BURHAN

Prisme droit et cylindre de révolution

1ère Année Collège · Mathématiques

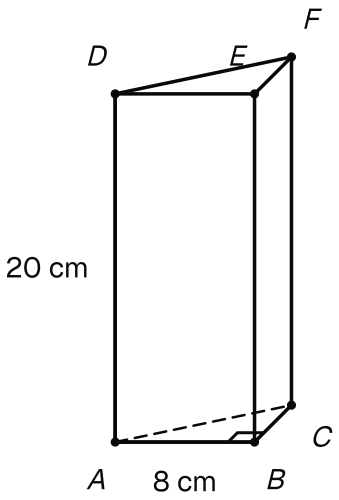
Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/prisme-droit-et-cylindre/cours

Chapitre	Semestre
Prisme droit et cylindre de révolution	Semestre 2

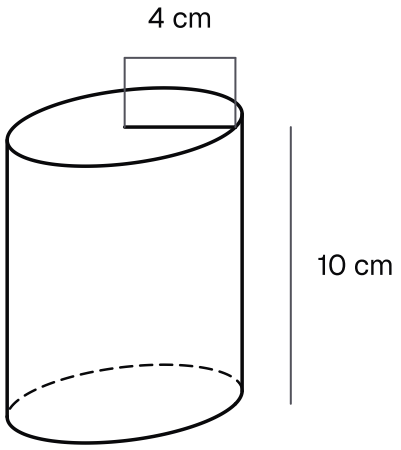
Deux boîtes au marché

Au marché, deux boîtes sont posées côte à côte. La première contient des chocolats : ses deux bouts sont des triangles.

La seconde est une boîte de conserve, ronde sur le côté. Le marchand te demande laquelle peut contenir le plus.



La boîte de chocolats dessinée debout sur un de ses bouts : un triangle rectangle de côtés 6 cm et 8 cm autour de l'angle droit, et 20 cm de longueur.



La boîte de conserve debout : un fond rond de rayon 4 cm et une hauteur de 10 cm.

Devine : Laquelle contient le plus ?

Les bouts de la boîte de chocolats sont des triangles rectangles. Les côtés de l'angle droit mesurent $6\ \text{cm}$ et $8\ \text{cm}$. La boîte est longue de $20\ \text{cm}$.

La boîte de conserve a un fond de rayon $4\ \text{cm}$ et une hauteur de $10\ \text{cm}$. Laquelle peut contenir le plus ?

A. La boîte de chocolats

Faux.

Elle est deux fois plus longue, c'est vrai. Mais la longueur ne suffit pas : la taille du fond compte aussi. Tu feras le calcul à la fin du chapitre.

B. La boîte de conserve

Juste.

Bonne intuition. Son fond rond est plus grand que le triangle. Tu le vérifieras par le calcul à la fin du chapitre.

C. Les deux contiennent autant

Faux.

Pas tout à fait. Les deux volumes sont proches, mais pas égaux. Tu feras le calcul à la fin du chapitre.

Correction

La boîte de conserve contient un peu plus. Pour le prouver, il faut calculer le volume de chaque boîte. C'est l'objet de ce chapitre : la synthèse donne le calcul complet.

Ces deux boîtes ont des formes célèbres en géométrie : le prisme droit et le cylindre de révolution. Tu vas apprendre à les reconnaître et à les dessiner. Tu vas fabriquer leur patron, puis calculer leur aire et leur volume.

Reconnaître un prisme droit

Des objets à regarder

Regarde une tente canadienne, une part de fromage en triangle ou une boîte de chocolats en forme de toit. Chacun a deux faces identiques, face à face. Entre ces deux faces, il y a des faces rectangulaires.

Devine : Deux triangles face à face

Lequel de ces objets a deux faces triangulaires identiques, face à face, reliées par trois rectangles ?

A. Une boîte de conserve posée debout

Faux.
Ses deux faces du bout sont rondes, pas triangulaires. Tu retrouveras cet objet plus loin dans le chapitre.

B. Une tente canadienne fermée, tapis compris

Juste.
Oui. Devant et derrière, deux triangles identiques. Les deux pans du toit et le tapis de sol sont trois rectangles.

C. Un dé à jouer

Faux.
Toutes ses faces sont des carrés. Aucune face n'est un triangle.

Correction
La tente canadienne fermée a deux faces triangulaires, devant et derrière. Elles sont reliées par trois rectangles : les deux pans du toit et le tapis de sol.

Les mots du prisme droit

Exemple : la tente canadienne

Les deux triangles de la tente, devant et derrière, ont exactement la même forme et la même taille. Découpés, on pourrait les poser l'un sur l'autre : on dit qu'ils sont **superposables**.

Ils sont aussi **parallèles** : comme deux murs face à face, ils ne se rencontrent jamais. Les trois autres faces sont des rectangles.

Définition : Prisme droit

Un **prisme droit** est un solide limité par des faces planes :

- deux faces **superposables** et **parallèles**, appelées les **bases** ; dans ce chapitre, chaque base est un triangle ou un parallélogramme ;
- des **faces latérales** qui sont des **rectangles**.

