BURHAN

La proportionnalité

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/proportionnalite/cours

Chapitre	Semestre
La proportionnalité	Semestre 2

Le même prix pour tous ?

Au souk, Karim et Hamid vendent des tomates côte à côte. Chacun affiche ses prix sur une ardoise.

Avant d'acheter, Nadia veut comparer.

Voici les deux ardoises.

Chez Karim : masse (kg)	1	2	5
Prix (dirhams)	6	12	30

Chez Hamid : masse (kg)	1	2	5
Prix (dirhams)	7	12	25

Devine : Le prix d'un kilo

Chez quel marchand un kilo de tomates coûte-t-il le même prix, quelle que soit la quantité achetée ?

A. Chez Karim

Juste.

Un kilo coûte 6 dirhams. Deux kilos coûtent 12 dirhams, soit 6 dirhams le kilo. Cinq kilos coûtent 30 dirhams, soit encore 6 dirhams le kilo.

B. Chez Hamid

Faux.

Chez Hamid, le kilo coûte 7 dirhams, puis 6, puis 5 dirhams. Son prix baisse quand tu achètes plus.

C. Chez les deux

Faux.

Les deux font payer 12 dirhams pour 2 kg. Mais pour 1 kg et pour 5 kg, les prix du kilo diffèrent.

D. Chez aucun des deux

Faux.

Regarde chaque ardoise de près. Chez l'un des deux, chaque kilo coûte le même prix.

Indice 1

Calcule le prix d'un kilo pour chaque quantité.

Indice 2

Chez Karim, divise 12 par 2, puis 30 par 5.

Correction

Chez Karim, le kilo coûte 6 dirhams à chaque fois : $\frac{12}{2} = 6$ et $\frac{30}{5} = 6$.

Chez Hamid, le prix du kilo passe de 7 à 6, puis à 5 dirhams.

Quand le prix d'un kilo ne change pas, on parle de **proportionnalité**.

Dans ce chapitre, tu apprends à la reconnaître et à t'en servir. Elle t'aidera pour une recette, des soldes, une carte ou un trajet en car.

Reconnaître une situation de proportionnalité

Une recette pour plus de monde

Pour préparer du beghrir, Lalla Amina utilise 150 g de semoule pour 2 personnes.

Ce soir, elle reçoit des invités. Elle doit adapter sa recette sans la rater.

Devine : La semoule pour six

Lalla Amina cuisine pour 6 personnes. Quelle masse de semoule lui faut-il ?

A. 154 g

Faux.

Tu as ajouté 4 g pour 4 personnes de plus. Une personne de plus demande bien plus que 1 g de semoule.

B. 900 g

Faux.

Tu as multiplié 150 par 6. Or 150 g servent déjà 2 personnes, pas une seule.

C. 450 g

Juste.

Il y a 3 fois plus de monde que pour 2 personnes. Il faut donc $3 \times 150 = 450$ g.

D. 300 g

Faux.

C'est la masse pour 4 personnes : $2 \times 150 = 300$ g. Il en faut plus pour 6.

Indice 1

Combien de fois 2 personnes y a-t-il dans 6 personnes ?

Correction

Il y a 3 fois plus de personnes, car $6 = 3 \times 2$.

Il faut donc 3 fois plus de semoule :

$$3 \times 150 = 450.$$

Pour 6 personnes, Lalla Amina a besoin de 450 g de semoule.

Remarque : Rappel du primaire : le quotient

Rappel du primaire : le **quotient** de a par b est le résultat de la division de a par b.

Par exemple, le quotient de 12 par 4 vaut 3, car $4 \times 3 = 12$. On l'écrit aussi $\frac{12}{4}$.

Le même quotient partout

Exemple : la recette pour tout le monde

Lalla Amina note ses quantités dans un tableau.

Nombre de personnes	2	4	8	10
Semoule (g)	150	300	600	750

Elle divise chaque masse par le nombre de personnes : $\frac{150}{2} = 75$, $\frac{300}{4} = 75$, $\frac{600}{8} = 75$ et $\frac{750}{10} = 75$.

Ces quotients sont tous égaux. Chaque personne compte pour 75 g de semoule.

Définition : Grandeurs proportionnelles et coefficient de proportionnalité

Deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsqu'on obtient chaque valeur de la seconde en multipliant la valeur correspondante de la première par un même nombre k, non nul. Ce nombre k s'appelle le **coefficient de proportionnalité**.

Un tableau qui donne des valeurs correspondantes de ces deux grandeurs s'appelle alors un **tableau de proportionnalité** :

Première grandeur	a	b	c
Seconde grandeur	$k \times a$	$k \times b$	$k \times c$

Quand les nombres de la première ligne ne sont pas nuls, un tableau est un tableau de proportionnalité si, et seulement si, les quotients de chaque nombre de la seconde ligne par le nombre placé au-dessus sont tous égaux. Leur valeur commune est le coefficient k.

En clair : la masse de semoule et le nombre de personnes sont deux grandeurs **proportionnelles**. Une **grandeur** est ce qu'on peut mesurer : une masse, un prix, une durée.

Pour passer de la première ligne à la seconde, on multiplie toujours par 75. Ce nombre 75 est le **coefficient de proportionnalité** du tableau.

