au compas : [BD] mesure 6 cm, puis A et C sont à 5 cm de B et de D, au croisement des arcs.

Vérifie : Trois quadrilatères

Trois quadrilatères $ABCD$ sont décrits par leurs côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$, dans cet ordre. Lequel a quatre côtés de même longueur ?

A. Côtés de 5 cm, 5 cm, 5 cm et 5 cm.

Juste.

Oui. Ses quatre côtés ont la même longueur.

B. Côtés de 5 cm, 5 cm, 3 cm et 3 cm.

Faux.

Faux. Deux côtés consécutifs sont égaux, puis deux autres : c'est la forme d'un cerf-volant.

C. Côtés de 5 cm, 3 cm, 5 cm et 3 cm.

Faux.

Faux. Ses côtés opposés sont égaux, mais pas ses côtés consécutifs.

Correction

C'est le premier : **5 cm, 5 cm, 5 cm et 5 cm**. Les deux autres ont des côtés de longueurs différentes.

La définition

Définition : Le losange

Un **losange** est un quadrilatère qui a **quatre côtés de même longueur**.

Dans un losange $ABCD$, on a donc $AB = BC = CD = DA$.

En clair : un losange, c'est quatre côtés de la même longueur. Le compas est son outil : il reporte une même longueur quatre fois. Un panneau routier « priorité » a cette forme.

Exemple : Exemple et contre-exemple

Dans un losange $MNPQ$, on a $MN = 4$ cm. D'après la définition du losange, $NP = PQ = QM = 4$ cm.

En revanche, un quadrilatère $ABCD$ avec $AB = BC = CD = 6$ cm et $DA = 4$ cm n'est pas un losange. Un seul côté différent suffit.

Les diagonales du losange

Devine : Une croix dans le losange

Reprends le losange construit au compas. Trace ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Que prévois-tu ?

A. Elles ont la même longueur.

Faux.

Faux. Dans ton losange, $[AC]$ et $[BD]$ n'ont pas la même longueur : mesure-les.

B. Elles sont perpendiculaires, et seule $[BD]$ est coupée en son milieu.

Faux.

Faux. Les deux diagonales sont coupées en leur milieu.

C. Elles sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

Juste.

Oui. Vérifie l'angle à l'équerre et les longueurs à la règle.

D. Elles sont parallèles.

Faux.

Faux. Trace-les : dans ton losange, les diagonales se croisent. Elles ne peuvent donc pas être parallèles.

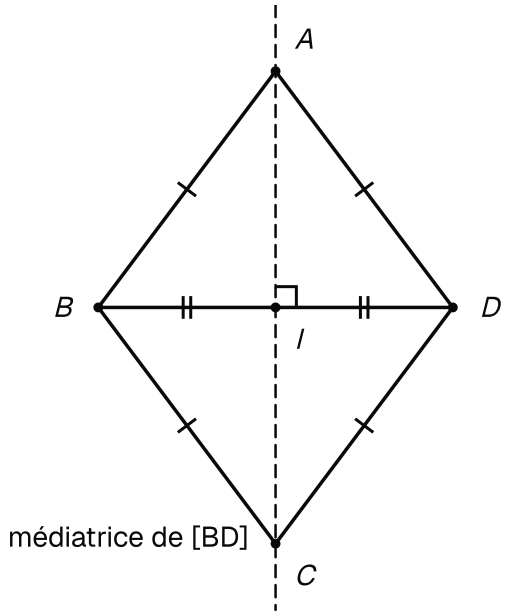
Correction

Les diagonales sont **perpendiculaires** et se coupent **en leur milieu**. La propriété suivante le prouve.

Pourquoi est-ce vrai ? L'outil clé est la médiatrice.

Rappel : un point à la même distance de B et de D est sur la médiatrice de $[BD]$.

Dans un losange, A est à la même distance de B et de D, et C aussi. Les points A et C sont donc sur la médiatrice de $[BD]$.



A et C, chacun à égale distance de B et de D, se trouvent sur la médiatrice de [BD], qui coupe [BD] en son milieu I.

La preuve

Propriété : Les diagonales du losange

Les diagonales d'un losange sont **perpendiculaires** et ont **le même milieu**.

Par conséquent, tout losange est un **parallélogramme**.

Démonstration

Étape 1. Soit $ABCD$ un losange. Comme $AB = AD$, d'après la propriété de la médiatrice, A est sur la médiatrice de $[BD]$. De même, $CB = CD$, donc C est sur cette médiatrice. Comme $A \neq C$, la médiatrice de $[BD]$ est la droite (AC).

Étape 2. Donc $(AC) \perp (BD)$, et (AC) passe par le milieu I de $[BD]$.

Étape 3. De même, $BA = BC$ et $DA = DC$: la droite (BD) est la médiatrice de $[AC]$: elle passe par son milieu J.

Étape 4. I et J sont sur (AC) et sur (BD). Ces droites perpendiculaires n'ont qu'un point commun, donc $I = J$: les diagonales ont le même milieu.

Étape 5. Or un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme : $ABCD$ est donc un parallélogramme.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve tient en trois idées :

- deux points distincts, chacun à la même distance de B et de D, sont sur la médiatrice de $[BD]$: la droite qui les joint est cette médiatrice ;
- on raisonne de la même façon avec l'autre diagonale ;
- les deux milieux sont sur deux droites perpendiculaires, qui n'ont qu'un point commun : ils sont confondus.

Le losange est donc un parallélogramme.

Vérifie : La médiatrice de la diagonale

Les points A et C sont tous deux sur la médiatrice de $[BD]$. Quelle propriété sert à dire que la droite (AC) est cette médiatrice ?

A. Le point A vérifie $AB = AD$.

Faux.

