BURHAN

Prisme droit et cylindre de révolution

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/prisme-droit-et-cylindre/resume

Chapitre	Semestre
Prisme droit et cylindre de révolution	Semestre 2

Reconnaître un prisme droit

> **À retenir : L'essentiel**
>
> Un prisme droit ressemble à une boîte qui a deux faces jumelles, l'une en face de l'autre.
>
> Pour le reconnaître, cherche ces deux faces jumelles : ce sont les bases. Toutes les autres faces sont des rectangles.

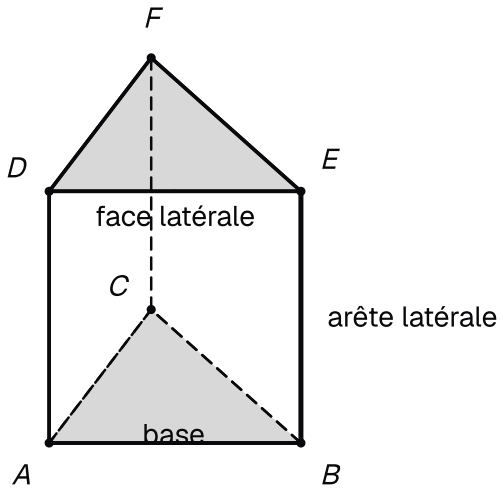
Définition : Prisme droit

Un **prisme droit** est un solide limité par des faces planes :

- deux faces **superposables** et **parallèles**, appelées les **bases** ; dans ce chapitre, chaque base est un triangle ou un parallélogramme ;
- des **faces latérales** qui sont des **rectangles**.

Les côtés des faces latérales qui relient les deux bases s'appellent les **arêtes latérales**. Elles ont toutes la même longueur et elles sont perpendiculaires aux bases. Cette longueur commune est la **hauteur** du prisme droit.

Un pavé droit (et en particulier un cube) est un prisme droit dont les bases sont des rectangles.



Les éléments d'un prisme droit nommés sur le dessin : deux bases triangulaires, une face latérale rectangulaire, une arête latérale.

Exemple

Une cale de porte en bois. Elle a deux faces triangulaires identiques et parallèles : ce sont ses bases. Ses trois autres faces sont des rectangles : ce sont ses faces latérales.

Élément de la cale	Nombre
faces	5 : 2 bases et 3 faces latérales
arêtes	9, dont 3 arêtes latérales
sommets	6

Ses arêtes latérales mesurent $8\ \text{cm}$: la hauteur de la cale est donc $8\ \text{cm}$.

Remarque : Parallèle et perpendiculaire dans l'espace

Sur un prisme droit, les arêtes latérales sont parallèles entre elles. Chacune est perpendiculaire aux deux bases.

Les deux bases sont dans des plans parallèles : elles ne se rencontrent jamais.

Attention : Un prisme couché garde ses bases

✗ « Les bases sont toujours la face du dessous et la face du dessus. »

✓ Les bases sont les deux faces superposables et parallèles, où qu'elles soient. Une barre de chocolat triangulaire posée à plat repose sur une face latérale. Ses bases sont les deux triangles des bouts, et sa hauteur est sa longueur, couchée sur la table.

Dessiner en perspective cavalière

Définition : Perspective cavalière

La **perspective cavalière** est une façon de dessiner un solide sur une feuille plate.

La face de devant garde sa vraie forme. Les arêtes qui partent vers l'arrière, appelées **fuyantes**, sont obliques, parallèles et raccourcies.

Les arêtes cachées sont en pointillés.

Méthode : Dessiner un prisme droit à main levée

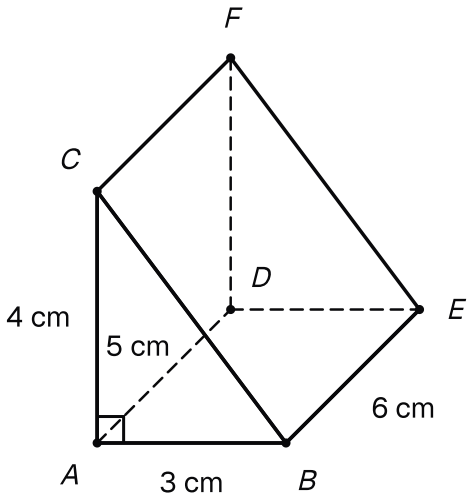
1. **Dessine** la face de devant avec sa vraie forme : une base ou une face latérale.
2. **Trace** à partir de chaque sommet une arête oblique vers l'arrière, toutes dans la même direction et de même longueur.
3. **Relie** les bouts de ces arêtes : tu obtiens la face arrière, pareille à celle de devant.
4. **Repasse** en pointillés les arêtes que tu ne verrais pas.