Proportionnel ou pas

Exemple : le périmètre et l'aire d'un carré

Le **périmètre** d'un carré est la longueur de son contour. Voici le périmètre selon le côté :

Côté (cm)	1	2	3	5
Périmètre (cm)	4	8	12	20

Tous les quotients valent 4 : c'est un tableau de proportionnalité.

Voici maintenant l'aire du même carré :

Côté (cm)	1	2	3	5
Aire (cm²)	1	4	9	25

Les quotients valent $1, 2, 3$ puis 5. Ce n'est pas un tableau de proportionnalité.

Exemple : le prix du lait

À l'épicerie, le lait se vend en bouteilles de tailles différentes.

Volume (L)	2	3	5
Prix (dirhams)	13	$19{,}5$	$32{,}5$

On calcule les quotients : $\frac{13}{2} = 6{,}5$, $\frac{19{,}5}{3} = 6{,}5$ et $\frac{32{,}5}{5} = 6{,}5$.

Le prix est donc proportionnel au volume. Le coefficient $6{,}5$ est le prix d'un litre, en dirhams.

Vérifie : Le marchand d'olives

Un marchand d'olives affiche ce tableau. Est-ce un tableau de proportionnalité ?

Masse (kg)	2	3	4
Prix (dirhams)	18	27	38

A. Oui, de coefficient 9

Faux.

Les deux premiers quotients valent bien 9. Mais $\frac{38}{4} = 9{,}5$: il faut vérifier toutes les colonnes.

B. Non, car $\frac{38}{4}$ ne vaut pas 9

Juste.
Les quotients valent 9, 9 puis $9{,}5$. Un seul quotient différent suffit pour conclure.

C. Oui, car les prix augmentent

Faux.
Les prix augmentent avec la masse, mais cela ne suffit pas. Seuls les quotients permettent de conclure.

D. Non, car il manque une colonne pour 1 kg

Faux.
Une colonne pour 1 kg n'est pas nécessaire. Ce sont les quotients qui décident.

Indice 1
Calcule le quotient de chaque prix par la masse placée au-dessus.

Correction
On calcule les quotients : $\frac{18}{2} = 9$, $\frac{27}{3} = 9$ et $\frac{38}{4} = 9{,}5$.

Ils ne sont pas tous égaux. Ce tableau n'est donc pas un tableau de proportionnalité.

Le piège et la méthode

Attention : augmenter ensemble ne suffit pas

Une boutique loue des vélos. Elle demande 10 dirhams pour le casque, puis 5 dirhams par heure. Une heure coûte donc 15 dirhams.

✗ « Deux heures coûtent le double, donc 30 dirhams. »

✓ Deux heures coûtent 20 dirhams, car :

$$10 + 2 \times 5 = 20.$$

Les quotients $\frac{15}{1} = 15$ et $\frac{20}{2} = 10$ sont différents. Le prix n'est pas proportionnel à la durée.

Le prix fixe du casque casse la proportionnalité.

Méthode : reconnaître un tableau de proportionnalité

1. **Calcule**, colonne par colonne, le quotient du bas par le haut.
2. **Compare** ces quotients entre eux.
3. **Conclus** si tous sont égaux : le tableau est de proportionnalité, et ce quotient commun est son coefficient.
4. **Stoppe** au premier quotient différent : ce n'est pas un tableau de proportionnalité, inutile de continuer.

Exemple : la méthode sur des stylos

Nombre de stylos	4	6	10
Prix (dirhams)	10	15	25

1. On divise : $\frac{10}{4} = 2{,}5$, $\frac{15}{6} = 2{,}5$ et $\frac{25}{10} = 2{,}5$.
2. Les trois quotients sont égaux.
3. C'est un tableau de proportionnalité, de coefficient $2{,}5$. Un stylo coûte $2{,}5$ dirhams.

À toi

À toi : Les tours de piste

Au stade, Yassine note la distance qu'il parcourt.

Nombre de tours	2	5	6
Distance (m)	800	$2\,000$	$2\,400$

Est-ce un tableau de proportionnalité ? Si oui, donne son coefficient et dis ce qu'il représente. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Divise chaque distance par le nombre de tours placé au-dessus.
Indice 2
Commence par $\frac{800}{2} = 400$.
Indice 3
Point délicat : calcule les trois quotients, pas seulement le premier, avant de conclure.

Réponse
Les quotients valent $\frac{800}{2} = 400$, $\frac{2\,000}{5} = 400$ et $\frac{2\,400}{6} = 400$.

Ils sont tous égaux : c'est un tableau de proportionnalité.

Son coefficient 400 est la longueur d'un tour de piste : un tour mesure 400 m.

Tu sais maintenant reconnaître une situation de proportionnalité. Un calcul de quotients suffit, et il ne se trompe pas.

Compléter un tableau de proportionnalité

Avec le coefficient

Au marché, certaines cases d'un tableau de prix sont vides.

Tu sais déjà dire si un tableau est de proportionnalité. Il reste à trouver les nombres qui manquent.