Faux. $AB = AD$ place seulement A sur la médiatrice : il faut un second point.

B. Deux points distincts déterminent une seule droite.

Juste.

Oui. A et C sont distincts : ils déterminent la droite (AC).

C. Les diagonales d'un losange ont la même longueur.

Faux.

Faux. Les diagonales d'un losange n'ont pas toujours la même longueur.

D. Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu.

Faux.

Faux. On ne sait pas encore que le losange est un parallélogramme : la preuve le montre à la fin.

Correction

Les sommets d'un losange sont quatre points distincts, donc $A \neq C$.

Deux points distincts déterminent une seule droite : la droite (AC) est cette médiatrice de $[BD]$.

Exemple : des longueurs dans le losange

Mesure les diagonales de ton losange à la règle : $AC = 8$ cm et $BD = 6$ cm.

Elles se coupent en leur milieu O : $OA = OC = 4$ cm et $OB = OD = 3$ cm. L'angle $\widehat{AOB}$ est droit.

Le losange est aussi un parallélogramme : ses côtés opposés sont parallèles.

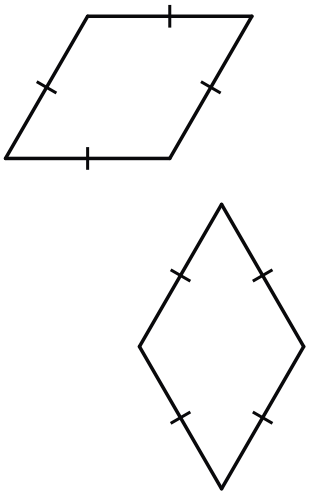
À toi

Attention : la position ne compte pas

✗ « Cette figure n'est pas un losange, car elle n'est pas posée sur une pointe. »

✓ Tourne ta feuille : la figure ne change pas. On reconnaît un losange à ses côtés, jamais à sa position sur la page.

De même, ses diagonales n'ont pas besoin d'être égales : quand elles le sont, le losange est un carré.



Un même losange dessiné deux fois : à gauche il repose sur un côté, à droite il tient sur une pointe.

À toi : Un losange à compléter

$RSTU$ est un losange de centre O. On sait que $RT = 10$ cm et $SU = 24$ cm. Donne OR, OS et la mesure de l'angle $\widehat{ROS}$. Justifie. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pense à la propriété des diagonales du losange.
Indice 2
O est le milieu de chaque diagonale : divise par 2.
Indice 3
Point délicat : $[RT]$ et $[SU]$ sont les deux diagonales. OR se calcule avec RT, et OS avec SU.

Réponse

Les demi-diagonales. Les diagonales du losange se coupent en leur milieu O. Donc $OR = 10 \div 2 = 5$ cm et $OS = 24 \div 2 = 12$ cm.

L'angle. Ces diagonales se coupent à angle droit : $\widehat{ROS} = 90°$.

Conclusion. $OR = 5$ cm, $OS = 12$ cm et l'angle $\widehat{ROS}$ est droit. Si tu traces la figure, tu mesures $RS = 13$ cm.

Reconnaître un losange

Deux côtés consécutifs

Devine : Deux côtés connus

Le parallélogramme $ABCD$ a $AB = 6$ cm et $BC = 6$ cm. Que peux-tu dire de sa nature ?

A. C'est un rectangle.

Faux.

Faux. On ne sait rien de ses angles.

B. Il faut mesurer CD et DA pour savoir.

Faux.

Faux. Le parallélogramme donne ces deux longueurs sans mesure.

C. C'est un carré.

Faux.

Faux. Il faudrait aussi un angle droit.

D. C'est un losange.

Juste.

Oui. Ses côtés opposés recopient les deux longueurs de 6 cm.

Correction

C'est un **losange**. Dans un parallélogramme, $CD = AB$ et $DA = BC$: les quatre côtés mesurent 6 cm.

Pourquoi est-ce vrai ? Un parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur. Connaître deux côtés qui se suivent, c'est donc connaître les quatre.

La preuve

Propriété : Parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux

Si un **parallélogramme** a **deux côtés consécutifs de même longueur**, alors c'est un losange.

Démonstration

Étape 1. Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = BC$. Les côtés $[AB]$ et $[BC]$ sont consécutifs : ils ont le sommet B en commun.

Étape 2. Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur. Donc $CD = AB$ et $DA = BC$.

Étape 3. On obtient $AB = BC = CD = DA$. Les quatre côtés ont la même longueur : $ABCD$ est un losange.

À retenir **: Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Les côtés opposés de même longueur recopient les deux longueurs connues sur les deux autres côtés. Il faut que les deux côtés connus se suivent : sinon, on recopie deux fois la même longueur.

Vérifie : Pourquoi « consécutifs » ?

Le parallélogramme $EFGH$ a $EF = GH = 6$ cm. Est-ce forcément un losange ?

A. Oui, car deux de ses côtés sont égaux.
Faux.
Faux. $[EF]$ et $[GH]$ sont opposés : ils ont la même longueur dans tout parallélogramme.

B. Pas forcément : ces côtés sont opposés.
Juste.
Oui. $EF = GH$ est vrai dans tout parallélogramme. On ne sait rien de FG.

C. Oui, car $EF = GH = 6$ cm, donc les quatre côtés sont égaux.
Faux.
Faux. $EF = GH$ ne dit rien de FG et de HE : ils peuvent mesurer 4 cm.

Correction
Pas forcément. $[EF]$ et $[GH]$ sont des côtés **opposés**. Leur égalité est vraie dans tout parallélogramme. Il faut deux côtés **consécutifs** de même longueur.

