BURHAN

La proportionnalité : Résumé

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/proportionnalite/resume

Chapitre	Semestre
La proportionnalité	Semestre 2

Reconnaître une situation de proportionnalité

Cette fiche rassemble l'essentiel du chapitre. Chaque énoncé est suivi d'un exemple court, d'une méthode et d'une erreur à éviter.

Relis-la avant un devoir, puis entraîne-toi avec les exercices.

Définition : Grandeurs proportionnelles et coefficient de proportionnalité

Deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsqu'on obtient chaque valeur de la seconde en multipliant la valeur correspondante de la première par un même nombre k, non nul. Ce nombre k s'appelle le **coefficient de proportionnalité**.

Un tableau qui donne des valeurs correspondantes de ces deux grandeurs s'appelle alors un **tableau de proportionnalité** :

Première grandeur	a	b	c
Seconde grandeur	$k \times a$	$k \times b$	$k \times c$

Quand les nombres de la première ligne ne sont pas nuls, un tableau est un tableau de proportionnalité si, et seulement si, les quotients de chaque nombre de la seconde ligne par le nombre placé au-dessus sont tous égaux. Leur valeur commune est le coefficient k.

Remarque : En clair

Deux grandeurs sont proportionnelles quand on passe toujours de l'une à l'autre en multipliant par le même nombre.

Pour le savoir, divise chaque nombre du bas par celui du haut : tous les résultats doivent être égaux.

Exemple : le prix des oranges

Au marché, Hind note le prix payé selon la masse d'oranges achetée.

Masse (kg)	2	3	5
Prix (dirhams)	14	21	35

Les quotients valent $\frac{14}{2} = 7$, $\frac{21}{3} = 7$ et $\frac{35}{5} = 7$.

Ils sont égaux : c'est un tableau de proportionnalité de coefficient 7. Le kilogramme d'oranges coûte 7 dirhams.

Exemple : une promotion sur les cahiers

Une librairie fait une promotion quand on achète plusieurs cahiers.

Nombre de cahiers	2	4
Prix (dirhams)	10	18

Les quotients valent $\frac{10}{2} = 5$ et $\frac{18}{4} = 4{,}5$.

Ils sont différents : ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.

Méthode : savoir si un tableau est de proportionnalité

1. **Divise** chaque nombre de la seconde ligne par le nombre écrit au-dessus de lui.
2. **Compare** les résultats obtenus.
3. **Conclus** : des quotients tous égaux donnent un tableau de proportionnalité, et ce quotient commun est le coefficient.
4. **Arrête-toi** dès qu'un quotient diffère des autres : dans ce cas, il n'y a pas proportionnalité.

Attention : augmenter ensemble ne suffit pas

Une salle de jeux demande 20 dirhams d'entrée, puis 5 dirhams par partie.

Pour 2 parties, tu paies $20 + 2 \times 5 = 30$ dirhams. Pour 4 parties, tu paies $20 + 4 \times 5 = 40$ dirhams, et non 60.

✗ « Le prix grandit avec le nombre de parties, donc il lui est proportionnel. »

✓ Les quotients $\frac{30}{2} = 15$ et $\frac{40}{4} = 10$ diffèrent : la situation n'est pas proportionnelle.

Compléter un tableau de proportionnalité

Propriété : Calculs sur les colonnes d'un tableau de proportionnalité

Dans un tableau de proportionnalité :

- si l'on **multiplie** les deux nombres d'une colonne par un même nombre non nul, on obtient deux nombres qui forment encore une colonne du tableau ; de même si on les **divise** par un même nombre non nul ;

- si l'on **additionne** deux colonnes, nombre à nombre, on obtient deux nombres qui forment encore une colonne du tableau ; de même si l'on **soustrait** une colonne d'une autre.

Par exemple, si 3 objets coûtent 12 dirhams et 5 objets coûtent 20 dirhams, alors 8 objets coûtent $12 + 20 = 32$ dirhams, et 6 objets coûtent $2 \times 12 = 24$ dirhams.