Devine : Les clémentines

4 kg de clémentines coûtent 22 dirhams. Le prix est proportionnel à la masse. Combien coûtent 6 kg ?

A. 24 dirhams

Faux.

Tu as ajouté 2 au prix, comme on a ajouté 2 kg. Mais 2 kg coûtent bien plus que 2 dirhams.

B. 44 dirhams

Faux.

C'est le prix de 8 kg, le double de 4 kg. Or 6 kg, ce n'est pas le double de 4 kg.

C. 132 dirhams

Faux.

Tu as multiplié 22 par 6. Or 22 dirhams est le prix de 4 kg, pas d'un seul kilo.

D. 33 dirhams

Juste.

Un kilo coûte $\frac{22}{4} = 5{,}5$ dirhams. Donc 6 kg coûtent $6 \times 5{,}5 = 33$ dirhams.

Indice 1

Cherche d'abord le prix d'un kilo.

Correction

Le coefficient est le prix d'un kilo : $\frac{22}{4} = 5{,}5$ dirhams.

Le prix de 6 kg vaut donc :

$$6 \times 5{,}5 = 33.$$

Les 6 kg de clémentines coûtent 33 dirhams.

Exemple : compléter avec le coefficient

Des pommes coûtent 9 dirhams les 2 kg. On complète le tableau.

Masse (kg)	2	3	5
Prix (dirhams)	9	$13{,}5$	$22{,}5$

Le coefficient vaut $\frac{9}{2} = 4{,}5$.

On multiplie ensuite chaque masse par ce coefficient : $3 \times 4{,}5 = 13{,}5$ et $5 \times 4{,}5 = 22{,}5$.

Avec les colonnes

Exemple : des colonnes qui se combinent

Un pack de 6 bouteilles d'eau coûte 21 dirhams.

Nombre de bouteilles	6	12	18	3
Prix (dirhams)	21	42	63	$10{,}5$

- Pour 12 bouteilles, on double : $2 \times 21 = 42$.
- Pour 18 bouteilles, on additionne les colonnes 6 et 12 : $21 + 42 = 63$.
- Pour 3 bouteilles, on divise par 2 : $\frac{21}{2} = 10{,}5$.

Propriété : Calculs sur les colonnes d'un tableau de proportionnalité

Dans un tableau de proportionnalité :

- si l'on **multiplie** les deux nombres d'une colonne par un même nombre non nul, on obtient deux nombres qui forment encore une colonne du tableau ; de même si on les **divise** par un même nombre non nul ;
- si l'on **additionne** deux colonnes, nombre à nombre, on obtient deux nombres qui forment encore une colonne du tableau ; de même si l'on **soustrait** une colonne d'une autre.

Par exemple, si 3 objets coûtent 12 dirhams et 5 objets coûtent 20 dirhams, alors 8 objets coûtent $12 + 20 = 32$ dirhams, et 6 objets coûtent $2 \times 12 = 24$ dirhams.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu ne le démontres pas cette année.

Tu le constates sur des exemples, comme celui qui suit.

Exemple : on le constate sur du tissu

Un mètre de tissu coûte 15 dirhams.

Longueur (m)	2	5	7	6
Prix (dirhams)	30	75	105	90

- La colonne 7 est la somme des colonnes 2 et 5 : $30 + 75 = 105$.
- La colonne 6 est la colonne 2 multipliée par 3 : $3 \times 30 = 90$.

Contrôle avec le prix d'un mètre : $\frac{105}{7} = 15$ et $\frac{90}{6} = 15$.

Les produits en croix

Exemple : deux produits égaux

Des abricots coûtent 60 dirhams les 4 kg, et 90 dirhams les 6 kg.

Masse (kg)	4	6
Prix (dirhams)	60	90

Multiplie les nombres placés en diagonale :

$$4 \times 90 = 360$$

et

$$60 \times 6 = 360.$$

Les deux résultats sont égaux. Ces deux produits s'appellent les **produits en croix**.

Propriété : Égalité des produits en croix et quatrième proportionnelle

Soit a, b, c et d quatre nombres non nuls, placés dans un tableau à deux colonnes :

Première ligne	a	c
Seconde ligne	b	d

Ce tableau est un tableau de proportionnalité si, et seulement si, les **produits en croix** sont égaux : $a \times d = b \times c$.

Lorsque le tableau est un tableau de proportionnalité et que trois de ces nombres sont connus, cette égalité donne le quatrième, appelé **quatrième proportionnelle**. Par exemple, si d est inconnu : $d = \frac{b \times c}{a}$.

Remarque : Encore un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu le constates sur l'exemple qui suit.

En clair : dans un tableau de proportionnalité à deux colonnes, si tu connais trois nombres, tu peux trouver le quatrième. Ce nombre s'appelle la **quatrième proportionnelle**.

Pour l'obtenir, multiplie en diagonale les deux nombres connus, puis divise par le troisième.

Exemple : la quatrième proportionnelle

Une voiture consomme 8 L d'essence pour 100 km. Combien consomme-t-elle pour 350 km ? On appelle x le nombre de litres cherché.

Distance (km)	100	350
Essence (L)	8	x

D'après l'égalité des produits en croix :

$$100 \times x = 8 \times 350 = 2\,800.$$

Donc $x = \dfrac{2\,800}{100} = 28$. La voiture consomme 28 L.