Exemple **: Exemple et contre-exemple**

Le parallélogramme $KLMN$ a $KL = 5$ cm et $LM = 5$ cm.

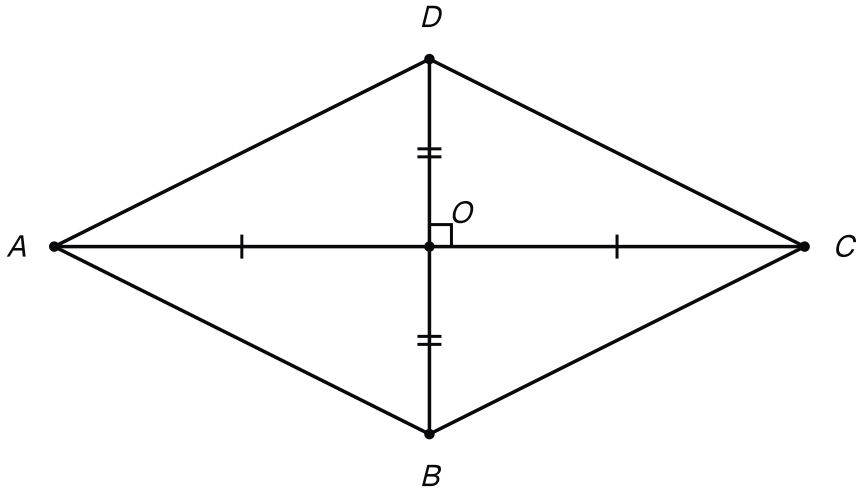
Les côtés $[KL]$ et $[LM]$ ont le sommet L en commun : ils sont consécutifs. D'après la propriété des deux côtés consécutifs, $KLMN$ est un losange.

Avec $KL = 5$ cm et $LM = 3$ cm, le parallélogramme n'est pas un losange.

Des diagonales perpendiculaires

Trace deux segments $[AC]$ de 8 cm et $[BD]$ de 4 cm. Fais-les se couper en leur milieu O, à angle droit. Trace $ABCD$ et mesure ses côtés : ils sont égaux.

Pourquoi est-ce vrai ? Le milieu commun et l'angle droit font de (AC) la médiatrice de $[BD]$.



[AC] de 8 cm et [BD] de 4 cm se coupent en leur milieu O, à angle droit : il reste à mesurer les côtés de ABCD.

Propriété : Parallélogramme aux diagonales perpendiculaires

Si un **parallélogramme** a des diagonales **perpendiculaires**, alors c'est un losange.

Démonstration

Étape 1. Soit $ABCD$ un parallélogramme dont les diagonales se coupent en O, avec $(AC) \perp (BD)$. Dans un parallélogramme, les diagonales ont le même milieu : O est le milieu de $[BD]$.

Étape 2. La droite (AC) est perpendiculaire à $[BD]$ et passe par son milieu O : c'est la médiatrice de $[BD]$.

Étape 3. Le point A est sur cette médiatrice. D'après la propriété de la médiatrice, $AB = AD$.

Étape 4. Les côtés $[AB]$ et $[AD]$ sont consécutifs et ont la même longueur. D'après la propriété des deux côtés consécutifs, le parallélogramme $ABCD$ est un losange.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une droite perpendiculaire à un segment, qui passe par son milieu, est sa médiatrice. Le parallélogramme fournit le milieu, l'hypothèse fournit l'angle droit. Ensuite, la propriété des deux côtés consécutifs termine la preuve.

Vérifie : Le milieu de la diagonale

Quelle propriété sert à dire que la droite (AC) passe par le milieu de $[BD]$?

A. Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu.

Juste.

Oui. C'est pour cela qu'il faut savoir que $ABCD$ est un parallélogramme.

B. Le fait que les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

Faux.

Faux. L'angle droit ne dit pas où les diagonales se coupent.

C. L'égalité $AB = AD$.

Faux.

Faux. Cette égalité vient après : c'est une conséquence de la médiatrice.

D. Le point A est sur la médiatrice.

Faux.

Faux. On ne le sait qu'après avoir trouvé la médiatrice.

Correction

Dans un parallélogramme, les diagonales ont le même milieu. Donc O est le milieu de $[BD]$, et (AC) passe par O.

Exemple : un losange par ses diagonales

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O, avec $(AC) \perp (BD)$, $OA = 6$ cm et $OB = 8$ cm.

D'après la propriété des diagonales perpendiculaires, $ABCD$ est un losange.

Trace-le et mesure AB : tu trouves 10 cm. Ses quatre côtés mesurent donc 10 cm.

La méthode

Méthode : démontrer qu'un quadrilatère est un losange

1. **Regarder les côtés** : si l'énoncé donne quatre côtés égaux, la définition conclut.
2. **Passer par le parallélogramme** : sinon, montre d'abord que c'est un parallélogramme. Cherche ensuite deux côtés consécutifs égaux, ou des diagonales perpendiculaires.
3. **Rédiger** : écris « D'après la propriété… », puis la conclusion.

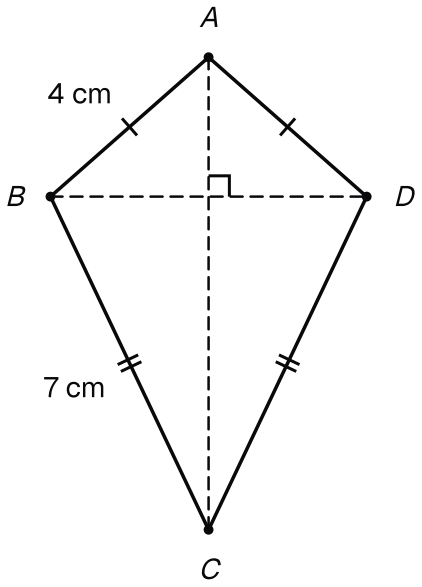
Attention : le cerf-volant

Trace un cerf-volant $ABCD$: $AB = AD = 4$ cm et $CB = CD = 7$ cm, avec A et C de part et d'autre de (BD). Trace ses diagonales : elles sont perpendiculaires.