Exemple : le sucre des gâteaux

Dans une recette, la masse de sucre est proportionnelle au nombre de gâteaux.

Nombre de gâteaux	2	3	5	6
Sucre (g)	120	180	300	360

- La colonne de 5 gâteaux est la somme des deux premières : $120 + 180 = 300$.
- La colonne de 6 gâteaux est le double de celle de 3 : $2 \times 180 = 360$.

Propriété : Égalité des produits en croix et quatrième proportionnelle

Soit a, b, c et d quatre nombres non nuls, placés dans un tableau à deux colonnes :

Première ligne	a	c
Seconde ligne	b	d

Ce tableau est un tableau de proportionnalité si, et seulement si, les **produits en croix** sont égaux : $a \times d = b \times c$.

Lorsque le tableau est un tableau de proportionnalité et que trois de ces nombres sont connus, cette égalité donne le quatrième, appelé **quatrième proportionnelle**. Par exemple, si d est inconnu : $d = \dfrac{b \times c}{a}$.

Remarque : En clair

Quand deux colonnes d'un tableau de proportionnalité contiennent trois nombres connus, ils suffisent pour trouver le dernier. Ce nombre cherché s'appelle la **quatrième proportionnelle**.

Multiplie les deux nombres connus placés en diagonale, puis divise par le troisième.

Exemple : le prix du tissu

Chez le tailleur, 4 m de tissu coûtent 120 dirhams. Cherche le prix x de 7 m du même tissu.

Longueur (m)	4	7
Prix (dirhams)	120	x

D'après l'égalité des produits en croix :

$$4 \times x = 120 \times 7 = 840.$$

Donc $x = \dfrac{840}{4} = 210$. Les 7 m de tissu coûtent 210 dirhams.

Méthode : trouver un nombre manquant

1. **Repère** une colonne remplie : en divisant ses deux nombres, tu obtiens le coefficient, qui sert pour toutes les cases vides.
2. **Combine** les colonnes connues : un double, une moitié ou une somme peut donner la colonne voulue.
3. **Croise** : avec trois nombres connus sur deux colonnes, l'égalité des produits en croix donne le quatrième.
4. **Vérifie** ta réponse : le quotient de la nouvelle colonne doit redonner le coefficient.

Attention : les produits en croix suivent les diagonales

Masse (kg)	3	8
Prix (dirhams)	12	x

✗ $3 \times 12 = 8 \times x$: ici, chaque produit réunit deux nombres d'une même colonne. On trouverait $x = 4{,}5$ dirhams, moins que pour 3 kg.

✓ On multiplie les nombres placés en diagonale :

$$3 \times x = 12 \times 8 = 96.$$

Donc $x = \dfrac{96}{3} = 32$: les 8 kg coûtent 32 dirhams.

Les pourcentages

Définition : Pourcentage

Soit t un nombre positif. Prendre t **pour cent** d'une quantité A, c'est multiplier A par $\dfrac{t}{100}$:

$$\frac{t}{100} \times A.$$

Le nombre t s'appelle un **pourcentage**. La quantité obtenue est proportionnelle à A, de coefficient $\dfrac{t}{100}$.

Inversement, si une partie P d'une quantité A non nulle représente t pour cent de A, alors $\frac{P}{A} = \frac{t}{100}$, c'est-à-dire $t = \frac{P}{A} \times 100$.

Remarque : En clair

Un pourcentage décrit une part sur 100. Prendre 50 pour cent d'une quantité, c'est en prendre la moitié : 50 parts sur 100.

Exemple : appliquer un pourcentage

Dans un collège de 250 élèves, 40 pour cent viennent à pied.

D'après la définition du pourcentage, leur nombre vaut :

$$\frac{40}{100} \times 250 = 100.$$

Donc 100 élèves viennent à pied.

Exemple : trouver un pourcentage

Hamza réussit 21 questions d'un quiz sur 25. La part réussie est :

$$\begin{aligned} \frac{21}{25} &= \frac{84}{100} \\ &= 0{,}84. \end{aligned}$$

Puis $0{,}84 \times 100 = 84$. Hamza a donc réussi 84 pour cent des questions.