Contrôle : $\dfrac{8}{100} = 0{,}08$ et $\dfrac{28}{350} = 0{,}08$.

Le piège et la méthode

Attention : un produit en croix relie deux coins opposés

4 croissants coûtent 6 dirhams. On cherche le prix x de 10 croissants.

Nombre de croissants	4	10
Prix (dirhams)	6	x

✗ $4 \times 6 = 10 \times x$, donc $x = 2{,}4$: dix croissants coûteraient moins que quatre.

✓ On multiplie les cases en diagonale :

$$4 \times x = 6 \times 10 = 60.$$

Donc $x = \dfrac{60}{4} = 15$: dix croissants coûtent 15 dirhams.

Un produit en croix relie deux cases en diagonale, pas deux cases de la même colonne.

Méthode : compléter un tableau de proportionnalité

1. **Cherche** une colonne complète. Son quotient donne le coefficient : multiplie par lui les nombres de la première ligne.
2. **Combine** les colonnes connues : multiplie une colonne par un nombre, divise-la par un nombre, ou additionne deux colonnes.
3. **Écris** l'égalité des produits en croix quand tu connais trois nombres de deux colonnes. Calcule ensuite le quatrième.

4. **Contrôle** : dans chaque colonne complétée, le bas divisé par le haut redonne le coefficient.

À toi : La viande du boucher

Le prix de la viande est proportionnel à sa masse. Complète ce tableau de deux façons : avec le coefficient, puis avec les colonnes.

Masse (kg)	2	3	5
Prix (dirhams)	170	?	?

Donne le prix de 3 kg et celui de 5 kg. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le coefficient est le prix d'un kilo.
Indice 2
Calcule $\frac{170}{2} = 85$, puis multiplie 3 et 5 par 85.
Indice 3
Point délicat : pour 5 kg, additionne les colonnes 2 kg et 3 kg. Tu dois retrouver le même prix.

Réponse
Avec le coefficient. Un kilo coûte $\frac{170}{2} = 85$ dirhams. Puis $3 \times 85 = 255$ et $5 \times 85 = 425$.

Avec les colonnes. Une masse de 5 kg, c'est 2 kg plus 3 kg. Donc $170 + 255 = 425$.

Les deux voies donnent le même résultat : 255 dirhams pour 3 kg et 425 dirhams pour 5 kg.

Coin devoir

Remarque : Coin devoir : compléter par deux voies

Énoncé : 6 cahiers coûtent 45 dirhams. Calcule le prix x de 10 cahiers.

En devoir, écris ta réponse ainsi :

« D'après l'égalité des produits en croix, $6 \times x = 45 \times 10 = 450$. Donc $x = \frac{450}{6} = 75$. Dix cahiers coûtent 75 dirhams. »

Vérifie par une seconde voie, avec le coefficient : $\frac{45}{6} = 7{,}5$, puis $10 \times 7{,}5 = 75$.

Tu as maintenant trois outils : le coefficient, les colonnes et les produits en croix. Choisis le plus simple selon les nombres du tableau.

Les pourcentages

Sur cent, puis sur quarante

Dans un collège, 25 élèves sur 100 viennent à vélo. On dit que 25 **pour cent** des élèves viennent à vélo.

« Pour cent » veut dire « sur cent ».

Devine : La classe de quarante

Dans une classe de 40 élèves, la proportion est la même : 25 pour cent viennent à vélo. Combien d'élèves de cette classe viennent à vélo ?

A. 25 élèves

Faux.
25 pour cent n'est pas un nombre d'élèves. C'est une proportion : 25 sur 100.

B. 10 élèves

Juste.
25 sur 100, c'est 1 sur 4. Le quart de 40 élèves fait 10 élèves.

C. 15 élèves

Faux.
Tu as calculé $40 - 25$. Un pourcentage ne se soustrait pas d'un nombre d'élèves.

D. 65 élèves

Faux.
Tu as calculé $40 + 25$. La classe ne compte que 40 élèves en tout.

Indice 1
25 sur 100, c'est quelle fraction simple ?

Correction
On prend 25 pour cent de 40 :

$$\begin{aligned}\frac{25}{100} \times 40 &= \frac{1\,000}{100} \\ &= 10.\end{aligned}$$

Donc 10 élèves de la classe viennent à vélo.

Exemple : un tableau de proportionnalité caché

L'**effectif** est le nombre total d'élèves. Avec la même proportion, voici le nombre d'élèves à vélo selon l'effectif :

Effectif	100	200	300	20
Élèves à vélo	25	50	75	5

Chaque quotient vaut $\frac{25}{100}$.

Le nombre d'élèves à vélo est donc proportionnel à l'effectif, de coefficient $\frac{25}{100}$.

Définition : Pourcentage

Soit t un nombre positif. Prendre t **pour cent** d'une quantité A, c'est multiplier A par $\frac{t}{100}$:

$$\frac{t}{100} \times A.$$

Le nombre t s'appelle un **pourcentage**. La quantité obtenue est proportionnelle à A, de coefficient $\frac{t}{100}$.