✗ « Ses diagonales sont perpendiculaires, donc c'est un losange. »

✓ Ses côtés ne sont pas tous égaux. Ses diagonales n'ont pas le même milieu : ce n'est pas un parallélogramme.

La propriété exige un parallélogramme.



Le cerf-volant ABCD : AB = AD = 4 cm et CB = CD = 7 cm, des diagonales perpendiculaires, et pourtant pas un losange.

À toi : Un parallélogramme à reconnaître

Les diagonales du parallélogramme $KLMN$ se coupent en O. L'angle $\widehat{KOL}$ est droit et $KL = 4$ cm. Quelle est la nature de $KLMN$? Donne la longueur LM. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
$\widehat{KOL}$ est l'angle entre les deux diagonales.
Indice 2
Une propriété parle d'un parallélogramme aux diagonales perpendiculaires.
Indice 3
Point délicat : la longueur demandée découle de la nature de la figure, pas d'une mesure.

Réponse
Les diagonales. L'angle $\widehat{KOL}$ est droit, donc $(KM) \perp (LN)$.

La nature. D'après la propriété des diagonales perpendiculaires, le parallélogramme $KLMN$ est un losange.

Conclusion. $KLMN$ est un losange. Ses quatre côtés ont la même longueur : $LM = KL = 4$ cm.

Le carré

Le carré

Devine : Un carreau de faïence

Un carreau de faïence a quatre côtés de 15 cm et quatre angles droits. Est-ce un rectangle ?

A. Non, car c'est un carré.

Faux.

Faux. Être un carré n'empêche pas d'être un rectangle.

B. Non, car ses côtés sont tous égaux.

Faux.

Faux. La définition du rectangle ne parle pas des côtés.

C. Oui, car il a quatre angles droits.

Juste.

Oui. Quatre angles droits : c'est la définition du rectangle.

D. Seulement s'il est posé bien droit.

Faux.

Faux. La position ne change jamais la nature d'une figure.

Correction

Oui. Il a quatre angles droits : d'après la définition du rectangle, c'est un rectangle. C'est aussi un carré.

Définition **: Le carré**

Un **carré** est un quadrilatère qui a **quatre angles droits** et **quatre côtés de même longueur**.

Exemple **: le carreau**

Le carreau de faïence a quatre angles droits et quatre côtés de 15 cm. D'après la définition du carré, c'est un carré.

Il a les quatre angles droits du rectangle et les quatre côtés égaux du losange.

Est-ce vrai de tout carré ? Pourquoi est-ce vrai ? Compare les trois définitions : la propriété suivante le prouve.

Rectangle et losange à la fois

Propriété : Le carré est un rectangle et un losange

Un carré est **à la fois un rectangle et un losange**.

Il a donc toutes leurs propriétés. En particulier, ses diagonales ont **la même longueur**, **le même milieu**, et elles sont **perpendiculaires**.

Démonstration

Étape 1. Soit $ABCD$ un carré. Il a quatre angles droits : d'après la définition du rectangle, c'est un rectangle.

Étape 2. Il a quatre côtés de même longueur : d'après la définition du losange, c'est un losange.

Étape 3. Comme $ABCD$ est un rectangle, ses diagonales ont la même longueur et le même milieu (propriété des diagonales du rectangle, admise). Comme $ABCD$ est un losange, ses diagonales sont perpendiculaires (propriété des diagonales du losange).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La définition du carré contient celle du rectangle et celle du losange. Le carré reçoit donc leurs propriétés. Une propriété admise, celle des diagonales du rectangle, peut servir dans une preuve.

Vérifie : Des diagonales perpendiculaires

Pourquoi les diagonales d'un carré sont-elles perpendiculaires ?

A. Parce que le carré est un rectangle.

Faux.

Faux. Les diagonales d'un rectangle ne sont pas perpendiculaires en général.

B. Parce que ses côtés opposés sont parallèles.

Faux.

Faux. C'est vrai de tout parallélogramme, et ses diagonales ne sont pas toujours perpendiculaires.

C. Parce que ses diagonales ont la même longueur.

Faux.

Faux. Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur sans être perpendiculaires.

D. Parce que le carré est un losange.

Juste.

Oui. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

Correction

> Le carré a quatre côtés de même longueur : c'est un losange. Or les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

Exemple : les diagonales d'un carré

$ABCD$ est un carré de centre O, et $AC = 10$ cm. Ses diagonales :

- ont la même longueur : $BD = 10$ cm ;
- ont le même milieu : $OA = OB = OC = OD = 5$ cm ;
- sont perpendiculaires : $\widehat{AOB} = 90°$.

Reconnaître un carré

Un rectangle a deux côtés consécutifs de 9 cm. Un losange a un angle droit. Dans les deux cas, c'est un carré.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque figure a déjà une moitié de la définition du carré : il reste à trouver l'autre.

Propriété : Reconnaître un carré

- Si un **rectangle** a **deux côtés consécutifs de même longueur**, alors c'est un carré.
- Si un **losange** a **un angle droit**, alors c'est un carré.

Démonstration

Étape 1. Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = BC$. Tout rectangle est un parallélogramme, donc ses côtés opposés ont la même longueur : $CD = AB$ et $DA = BC$. Ainsi $AB = BC = CD = DA$. $ABCD$ a quatre angles droits et quatre côtés de même longueur : c'est un carré.