Exemple : un prix soldé

Un sac coûte 180 dirhams. En soldes, il bénéficie d'une réduction de 15 pour cent.

La réduction vaut $\frac{15}{100} \times 180 = 27$ dirhams. Le nouveau prix est $180 - 27 = 153$ dirhams.

Méthode : les trois calculs de pourcentage

1. **Prends** t pour cent d'une quantité : multiplie-la par $\frac{t}{100}$.
2. **Exprime** une partie en pourcentage : divise la partie par le tout, puis multiplie le résultat par 100.
3. **Réduis** un prix : trouve le montant de la réduction, puis soustrais-le du prix initial.
4. **Identifie** d'abord le tout, car le pourcentage porte sur lui.

Attention : pour cent ne veut pas dire dirhams

Un jeu coûte 80 dirhams, avec une réduction de 20 pour cent.

✗ « Je retire 20 dirhams, donc il coûte 60 dirhams. »

✓ La réduction vaut $\frac{20}{100} \times 80 = 16$ dirhams. Le jeu coûte donc $80 - 16 = 64$ dirhams.

Échelles des plans et des cartes

Définition : Échelle d'un plan ou d'une carte

Sur un plan ou une carte, les distances mesurées sont **proportionnelles** aux distances réelles. L'**échelle** est le coefficient de proportionnalité qui permet de passer d'une distance réelle à la distance correspondante sur le plan, les deux distances étant exprimées dans la **même unité** :

$$e = \frac{p}{r},$$

où p est la distance sur le plan et r la distance réelle.

Par exemple, une échelle $\frac{1}{50\,000}$ signifie que 1 cm sur la carte représente $50\,000$ cm en réalité, c'est-à-dire 500 m.

Remarque : En clair

L'échelle dit combien de fois le dessin est plus petit que la réalité. Avec l'échelle $\frac{1}{100}$, 1 cm sur le plan représente 100 cm, soit 1 m, en réalité.

Exemple : calculer l'échelle d'une carte

Sur une carte, 3 cm représentent 6 km en réalité.

Convertis d'abord : 6 km $= 600\,000$ cm. L'échelle vaut :

$$\frac{3}{600\,000} = \frac{1}{200\,000}.$$

Exemple : le plan d'une maison

Le plan d'une maison est à l'échelle $\frac{1}{40}$.

Le salon mesure 9 cm sur le plan. En réalité, il mesure $9 \times 40 = 360$ cm, soit $3{,}6$ m.

Un mur réel de $2{,}4$ m, soit 240 cm, mesure $\frac{240}{40} = 6$ cm sur le plan.

Méthode : travailler avec une échelle

1. **Exprime** les deux distances dans une même unité, par exemple en centimètres.
2. **Calcule** l'échelle : distance sur le plan divisée par la distance réelle.
3. **Retrouve** une distance réelle : avec l'échelle $\frac{1}{n}$, multiplie la mesure prise sur le plan par n.
4. **Trouve** une mesure sur le plan : divise la distance réelle par n, puis choisis une unité pratique.

Attention : une seule unité pour l'échelle

Sur le plan d'un quartier, 5 cm représentent 1 km.

✗ L'échelle vaut $\frac{5}{1} = 5$.

✓ 1 km $= 100\,000$ cm, donc l'échelle vaut :

$$\frac{5}{100\,000} = \frac{1}{20\,000}.$$

Vitesse moyenne et conversions

Définition : Vitesse moyenne

Un véhicule, un piéton ou un objet parcourt une distance d pendant une durée t, non nulle. Sa **vitesse moyenne** v est le quotient de la distance par la durée :

$$v = \frac{d}{t}.$$

S'il avançait toujours à cette vitesse, la distance parcourue serait proportionnelle à la durée, et v serait le coefficient de proportionnalité. On en tire $d = v \times t$ et $t = \frac{d}{v}$.

L'unité de v dépend des unités de d et de t : une distance en kilomètres et une durée en heures donnent une vitesse en kilomètres par heure, notée $\mathrm{km/h}$.