Exemple

Un prisme à base triangle rectangle, de côtés $3\ \text{cm}$, $4\ \text{cm}$ et $5\ \text{cm}$, de hauteur $6\ \text{cm}$.

Tu dessines d'abord le triangle de devant en vraie grandeur. Puis tu traces trois arêtes obliques parallèles, par exemple de $3\ \text{cm}$ au lieu de $6\ \text{cm}$.

Ce qui est caché dépend du point de vue. Parfois, un sommet de l'arrière est caché avec ses trois arêtes ; parfois, une seule arête de l'arrière est cachée. Dans les deux cas, les arêtes cachées vont en pointillés.



Ce prisme dessiné en perspective : le triangle rectangle de 3 cm, 4 cm et 5 cm de face, et des arêtes obliques qui valent 6 cm mais que l'on trace plus courtes.

Remarque : Ce que le dessin conserve

La face de devant garde ses vraies longueurs et ses vrais angles. Des arêtes parallèles restent parallèles sur le dessin.

En revanche, les arêtes fuyantes sont raccourcies, et certains angles droits n'ont plus l'air droits.

Pour un cylindre, les deux disques des bases se dessinent comme des ovales.

Le patron d'un prisme droit

Définition : Patron d'un solide

Le **patron** d'un solide est une figure plane, d'un seul morceau, que l'on peut découper puis plier pour fabriquer ce solide, sans trou et sans que deux faces se recouvrent.

Un même solide peut avoir plusieurs patrons différents.

Propriété : Patron d'un prisme droit

Le patron d'un prisme droit est formé :

- des **deux bases**, superposables ;
- des **faces latérales**, des rectangles qui ont tous un côté égal à la hauteur h du prisme ; leur autre côté est un côté de la base.

Placées côte à côte, les faces latérales forment un seul **grand rectangle**. Un de ses côtés mesure h ; l'autre est égal au **périmètre de la base**.

Remarque : Admis

Déplie une boîte en carton : tu retrouves cette description du patron. Ce résultat est admis.

Admis veut dire que tu l'acceptes sans preuve : tu l'as constaté sur des boîtes, et cela suffit cette année.

Méthode : Construire le patron d'un prisme droit

1. **Calcule** le périmètre de la base.
2. **Trace** un grand rectangle : la hauteur du prisme d'un côté, ce périmètre de l'autre.
3. **Découpe** ce rectangle en faces latérales, une par côté de la base, dans l'ordre du tour de la base.
4. **Colle** une base au-dessus et l'autre au-dessous, chacune contre une face latérale.
5. **Contrôle** que deux bords qui se rejoignent au pliage ont la même longueur.

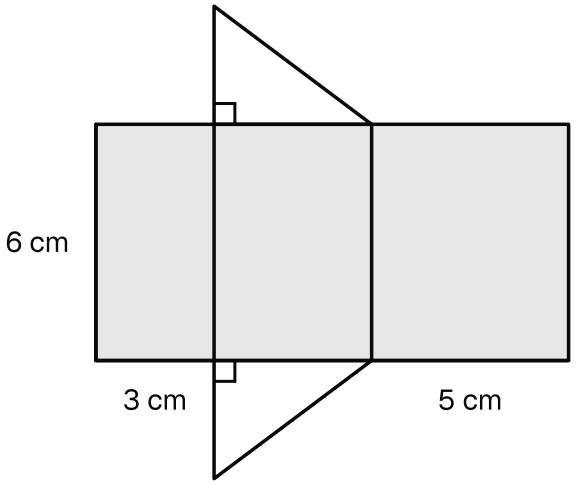
Exemple

Le prisme dessiné plus haut : base triangle de côtés $3\ \text{cm}$, $4\ \text{cm}$, $5\ \text{cm}$; hauteur $6\ \text{cm}$.

Le périmètre de la base est $3 + 4 + 5 = 12$, soit $12\ \text{cm}$.

Pièce du patron	Dimensions
grand rectangle	$6\ \text{cm}$ sur $12\ \text{cm}$
1re face latérale	$6\ \text{cm}$ sur $3\ \text{cm}$
2e face latérale	$6\ \text{cm}$ sur $4\ \text{cm}$
3e face latérale	$6\ \text{cm}$ sur $5\ \text{cm}$
deux bases	triangles de côtés $3\ \text{cm}$, $4\ \text{cm}$, $5\ \text{cm}$

Trace-le sur ton cahier, découpe-le et plie-le.