Étape 2. Soit $ABCD$ un losange qui a un angle droit. Tout losange est un parallélogramme. Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle : $ABCD$ a donc quatre angles droits.

Étape 3. $ABCD$ a aussi quatre côtés de même longueur, car c'est un losange. C'est donc un carré.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On passe par le parallélogramme. Le rectangle en est un : ses côtés opposés recopient les longueurs. Le losange en est un : avec un angle droit, c'est un rectangle. La définition du carré conclut.

Vérifie : Le losange qui a un angle droit

Un losange a un angle droit. Quelle propriété sert à dire qu'il a quatre angles droits ?

A. C'est un parallélogramme qui a un angle droit, donc un rectangle.
Juste.
Oui. Tout losange est un parallélogramme, puis on utilise l'angle droit.

B. Ses quatre côtés ont la même longueur, comme dans tout losange.
Faux.
Faux. Des côtés égaux ne disent rien des angles.

C. Ses diagonales sont perpendiculaires.
Faux.
Faux. C'est vrai de tout losange, même sans angle droit.

D. Par la définition du carré.
Faux.
Faux. On ne sait pas encore que c'est un carré : c'est ce qu'on veut prouver.

Correction
Tout losange est un parallélogramme. Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle : il a donc quatre angles droits.

Exemple **: Exemple et contre-exemple**

Un losange $EFGH$ a des côtés de 6 cm et un angle $\widehat{E}$ droit. D'après la propriété du losange qui a un angle droit, $EFGH$ est un carré.

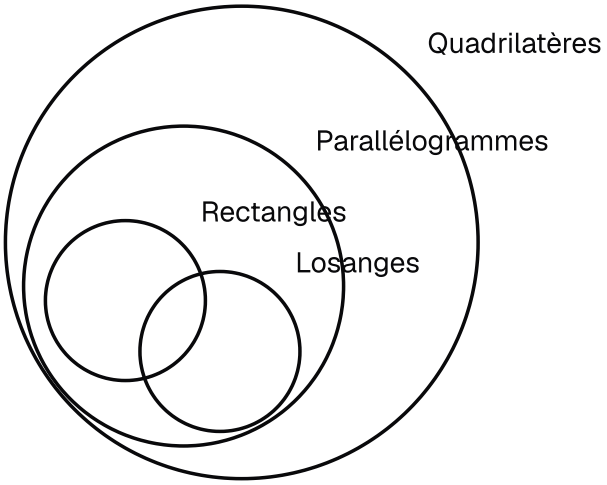
Un rectangle de 9 cm sur 5 cm n'est pas un carré : ses côtés consécutifs n'ont pas la même longueur.

Les familles de quadrilatères

Les quadrilatères particuliers sont rangés comme des poupées russes :

- chaque carré est en même temps rectangle et losange ;
- tout rectangle et tout losange sont des parallélogrammes ;
- donc tout carré est aussi un parallélogramme.

Un carré a toutes les propriétés du rectangle, du losange et du parallélogramme.



Les familles emboîtées : rectangles et losanges sont des parallélogrammes, et les carrés occupent leur partie commune.

Méthode : démontrer qu'un quadrilatère est un carré

1. **Partir du rectangle** : montre que c'est un rectangle, puis trouve deux côtés consécutifs de même longueur.
2. **Ou partir du losange** : montre que c'est un losange, puis trouve un angle droit.
3. **Conclure** : nomme la propriété utilisée et écris « donc c'est un carré ».

Attention : un carré est un rectangle

✗ « Mon carreau n'est pas un rectangle : c'est un carré. »

✓ Un carré a quatre angles droits : c'est un rectangle particulier. C'est aussi un losange particulier. Dans l'autre sens, c'est faux : un rectangle n'est pas toujours un carré.

À toi : Un écran carré

Une montre a un écran $ABCD$ en forme de rectangle. On mesure $AB = 4$ cm et $BC = 4$ cm. Quelle est la nature de $ABCD$? Combien mesurent CD et DA ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
$[AB]$ et $[BC]$ ont un sommet commun : lequel ?
Indice 2
Une propriété parle d'un rectangle qui a deux côtés consécutifs égaux.

Indice 3
Point délicat : pour les longueurs, utilise les côtés opposés du rectangle, qui est un parallélogramme.

Réponse
Deux côtés consécutifs. $[AB]$ et $[BC]$ ont le sommet B en commun : ils sont consécutifs, et ils ont la même longueur.

La nature. D'après la propriété du rectangle qui a deux côtés consécutifs égaux, $ABCD$ est un carré.

Les autres côtés. Tout rectangle est un parallélogramme : $CD = AB = 4$ cm et $DA = BC = 4$ cm.

Conclusion. $ABCD$ est un carré, et ses côtés $[CD]$ et $[DA]$ mesurent 4 cm.

Centre et axes de symétrie

Plier et tourner

Rappel du primaire : une droite est un **axe de symétrie** d'une figure si, en pliant le long de cette droite, les deux moitiés se superposent.

Un point est le **centre de symétrie** d'une figure si, quand tu fais faire un demi-tour au calque autour de ce point, la figure retombe exactement sur elle-même.

Devine : Plier le long d'une diagonale

Décalque un rectangle de 8 cm sur 4 cm. Plie le calque le long d'une diagonale. Que prévois-tu ?

A. Les deux moitiés se superposent exactement.
Faux.
Faux. Essaie : les coins dépassent de chaque côté du pli.

B. Les deux moitiés ne se superposent pas.
Juste.
Oui. Pour un rectangle qui n'est pas un carré, une diagonale n'est pas un axe de symétrie.