Inversement, si une partie P d'une quantité A non nulle représente t pour cent de A, alors $\frac{P}{A} = \frac{t}{100}$, c'est-à-dire $t = \frac{P}{A} \times 100$.

En clair : prendre t pour cent d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$.

Le nombre t est le **pourcentage**. Il indique combien de parts sur cent on prend.

Appliquer et trouver un pourcentage

Exemple : appliquer un pourcentage

Un pot de yaourt de 125 g contient 4 pour cent de matière grasse. On calcule la masse de matière grasse :

$$\begin{aligned}\frac{4}{100} \times 125 &= \frac{500}{100} \\ &= 5.\end{aligned}$$

Le pot contient 5 g de matière grasse.

Exemple : trouver un pourcentage

À un quiz, Salma réussit 19 questions sur 25. Quel pourcentage de bonnes réponses obtient-elle ?

On divise la partie par le tout, puis on multiplie par 100 :

$$\begin{aligned}\frac{19}{25} \times 100 &= 0{,}76 \times 100 \\ &= 76.\end{aligned}$$

Rappel du chapitre sur les fractions :

$$\begin{aligned}\frac{19}{25} &= \frac{19 \times 4}{25 \times 4} \\ &= \frac{76}{100} = 0{,}76.\end{aligned}$$

Salma obtient 76 pour cent de bonnes réponses.

Vérifie : Les enfants du car

Un car transporte 50 passagers, dont 18 enfants. Quel pourcentage des passagers sont des enfants ?

A. 18 pour cent

Faux.

Ce serait vrai pour 100 passagers. Ici, il n'y en a que 50.

B. $0{,}36$ pour cent

Faux.

Tu as bien calculé $\frac{18}{50} = 0{,}36$. Mais tu as oublié de multiplier par 100.

C. 36 pour cent

Juste.

On calcule $\frac{18}{50} \times 100 = 36$.

D. 32 pour cent

Faux.

Tu as calculé $50 - 18$. C'est le nombre d'adultes, pas un pourcentage.

Indice 1

Divise le nombre d'enfants par le nombre total de passagers.

Correction

On divise la partie par le tout : $\frac{18}{50} = 0{,}36$. Puis on multiplie par 100 : $0{,}36 \times 100 = 36$.

Les enfants représentent 36 pour cent des passagers.

Les soldes

Exemple : un sac en soldes

Pendant les soldes, un sac à dos à 280 dirhams bénéficie d'une **réduction** de 25 pour cent. Une réduction est la somme retirée du prix.

1. Montant de la réduction : $\frac{25}{100} \times 280 = 70$ dirhams.
2. Nouveau prix : $280 - 70 = 210$ dirhams.

Le sac coûte 210 dirhams après la réduction.

Attention : un pourcentage n'est pas une somme d'argent

Un pull coûte 150 dirhams. Il est soldé à 20 pour cent.

✗ « Le pull coûte $150 - 20 = 130$ dirhams. »

✓ La réduction vaut $\frac{20}{100} \times 150 = 30$ dirhams. Le pull coûte donc $150 - 30 = 120$ dirhams.

Le nombre 20 indique 20 parts sur 100, pas 20 dirhams.

Méthode : calculer avec des pourcentages

1. **Multiplie** une quantité par $\frac{t}{100}$ pour en prendre t pour cent.
2. **Divise** la partie par le tout, puis multiplie par 100, pour trouver un pourcentage.
3. **Calcule** la réduction en dirhams, puis soustrais-la du prix de départ.
4. **Nomme** la quantité de départ : « t pour cent » seul ne veut rien dire.

À toi, puis le Coin devoir

À toi : Le vélo soldé

Un vélo coûte $1\,600$ dirhams. Pendant les soldes, son prix baisse de 15 pour cent. Calcule le montant de la réduction, puis le nouveau prix. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par la réduction : c'est 15 pour cent de $1\,600$ dirhams.
Indice 2
Calcule $\frac{15}{100} \times 1\,600$.
Indice 3
Point délicat : retranche la réduction en dirhams, pas le nombre 15.

Réponse
La réduction vaut :

$$\frac{15}{100} \times 1\,600 = 240.$$

Elle est de 240 dirhams. Le nouveau prix est $1\,600 - 240 = 1\,360$ dirhams.

Pendant les soldes, le vélo coûte $1\,360$ dirhams.

Remarque : Coin devoir : appliquer un pourcentage

Énoncé : un collège compte 600 élèves, dont 35 pour cent de filles. Calcule le nombre de filles.

En devoir, écris :

« D'après la définition du pourcentage, le nombre de filles est $\frac{35}{100} \times 600 = 210$. Le collège compte 210 filles. »

Nomme la règle, écris le calcul, puis conclus par une phrase.

Tu sais appliquer un pourcentage, en trouver un et calculer un prix soldé. Les affiches des soldes n'ont plus de secret pour toi.

Échelles des plans et des cartes

Le plan d'un appartement

Un architecte dessine le plan d'un appartement sur une feuille. Tout y est plus petit qu'en réalité.

Sur ce plan, 1 cm représente 1 m de l'appartement.