Le patron du prisme de base 3 cm, 4 cm, 5 cm et de hauteur 6 cm : un grand rectangle de 6 cm sur 12 cm et deux triangles rectangles.

Attention : Un patron qui ne se referme pas

✗ Coller les deux bases du même côté du grand rectangle.

✓ Au pliage, elles se superposeraient et le prisme resterait ouvert de l'autre côté. Une base va en haut du grand rectangle, l'autre en bas.

Aire latérale et aire totale d'un prisme droit

Propriété : Aire latérale et aire totale d'un prisme droit

Soit un prisme droit de hauteur h, dont la base a pour périmètre P et pour aire B, les longueurs étant exprimées dans la même unité.

- L'**aire latérale** du prisme droit, c'est-à-dire la somme des aires de ses faces latérales, est

$$\text{aire latérale} = P \times h.$$

- L'**aire totale** du prisme droit est la somme de son aire latérale et des aires de ses deux bases :

$$\text{aire totale} = P \times h + 2 \times B.$$

Remarque : Admis

L'aire latérale est l'aire du grand rectangle du patron. Ces deux formules sont admises.

Méthode : Calculer les aires d'un prisme droit

1. **Mets** toutes les longueurs dans la même unité.
2. **Calcule** le périmètre P de la base, puis multiplie-le par la hauteur h : c'est l'aire latérale.
3. **Calcule** l'aire B d'une base, avec la formule du triangle ou du parallélogramme.
4. **Ajoute** deux fois B à l'aire latérale pour obtenir l'aire totale, puis écris l'unité d'aire.

Exemple

Pour le même prisme, $P = 12\ \text{cm}$ et $h = 6\ \text{cm}$. L'aire latérale vaut :

$$12 \times 6 = 72\ \text{cm}^2$$

Les côtés de $3\ \text{cm}$ et $4\ \text{cm}$ forment l'angle droit du triangle. L'aire d'une base est donc $B = 3 \times 4 : 2 = 6\ \text{cm}^2$.

On ajoute les deux bases à l'aire latérale :

$$\begin{aligned}\text{aire totale} &= 72 + 2 \times 6 \\ &= 84\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

Il faut donc $84\ \text{cm}^2$ de carton, sans compter les petites bandes de colle (les languettes).

Attention : Deux hauteurs différentes

✗ Prendre la hauteur du prisme pour calculer l'aire du triangle de base.

✓ La **hauteur du triangle** relative à un côté part du sommet d'en face et tombe à angle droit sur ce côté. Elle sert seulement à calculer B. La **hauteur du prisme** est la longueur d'une arête latérale : elle sert pour l'aire latérale et pour le volume.

Volume d'un prisme droit

À retenir : Tu as vu au primaire

Le volume d'un pavé droit est $\text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$.

En fait, tu comptes les cubes de $1\ \text{cm}^3$ d'une couche, puis le nombre de couches. Le nombre de cubes d'une couche est égal à l'aire de la base.

Propriété : Volume d'un prisme droit

Soit un prisme droit de hauteur h dont la base a pour aire B, les longueurs étant exprimées dans la même unité. Son **volume** V est

$$V = B \times h.$$

Si les longueurs sont en centimètres, l'aire B est en cm^2 et le volume V est en cm^3.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. Il prolonge la règle du pavé droit : aire d'une base fois hauteur.

Méthode : Calculer le volume d'un prisme droit

1. **Trouve** les deux bases : les faces jumelles et parallèles, même si le prisme est couché.
2. **Calcule** l'aire B d'une base.
3. **Multiplie** B par la hauteur h du prisme.
4. **Écris** l'unité de volume. Pour une capacité, convertis avec $1\ \mathrm{dm}^3 = 1\ \mathrm{L}$ ou $1\ \mathrm{cm}^3 = 1\ \mathrm{mL}$.

Exemple

Pour le même prisme, $B = 6\ \mathrm{cm}^2$ et $h = 6\ \mathrm{cm}$.

$$V = 6 \times 6 = 36\ \mathrm{cm}^3$$

Comme $1\ \mathrm{cm}^3 = 1\ \mathrm{mL}$, ce prisme contient $36\ \mathrm{mL}$, c'est-à-dire $0{,}036\ \mathrm{L}$.