Remarque : En clair

Pour trouver une vitesse moyenne, divise la distance par la durée du trajet. Le résultat ne dit pas que le véhicule a roulé tout le temps à cette vitesse.

Exemple : le car de Fès à Meknès

Un car parcourt 60 km en 45 min. Convertis la durée : 45 min $= \frac{45}{60}$ h $= 0{,}75$ h.

Sa vitesse moyenne vaut :

$$v = \frac{60}{0{,}75} = 80.$$

Le car roule donc à 80 km/h en moyenne.

Exemple : la randonnée

Un randonneur marche à 5 km/h pendant 2 h 30 min, soit $2{,}5$ h.

La distance parcourue vaut :

$$d = 5 \times 2{,}5 = 12{,}5.$$

Le randonneur parcourt $12{,}5$ km.

Exemple : la durée d'un trajet à vélo

Une cycliste roule à 20 km/h sur 7 km. Son trajet dure :

$$t = \frac{7}{20} = 0{,}35 \text{ h}.$$

En minutes, cela fait $0{,}35 \times 60 = 21$ min.

Méthode : vitesse, distance ou durée

1. **Lis** l'énoncé et note les deux grandeurs données, avec leurs unités.
2. **Convertis** si nécessaire : pour une vitesse en km/h, la durée doit être en heures.
3. **Choisis** la formule utile : $v = \frac{d}{t}$, $d = v \times t$ ou $t = \frac{d}{v}$.
4. **Conclus** par une phrase qui donne le résultat et son unité.

Méthode : convertir longueurs, durées et vitesses

1. **Longueurs** : retiens 1 km $= 1\,000$ m, 1 m $= 100$ cm et 1 cm $= 10$ mm. Pour aller vers une unité plus petite, multiplie ; pour aller vers une unité plus grande, divise.
2. **Durées** : on compte par soixante, car 1 h $= 60$ min et 1 min $= 60$ s.
3. **Minutes en heures** : divise le nombre de minutes par 60 ; par exemple 42 min $= 0{,}7$ h.
4. **Vitesses** : convertis la distance, puis la durée, et refais la division.

Exemple : des mètres par minute aux kilomètres par heure

Une marcheuse rapide parcourt 200 m par minute. En une heure, elle parcourt $200 \times 60 = 12\,000$ m, soit 12 km. Sa vitesse est donc 12 km/h.

Attention : les minutes ne sont pas des centièmes

✗ 3 h 45 min $= 3{,}45$ h.

✓ $\dfrac{45}{60} = 0{,}75$, donc 3 h 45 min $= 3{,}75$ h.

Une heure compte 60 minutes, et non 100.

L'essentiel en un coup d'œil

Vitesse moyenne $v = \dfrac{d}{t}$	Distance parcourue $d = v \times t$
Durée du parcours $t = \dfrac{d}{v}$	Échelle $e = \dfrac{p}{r}$
Distance sur le plan $p = e \times r$	Prendre t pour cent de A $\dfrac{t}{100} \times A$
Pourcentage d'une partie P de A $t = \dfrac{P}{A} \times 100$	Quatrième proportionnelle $d = \dfrac{b \times c}{a}$

Méthode : Quelle technique pour quelle question ?

On te demande…	Technique
si un tableau est de proportionnalité	calculer les quotients et les comparer
une case vide d'un tableau	coefficient, calcul sur les colonnes ou produits en croix
t pour cent d'une quantité	multiplier la quantité par $\dfrac{t}{100}$
quelle part représente une partie	diviser la partie par le tout, puis multiplier par 100
un prix après une réduction	calculer la réduction, puis la retrancher
une échelle	diviser la mesure du plan par la mesure réelle, dans la même unité
une vitesse, une distance ou une durée	convertir la durée en heures, puis choisir la bonne formule

Avant de calculer, repère toujours les deux grandeurs et leurs unités.

À retenir

Tout le chapitre repose sur une seule idée : un coefficient relie deux grandeurs.

Mets les grandeurs dans la bonne unité, puis applique la règle adaptée. Termine toujours par une phrase avec l'unité.