Devine : La longueur de la chambre

Sur ce plan, la chambre mesure $3{,}5$ cm de long. Quelle est sa longueur réelle ?

A. $3{,}5$ m

Juste.
Chaque centimètre du plan représente 1 m. Donc $3{,}5$ cm représentent $3{,}5$ m.

B. 35 m

Faux.
C'est bien trop long pour une chambre. Chaque centimètre représente 1 m, pas 10 m.

C. $3{,}5$ cm

Faux.
C'est la mesure sur le plan. La chambre réelle est bien plus grande.

D. 350 m

Faux.
Tu as confondu les unités : $3{,}5$ m font 350 cm, et non 350 m.

Indice 1
Que représente 1 cm du plan ?

Correction
Sur ce plan, 1 cm représente 1 m. Donc $3{,}5$ cm représentent $3{,}5 \times 1 = 3{,}5$ m.

La chambre mesure $3{,}5$ m de long.

Exemple : le plan et la réalité, dans la même unité

Comme 1 m $= 100$ cm, on écrit toutes les longueurs en centimètres.

Longueur sur le plan (cm)	2	5	8
Longueur réelle (cm)	200	500	800

Les longueurs réelles sont proportionnelles aux longueurs du plan.

Le quotient $\frac{2}{200}$ vaut $\frac{1}{100}$, comme $\frac{5}{500}$ et $\frac{8}{800}$.

Définition : Échelle d'un plan ou d'une carte

Sur un plan ou une carte, les distances mesurées sont **proportionnelles** aux distances réelles. L'**échelle** est le coefficient de proportionnalité qui permet de passer d'une distance réelle à la distance correspondante sur le plan, les deux distances étant exprimées dans la **même unité** :

$$e = \frac{p}{r},$$

où p est la distance sur le plan et r la distance réelle.

Par exemple, une échelle $\frac{1}{50\,000}$ signifie que 1 cm sur la carte représente $50\,000$ cm en réalité, c'est-à-dire 500 m.

En clair : l'**échelle** de ce plan est $\frac{1}{100}$. Elle se lit « un centième ».

Elle veut dire que 1 cm sur le plan représente 100 cm en réalité.

Trois calculs avec une échelle

Remarque : Rappel du primaire : les longueurs

Rappel du primaire : 1 m $= 100$ cm et 1 km $= 1\,000$ m.

Donc 1 km $= 1\,000 \times 100 = 100\,000$ cm.

Exemple : une distance réelle sur une carte

Une carte de la région est à l'échelle $\frac{1}{200\,000}$. Deux villages y sont à 6 cm l'un de l'autre.

Sur cette carte, 1 cm représente $200\,000$ cm. La distance réelle vaut donc :

$$6 \times 200\,000 = 1\,200\,000 \text{ cm}.$$

Or 1 km $= 1\,000$ m $= 100\,000$ cm. Les deux villages sont donc à 12 km l'un de l'autre.

Exemple : une distance sur un plan

Le plan d'une chambre est à l'échelle $\frac{1}{50}$. Le lit mesure 2 m de long, soit 200 cm.

Sur le plan, sa longueur vaut :

$$\frac{200}{50} = 4 \text{ cm}.$$

Tu peux tracer ce lit sur ton cahier : un trait de 4 cm.

Exemple : trouver l'échelle

Sur une carte, 3 cm représentent 15 km.

On écrit les deux distances en centimètres : 15 km $= 1\,500\,000$ cm. L'échelle vaut :

$$\frac{3}{1\,500\,000} = \frac{1}{500\,000}.$$

Sur cette carte, 1 cm représente donc $500\,000$ cm, soit 5 km.

Le piège des unités

Vérifie : L'échelle du plan

Sur un plan, 6 cm représentent 3 m. Quelle est l'échelle de ce plan ?

A. 2

Faux.

Tu as divisé 6 par 3 sans convertir. Une échelle de 2 donnerait un plan plus grand que la réalité.

B. $\frac{1}{2}$

Faux.

Tu as divisé 3 par 6. Les mètres n'ont pas été convertis en centimètres.

C. $\frac{1}{500}$

Faux.

La conversion est fausse : 3 m font 300 cm, pas $3\,000$ cm.

D. $\frac{1}{50}$

Juste.

On a 3 m $= 300$ cm, et $\frac{6}{300} = \frac{1}{50}$.

Indice 1

Écris d'abord les deux longueurs en centimètres.

Correction

On convertit d'abord : 3 m $= 300$ cm. L'échelle vaut $\frac{6}{300} = \frac{1}{50}$.

> Sur ce plan, 1 cm représente 50 cm.

Attention : l'échelle exige une seule unité

Sur une carte, 5 cm représentent 10 km.

✗ « L'échelle vaut $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. » Ce quotient mélange des centimètres et des kilomètres.

✓ On convertit : 10 km $= 1\,000\,000$ cm. L'échelle vaut :

$$\frac{5}{1\,000\,000} = \frac{1}{200\,000}.$$

Méthode : utiliser une échelle

1. **Exprime** la distance sur le plan et la distance réelle dans la même unité.
2. **Calcule** l'échelle : c'est le quotient de la longueur sur le plan par la longueur réelle.
3. **Multiplie** par n la distance mesurée sur le plan pour trouver la distance réelle, si l'échelle vaut $\frac{1}{n}$.
4. **Divise** par n la distance réelle pour trouver la longueur à tracer, puis écris le résultat en centimètres (ou en millimètres) pour le tracer.