C. Cela dépend de la diagonale choisie.
Faux.
Faux. Les deux diagonales donnent le même résultat : aucune superposition.

Correction
Les moitiés **ne se superposent pas**. Une diagonale d'un rectangle de 8 cm sur 4 cm n'est pas un axe de symétrie.

Centre et axes

Exemple : le demi-tour du calque

Décalque un rectangle $ABCD$ et ses diagonales, qui se coupent en O. Pique la pointe de ton compas en O, à travers le calque. Fais tourner le calque d'un demi-tour.

A vient sur C, B vient sur D : le rectangle retombe sur lui-même.

Plie ensuite le long de la droite qui joint les milieux de $[AB]$ et de $[DC]$: les moitiés se superposent.

Propriété : Centre et axes de symétrie

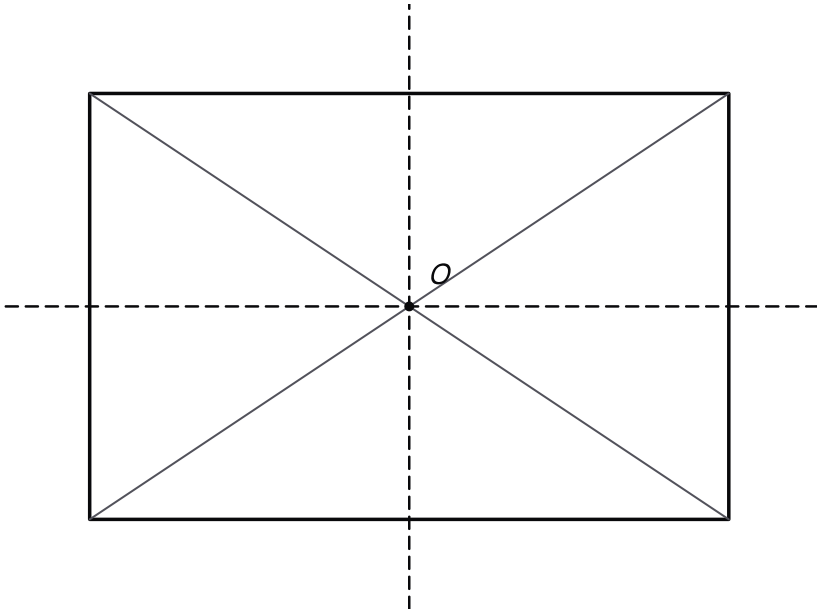
- Le point d'intersection des diagonales d'un rectangle, d'un losange ou d'un carré est son **centre de symétrie**.
- Un rectangle qui n'est pas un carré a **deux axes de symétrie** : les médiatrices de ses côtés.
- Un losange qui n'est pas un carré a **deux axes de symétrie** : ses diagonales.
- Un carré a **quatre axes de symétrie** : les médiatrices de ses côtés et ses diagonales.

Remarque

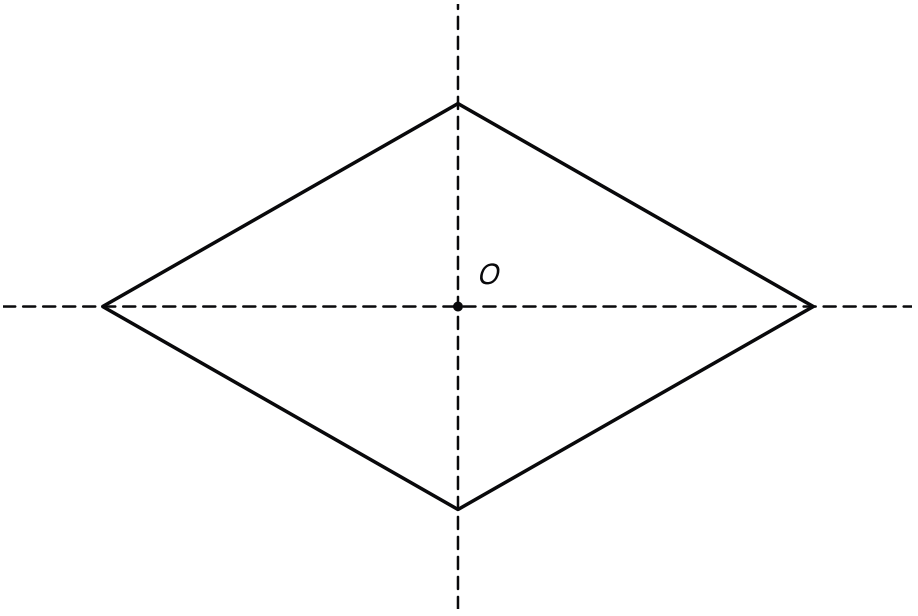
Ce résultat est admis. Tu l'as observé avec le papier calque et le pliage.

Exemple : compter les axes

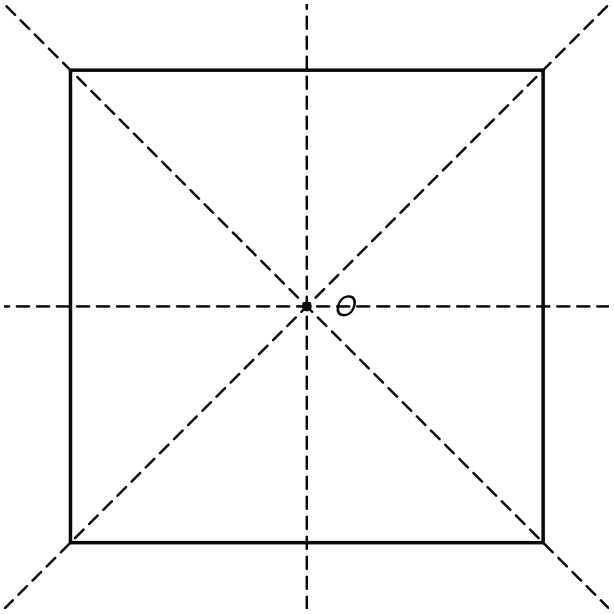
- Un cadre rectangulaire de 30 cm sur 20 cm a deux axes : les médiatrices de ses côtés.
- Un panneau en losange, s'il n'est pas carré, a deux axes : ses diagonales.
- Un carreau carré en a quatre : les deux médiatrices de ses côtés et ses deux diagonales.