Attention : Aire ou volume : l'unité change

✗ $1\ \mathrm{m}^3 = 100\ \mathrm{dm}^3$.

✓ Dans $1\ \mathrm{m}^3$, on range $10 \times 10 \times 10 = 1\,000$ cubes de $1\ \mathrm{dm}^3$. Donc $1\ \mathrm{m}^3 = 1\,000\ \mathrm{dm}^3$.

Une aire se mesure en unités carrées (cm^2), un volume en unités cubes (cm^3). Avant tout calcul, mets les longueurs dans la même unité.

Le cylindre de révolution et son patron

Exemple

Une boîte de conserve est un cylindre de révolution.

Son couvercle et son fond sont deux disques identiques et parallèles : ce sont les bases. Le tour de la boîte, couvert par l'étiquette, est la surface latérale.

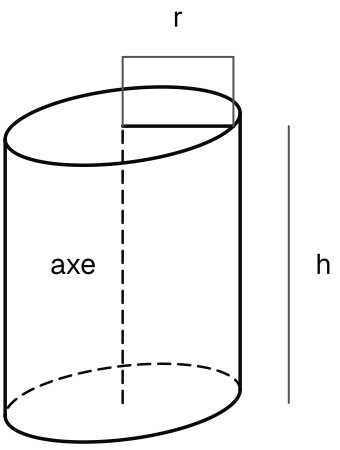
Une baguette plantée au centre du fond et au centre du couvercle suivrait l'axe.

Définition : Cylindre de révolution

Un **cylindre de révolution** (on dit aussi **cylindre droit**) est un solide limité par :

- deux **disques** superposables et parallèles, de même rayon r, appelés les **bases** ;
- une surface courbe, appelée la **surface latérale**.

La droite qui passe par les centres des deux bases est l'**axe** du cylindre ; elle est perpendiculaire aux bases. La distance entre les centres des deux bases est la **hauteur** h du cylindre.

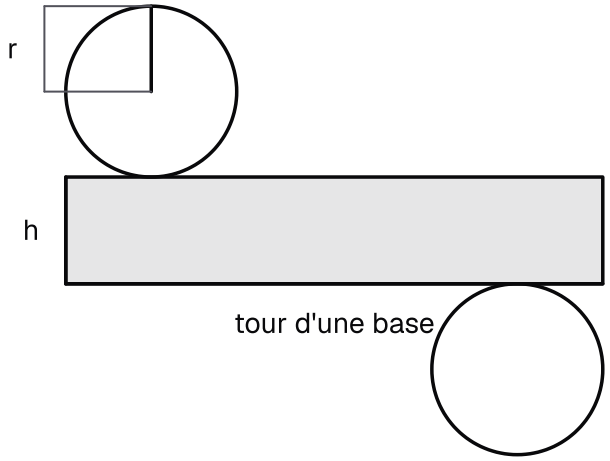


Un cylindre de révolution et ses mots : le rayon r d'une base, la hauteur h, et l'axe qui passe par les centres des deux bases.

Propriété : Patron d'un cylindre de révolution

Le patron d'un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h est formé :

- des **deux disques** de rayon r, les bases ;
- d'un **rectangle**, la surface latérale déroulée. Un de ses côtés mesure la hauteur h ; l'autre est égal au **périmètre d'une base**, c'est-à-dire $2 \times \pi \times r$.



Le patron d'un cylindre de rayon r et de hauteur h : un rectangle dont un côté vaut h et l'autre le tour d'une base, et deux disques de rayon r.

Remarque : Admis

Décolle l'étiquette d'une boîte : à plat, c'est un rectangle. Un de ses côtés fait exactement le tour d'une base.

Cette description du patron est admise.

Méthode : Construire le patron d'un cylindre

1. **Calcule** le tour d'une base, $2 \times \pi \times r$: c'est la valeur **exacte**, qui garde π. Cherche ensuite une valeur **approchée**, un nombre décimal tout proche, à la calculatrice ou avec $\pi \approx 3{,}14$.
2. **Trace** un rectangle : la hauteur h d'un côté, ce tour de l'autre.
3. **Trace** au compas deux disques de rayon r, l'un contre le côté du haut, l'autre contre celui du bas : ces deux côtés mesurent le tour d'une base.

Exemple

Une boîte de diamètre 8 cm et de hauteur 10 cm. Son rayon est $8 : 2 = 4$ cm.