À toi : trace sur ton cahier

À toi : La cuisine sur le plan

Une cuisine rectangulaire mesure 4 m de long et $3{,}2$ m de large. Tu la dessines sur un plan à l'échelle $\frac{1}{80}$. Calcule ses dimensions sur le plan, puis trace-la sur ton cahier. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Convertis les longueurs réelles en centimètres.

Indice 2

4 m $= 400$ cm. Calcule ensuite $\frac{400}{80}$.

Indice 3

Point délicat : le plan est plus petit que la réalité. Tu divises donc par 80, tu ne multiplies pas.

Réponse

En centimètres. 4 m $= 400$ cm et $3{,}2$ m $= 320$ cm.

Sur le plan. On divise par 80 : $\frac{400}{80} = 5$ et $\frac{320}{80} = 4$.

> Tu traces un rectangle de 5 cm sur 4 cm.

Tu sais lire une carte et dessiner un plan à l'échelle. Les mesures de ton cahier parlent maintenant du monde réel.

Vitesse moyenne et conversions

Un trajet en car

Un car relie deux villes distantes de 180 km. Le trajet dure 3 h.

En route, le car roule tantôt plus vite, tantôt moins vite.

Devine : Une heure de route

Imagine que le car roule toujours à la même allure. Quelle distance parcourt-il en 1 h ?

A. 540 km

Faux.

Tu as multiplié 180 par 3. En 1 h, le car parcourt moins qu'en 3 h.

B. 90 km

Faux.

Tu as divisé 180 par 2. Or le trajet dure 3 h, pas 2 h.

C. 60 km

Juste.

En 3 h, il parcourt 180 km. En 1 h, il en parcourt le tiers : $\frac{180}{3} = 60$ km.

D. 177 km

Faux.

Tu as retranché 3 de 180. On ne retranche pas des heures à des kilomètres.

Indice 1

En 1 h, le car fait le tiers du trajet de 3 h.

Correction

À allure constante, la distance est proportionnelle à la durée.

En 1 h, le car parcourt donc le tiers du trajet : $\frac{180}{3} = 60$ km.

Exemple : à vitesse constante

Un autre car roule toujours à la même allure. On note la distance parcourue selon la durée.

Durée (h)	1	2	3	5
Distance (km)	70	140	210	350

Chaque quotient vaut 70 : la distance est proportionnelle à la durée.

Le coefficient 70 est la distance parcourue en une heure.

Définition : Vitesse moyenne

Un véhicule, un piéton ou un objet parcourt une distance d pendant une durée t, non nulle. Sa **vitesse moyenne** v est le quotient de la distance par la durée :

$$v = \frac{d}{t}.$$

S'il avançait toujours à cette vitesse, la distance parcourue serait proportionnelle à la durée, et v serait le coefficient de proportionnalité. On en tire $d = v \times t$ et $t = \frac{d}{v}$.

L'unité de v dépend des unités de d et de t : une distance en kilomètres et une durée en heures donnent une vitesse en kilomètres par heure, notée $\mathrm{km/h}$.

En clair : quand elle s'exprime en km/h, la **vitesse moyenne** est la distance parcourue, en moyenne, en une heure.

Pour ce car, $\frac{210}{3} = 70$: il roule à 70 km/h. On lit « soixante-dix kilomètres par heure ».

Trois calculs

Exemple : calculer une vitesse moyenne

Un cycliste parcourt 45 km en 3 h. Sa vitesse moyenne vaut :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{45}{3} = 15.$$

Le cycliste roule à 15 km/h de moyenne.

Exemple : calculer une distance, puis une durée

Une voiture roule à 90 km/h pendant 2 h. La distance parcourue vaut :

$$d = v \times t = 90 \times 2 = 180.$$

La voiture parcourt 180 km.

Un randonneur marche à 5 km/h. Pour parcourir 15 km, il lui faut :

$$t = \frac{d}{v} = \frac{15}{5} = 3.$$

Sa marche dure 3 h.

Vérifie : Le scooter

Un scooter parcourt 100 km à la vitesse moyenne de 40 km/h. Combien de temps dure le trajet ?

A. $4\,000$ h

Faux.

Tu as multiplié la distance par la vitesse. Pour une durée, on divise la distance par la vitesse.

B. 2 h 30 min

Juste.

On a $t = \dfrac{100}{40} = 2{,}5$ h, et $0{,}5$ h vaut 30 min.

C. 2 h 50 min

Faux.

Tu as bien trouvé $2{,}5$ h. Mais $0{,}5$ h vaut une demi-heure, soit 30 min, pas 50 min.

D. $0{,}4$ h

Faux.

Tu as divisé la vitesse par la distance. C'est l'inverse : $t = \dfrac{d}{v}$.

Indice 1

Pour une durée, divise la distance par la vitesse.