Le cadre de 30 cm sur 20 cm : ses deux axes de symétrie, les médiatrices de ses côtés, se croisent en son centre O.



Le panneau en losange, qui n'est pas un carré : ses deux axes de symétrie sont ses diagonales, qui se coupent en O.



Le carreau carré et ses quatre axes : les deux médiatrices de ses côtés et ses deux diagonales, tous passant par O.

La méthode

Méthode : trouver le centre et les axes de symétrie

1. **Trouver le centre** : trace les deux diagonales. Leur point commun est le centre de symétrie.
2. **Essayer un axe** : décalque la figure et plie le calque le long de la droite choisie. Les moitiés se superposent : c'est un axe. Sinon, ce n'en est pas un.
3. **Contrôler le nombre** : un rectangle non carré a deux axes, un losange non carré aussi. Un carré en a quatre.

Attention : les diagonales du rectangle

✗ « Les diagonales d'un rectangle sont ses axes de symétrie. »

✓ Prends un rectangle plus long que large. Plie-le suivant une diagonale : les coins dépassent. Ses axes sont les médiatrices de ses côtés.

Les diagonales sont des axes pour le losange et le carré.

À toi : Un panneau en losange

Un panneau a la forme d'un losange $ABCD$ qui n'est pas un carré. Ses diagonales se coupent en O. Quel est son centre de symétrie ? Quels sont ses axes ? Après un demi-tour du calque autour de O, quel sommet vient sur A ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Le centre se trouve sur les deux diagonales à la fois.

Indice 2

Pour un losange qui n'est pas un carré, regarde ses diagonales comme des plis.

Indice 3

Point délicat : quand le calque fait un demi-tour autour de O, chaque sommet vient sur l'autre bout de sa diagonale.

Réponse

Le centre. Le centre de symétrie est O, le point d'intersection des diagonales.

Les axes. Le losange n'est pas un carré : ses axes sont ses deux diagonales, (AC) et (BD).

Le demi-tour. O est le milieu de $[AC]$: après un demi-tour du calque autour de O, c'est C qui vient sur A.

Conclusion. Le centre est O, les axes sont (AC) et (BD), et le sommet C vient sur A.

Construire un quadrilatère particulier

Choisir les bonnes diagonales

Pour construire une figure, tu choisis tes tracés grâce à une propriété. Ensuite, tu justifies que la figure obtenue est bien la bonne. Les diagonales donnent un chemin rapide.

Vérifie : Un losange à construire

Tu veux construire un losange dont les diagonales mesurent 10 cm et 6 cm. Comment traces-tu ces diagonales ?

A. Perpendiculaires, et se coupant n'importe où.

Faux.

Faux. Tu risques d'obtenir un cerf-volant : il faut le même milieu.

B. De même longueur, sans autre condition.

Faux.

Faux. Ici les diagonales font 10 cm et 6 cm : elles n'ont pas la même longueur. Pour un losange, il faut le même milieu et un angle droit.

C. De même milieu et perpendiculaires.

Juste.

Oui. Même milieu : parallélogramme. Perpendiculaires : losange.

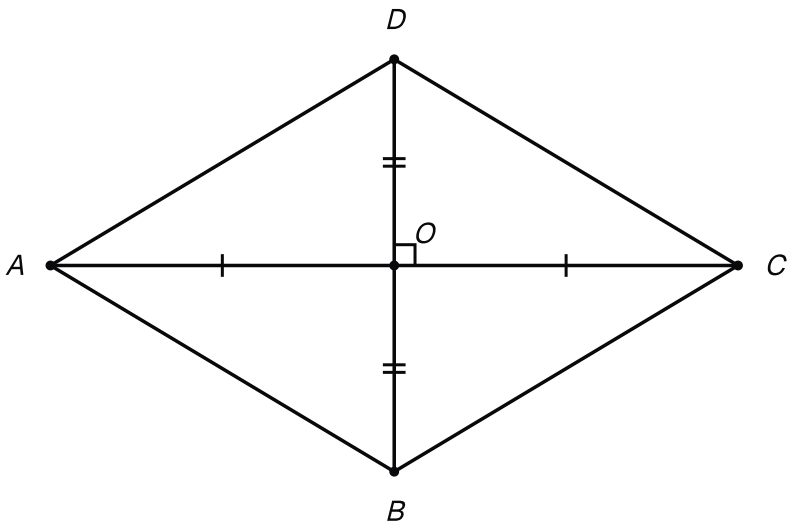
Correction

Trace deux segments de 10 cm et 6 cm **de même milieu** et **perpendiculaires**. Le même milieu donne un parallélogramme ; l'angle droit en fait un losange.

La méthode

Méthode : construire à partir des diagonales

1. **Tracer la première diagonale** et marquer son milieu.
2. **Tracer la seconde** sur une autre droite, avec le même milieu : la figure sera un parallélogramme. Pour un rectangle, donne-lui la même longueur. Pour un losange, trace-la perpendiculaire. Pour un carré, fais les deux.
3. **Justifier** : nomme la propriété qui garantit la nature de la figure.