Le côté du rectangle qui fait le tour d'une base mesure :

$$2 \times \pi \times 4 = 8 \times \pi \text{ cm}$$

À la calculatrice, au dixième, cela fait environ $25{,}1$ cm.

Le patron : un rectangle de 10 cm sur environ $25{,}1$ cm, et deux disques de rayon 4 cm.

Aire et volume d'un cylindre de révolution

Propriété : Aire latérale et aire totale d'un cylindre de révolution

Soit un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h, exprimés dans la même unité.

- Son **aire latérale** est l'aire du rectangle de son patron :

$$\text{aire latérale} = 2 \times \pi \times r \times h.$$

- Son **aire totale** est la somme de son aire latérale et des aires de ses deux bases :

$$\begin{aligned}\text{aire totale} = {} & 2 \times \pi \times r \times h \\ & + 2 \times \pi \times r \times r.\end{aligned}$$

Propriété : Volume d'un cylindre de révolution

Soit un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h, exprimés dans la même unité. Son **volume** V est l'aire d'une base multipliée par la hauteur :

$$V = \pi \times r \times r \times h.$$

Remarque : Admis

L'aire latérale est l'aire du rectangle du patron. Le volume suit la même règle que le prisme : aire d'une base fois hauteur.

Ces formules sont admises.

Méthode : Calculer l'aire latérale et le volume d'un cylindre

1. **Repère** le rayon r ; si tu as le diamètre, divise-le par 2.
2. **Écris** la formule, puis remplace r et h, dans la même unité.
3. **Donne** la valeur exacte, avec π.
4. **Arrondis** ensuite, en disant l'outil (calculatrice ou $\pi \approx 3{,}14$) et la précision (au dixième, à l'unité).

Exemple

Même boîte : $r = 4\ \text{cm}$ et $h = 10\ \text{cm}$. L'aire latérale vaut :

$$2 \times \pi \times 4 \times 10 = 80 \times \pi\ \text{cm}^2$$

À la calculatrice, au dixième : $\text{aire latérale} \approx 251{,}3\ \text{cm}^2$.

Les deux bases ajoutent $2 \times \pi \times 4 \times 4 = 32 \times \pi\ \text{cm}^2$.

$$\begin{aligned}\text{aire totale} &= 80 \times \pi \\ &\quad + 32 \times \pi \\ &= 112 \times \pi \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Au dixième, à la calculatrice : $\text{aire totale} \approx 351{,}9 \text{ cm}^2$.

Exemple

Toujours avec $r = 4$ cm et $h = 10$ cm :

$$\begin{aligned}V &= \pi \times 4 \times 4 \times 10 \\ &= 160 \times \pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$

À la calculatrice, à l'unité : $V \approx 503 \text{ cm}^3$. La boîte contient donc à peu près un demi-litre.

Attention : Rayon, pas diamètre

✗ Pour une boîte de diamètre 8 cm, calculer $\pi \times 8 \times 8 \times 10$.

✓ Les formules demandent le rayon : $r = 8 : 2 = 4$ cm. Avec le diamètre, le volume trouvé serait quatre fois trop grand.

Attention : Valeur exacte ou valeur approchée

✗ $V = 502{,}4 \text{ cm}^3$, en prenant $\pi \approx 3{,}14$.

✓ Avec $3{,}14$, le résultat n'est qu'approché : $V \approx 502{,}4 \text{ cm}^3$. La seule écriture exacte est $V = 160 \times \pi \text{ cm}^3$.

Synthèse

À retenir : Quelle formule pour quelle question ?

La question parle de…	Tu calcules…
carton, papier ou peinture pour le tour seulement, étiquette	l'aire latérale
tout l'emballage, avec le dessus et le dessous	l'aire totale
contenance, remplissage, litres, place à l'intérieur	le volume
dessin à plat à découper puis à plier	le patron

Prisme droit : aire latérale

$$\text{aire latérale} = P \times h$$

Prisme droit : aire totale

$$\text{aire totale} = P \times h + 2 \times B$$

Prisme droit : volume

$$V = B \times h$$

Cylindre : aire latérale

$$\text{aire latérale} = 2 \times \pi \times r \times h$$

Cylindre : aire totale

$$\text{aire totale} = 2 \times \pi \times r \times h + 2 \times \pi \times r \times r$$

Cylindre : volume

$$V = \pi \times r \times r \times h$$

Volume et capacité

$$1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L}$$

Remarque : Le mot du prof

Avec ces formules, tu sais emballer, peindre et remplir une boîte.

Elles sont toutes admises : retiens-les en pensant au patron.