Correction

On divise la distance par la vitesse :

$$t = \frac{100}{40} = 2{,}5.$$

La durée vaut $2{,}5$ h. Une demi-heure vaut 30 min, donc le trajet dure 2 h 30 min.

Convertir les durées et les longueurs

Exemple : des minutes aux heures

Pour écrire des minutes en heures, on divise par 60.

Durée (min)	60	30	15	45	6
Durée (h)	1	$0{,}5$	$0{,}25$	$0{,}75$	$0{,}1$

Pour les longueurs, 1 km $= 1\,000$ m. Ainsi, $2{,}4$ km $= 2\,400$ m et 350 m $= 0{,}35$ km.

Attention : une heure ne compte pas cent minutes

Un car parcourt 135 km en 2 h 15 min.

✗ « La durée vaut $2{,}15$ h. »

✓ 15 min valent $\dfrac{15}{60} = 0{,}25$ h, donc 2 h 15 min $= 2{,}25$ h. La vitesse moyenne vaut :

$$\frac{135}{2{,}25} = 60.$$

Le car roule à 60 km/h de moyenne.

Une heure compte 60 minutes, et non 100.

Méthode : convertir des unités

1. **Passe** d'une unité de longueur à l'autre : 1 km $= 1\,000$ m, 1 m $= 100$ cm, 1 cm $= 10$ mm. Vers une unité plus petite, on multiplie ; vers une plus grande, on divise.
2. **Compte** par soixante pour les durées : 1 h $= 60$ min et 1 min $= 60$ s.
3. **Divise** par 60 un nombre de minutes pour l'écrire en heures : 45 min $= 0{,}75$ h.
4. **Convertis** une vitesse en changeant la distance et la durée, chacune à son tour.

Exemple : de m/min en km/h

Nora marche $1\,200$ m en 15 min. Sa vitesse vaut $\dfrac{1\,200}{15} = 80$ m/min.

Dans une heure, il y a 60 min. Elle marche donc $80 \times 60 = 4\,800$ m, soit $4{,}8$ km.

Sa vitesse est $4{,}8$ km/h.

Exemple : de m/s en km/h

Un sprinteur court 100 m en 10 s. Sa vitesse vaut $\dfrac{100}{10} = 10$ m/s.

Dans une heure, il y a $3\,600$ s. À cette allure, il courrait :

$$10 \times 3\,600 = 36\,000\ \text{m},$$

soit 36 km. Sa vitesse est 36 km/h.

La méthode, puis à toi

Méthode : vitesse, distance et durée

1. **Note** les deux grandeurs connues, avec leurs unités.
2. **Convertis** la durée en heures si la vitesse est en km/h.
3. **Choisis** la bonne écriture : $v = \dfrac{d}{t}$, $d = v \times t$ ou $t = \dfrac{d}{v}$.

4. **Termine** par une phrase avec l'unité. Demande-toi ensuite si le résultat est vraisemblable.

À toi : Le car du matin

Un car part à 7 h 50 min et arrive à 9 h 05 min. Il a parcouru 100 km. Calcule sa vitesse moyenne en km/h. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule d'abord la durée du trajet, en heures et en minutes.
Indice 2
De 7 h 50 min à 8 h 50 min, il passe 1 h. Puis il reste 15 min jusqu'à 9 h 05 min.
Indice 3
Point délicat : 15 min valent $0{,}25$ h, et non $0{,}15$ h.

Réponse
Durée du trajet. De 7 h 50 min à 9 h 05 min, il s'écoule 1 h 15 min.

En heures. On a 15 min $= \dfrac{15}{60}$ h $= 0{,}25$ h, donc la durée vaut $1{,}25$ h.

Vitesse moyenne.

$$v = \frac{100}{1{,}25} = 80.$$

Le car roule à 80 km/h de moyenne.

Coin devoir

Remarque : Coin devoir : calculer une distance

Énoncé : un cycliste roule pendant 2 h 45 min à 16 km/h de moyenne. Quelle distance parcourt-il ?

En devoir, écris :

« 45 min $= \dfrac{45}{60}$ h $= 0{,}75$ h, donc la durée vaut $2{,}75$ h. D'après la définition de la vitesse moyenne, $d = v \times t = 16 \times 2{,}75 = 44$. Le cycliste parcourt 44 km. »

Tu sais calculer une vitesse, une distance ou une durée, et convertir les unités. Ton prochain trajet en car aura un air de problème résolu.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : Ce que tu sais faire

- Reconnaître un tableau de proportionnalité en comparant les quotients.
- Compléter un tableau par le coefficient, par les colonnes ou par les produits en croix.

- Calculer t pour cent d'une quantité, trouver un pourcentage et calculer un prix soldé.
- Utiliser l'échelle d'un plan ou d'une carte, avec une seule unité.
- Calculer une vitesse moyenne, une distance ou une durée.
- Convertir des longueurs, des durées et des vitesses.

Pour t'entraîner, passe aux exercices du chapitre. Commence par le palier Application, puis l'Entraînement. Le dernier palier a le niveau d'un devoir surveillé d'une heure.

La proportionnalité te suivra partout : au marché, en cuisine, en sciences et sur la route.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « La proportionnalité » (1ac · general · mathematiques)