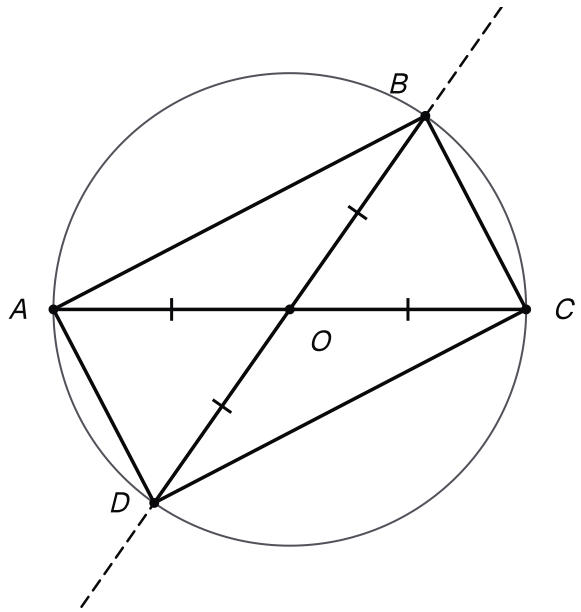
Un losange construit par ses diagonales : [AC] de 10 cm et [BD] de 6 cm, de même milieu O et perpendiculaires.

Exemple : un rectangle au compas

Trace $[AC]$ de 10 cm et marque son milieu O. Trace le cercle de centre O et de rayon 5 cm. Trace une droite qui passe par O, autre que (AC) : elle coupe le cercle en B et en D.

$[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu O : $ABCD$ est un parallélogramme.

Elles mesurent toutes deux 10 cm. D'après la propriété des diagonales de même longueur, $ABCD$ est un rectangle.



Le rectangle au compas : B et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 5 cm, sur une droite qui passe par O.

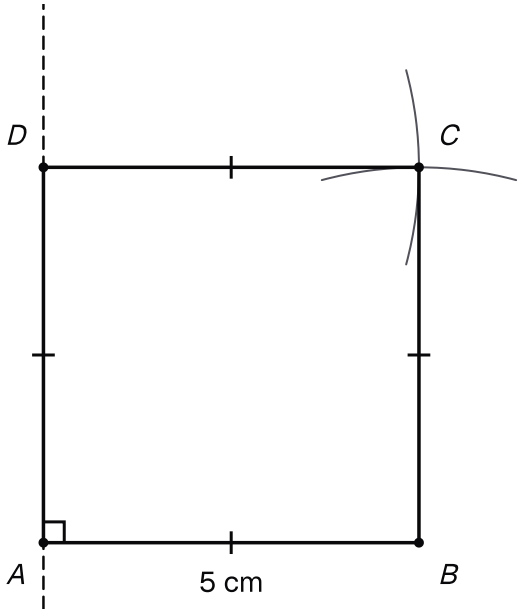
Partir d'un côté

Exemple : un carré à partir d'un côté

Trace $[AB]$ de 5 cm. Trace à l'équerre la perpendiculaire à (AB) en A et place-y D, avec $AD = 5$ cm, du côté de (AB) que tu veux.

Trace un arc de centre B et un arc de centre D, de rayon 5 cm : ils se coupent en A et en un second point, C.

Par construction, les quatre côtés mesurent 5 cm : $ABCD$ est un losange. Il a un angle droit en A. D'après la propriété du losange qui a un angle droit, c'est un carré.



Le carré à partir d'un côté : [AB] de 5 cm, D sur la perpendiculaire en A, puis C au croisement de deux arcs de rayon 5 cm.

À toi : Un carré par ses diagonales

Décris la construction d'un carré dont les diagonales mesurent 8 cm. Justifie que la figure est bien un carré. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Choisis d'abord le point commun des deux diagonales.
Indice 2
Il te faut trois conditions sur les diagonales.
Indice 3
Point délicat : la justification passe par le rectangle et par le losange.

Réponse
Construction. Trace $[AC]$ de 8 cm, de milieu O. Trace la perpendiculaire à (AC) en O et place-y B et D à 4 cm de O, de part et d'autre.

Justification.

- Les diagonales ont le même milieu : $ABCD$ est un parallélogramme.
- Elles ont la même longueur : c'est un rectangle.
- Elles sont perpendiculaires : c'est un losange.

Conclusion. Rectangle et losange à la fois, $ABCD$ a quatre angles droits et quatre côtés égaux : c'est un carré.

Ce qu'il faut savoir faire

Le rectangle

- Côtés : opposés parallèles et de même longueur.
- Angles : quatre angles droits.
- Diagonales : même longueur et même milieu.
- Symétries : un centre, le point commun des diagonales ; deux axes, les médiatrices des côtés (s'il n'est pas un carré).

Le losange

- Côtés : quatre côtés de même longueur, opposés parallèles.
- Angles : pas forcément droits.
- Diagonales : perpendiculaires et de même milieu.
- Symétries : un centre, le point commun des diagonales ; deux axes, les diagonales (s'il n'est pas un carré).

Le carré

- Côtés : quatre côtés de même longueur, opposés parallèles.
- Angles : quatre angles droits.
- Diagonales : même longueur, même milieu, perpendiculaires.
- Symétries : un centre ; quatre axes, les médiatrices des côtés et les diagonales.

Ce que tu sais faire maintenant

- Reconnaître un rectangle, un losange ou un carré, et le justifier en nommant la propriété.
- Passer par le parallélogramme, puis chercher un angle droit, deux côtés consécutifs égaux ou une propriété des diagonales.
- Calculer une longueur avec les côtés ou les diagonales.
- Construire la figure à la règle, à l'équerre et au compas, puis justifier.
- Trouver le centre et les axes de symétrie par le calque et le pliage.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Quadrilatères particuliers » (1ac · general · mathematiques)