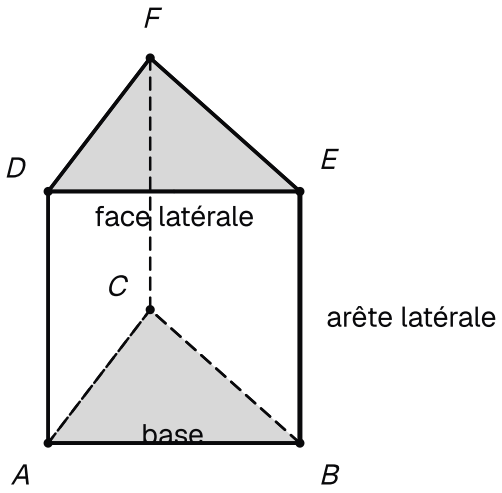
Les côtés des faces latérales qui relient les deux bases s'appellent les **arêtes latérales**. Elles ont toutes la même longueur et elles sont perpendiculaires aux bases. Cette longueur commune est la **hauteur** du prisme droit.

Un pavé droit (et en particulier un cube) est un prisme droit dont les bases sont des rectangles.

À retenir : En clair

Un prisme droit a deux **bases** identiques, face à face. Ses autres faces, les **faces latérales**, sont des rectangles.

Les **arêtes latérales** vont d'une base à l'autre. Elles ont toutes la même longueur : la **hauteur** du prisme.



Un prisme droit à bases triangulaires : les deux triangles teintés ABC et DEF sont ses bases, ABED est une de ses faces latérales et [BE] une de ses arêtes latérales.

Vérifie : La hauteur d'une boîte

Une boîte de chocolats est un prisme droit. Ses bases sont des triangles de côtés $3\ \text{cm}$, $4\ \text{cm}$ et $5\ \text{cm}$.

> Ses arêtes latérales mesurent $15\ \text{cm}$. Quelle est la hauteur de ce prisme droit ?
>
> **A.** $15\ \text{cm}$
> **Juste.**
> Juste. La hauteur du prisme se mesure sur une arête latérale.
>
> **B.** $4\ \text{cm}$
> **Faux.**
> Faux. $4\ \text{cm}$ est un côté du triangle de base. La hauteur du prisme se mesure d'une base à l'autre.
>
> **C.** $5\ \text{cm}$
> **Faux.**
> Faux. $5\ \text{cm}$ est le plus grand côté du triangle. Il ne relie pas les deux bases.
>
> **Correction**
> La hauteur d'un prisme droit est la longueur commune de ses arêtes latérales. Ici, elle vaut $15\ \text{cm}$. Les longueurs $3\ \text{cm}$, $4\ \text{cm}$ et $5\ \text{cm}$ sont les côtés d'une base.

Le pavé droit, un vieil ami

Tu as vu au primaire le **pavé droit**, comme une boîte à chaussures. Ses six faces sont des rectangles.

Choisis deux faces opposées : ce sont les bases. Les quatre autres faces sont latérales.

Le pavé droit est donc un prisme droit à bases rectangulaires. Le cube aussi.

Une base a autant de côtés que le prisme a de faces latérales.

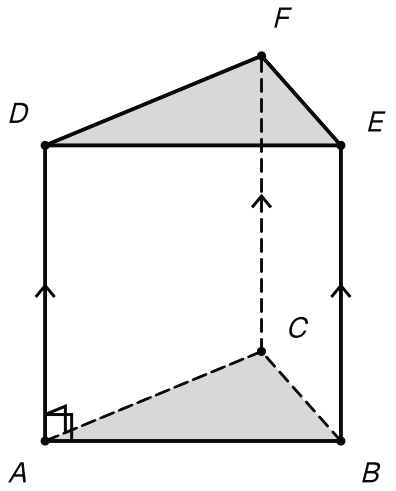
Solide	Forme des bases	Faces latérales	Arêtes latérales
prisme à base triangulaire	triangle	3	3
prisme à base en parallélogramme	parallélogramme	4	4
pavé droit	rectangle	4	4

Droites et plans dans l'espace

Pose la boîte de chocolats sur une base. Ses trois arêtes latérales sont **parallèles** entre elles.

Chacune est **perpendiculaire** à la base, comme un poteau planté bien droit dans le sol.

Les deux bases sont des faces parallèles. Une arête te donne l'image d'une droite, une face celle d'un morceau de plan.



Le prisme posé sur sa base ABC : les arêtes latérales [AD], [BE] et [CF] portent le même chevron, et un angle droit codé en A les montre perpendiculaires à la base.

Vérifie : Une boîte couchée

Tu couches la boîte de chocolats sur une face latérale. Ses arêtes latérales sont maintenant horizontales. Que peux-tu dire de ces trois arêtes ?

A. Elles se coupent toutes en un même point.

Faux.

Faux. Elles vont d'une base à l'autre sans jamais se rencontrer.

B. Elles sont perpendiculaires entre elles.

Faux.

Faux. Deux arêtes latérales ne forment jamais un angle droit entre elles : elles vont dans la même direction.

C. Elles sont parallèles et de même longueur.

Juste.

Juste. Coucher la boîte ne change pas le solide : les arêtes latérales restent parallèles et de même longueur.

Correction

Les arêtes latérales d'un prisme droit sont parallèles et ont toutes la même longueur, la hauteur. Que la boîte soit debout ou couchée, cela ne change pas.

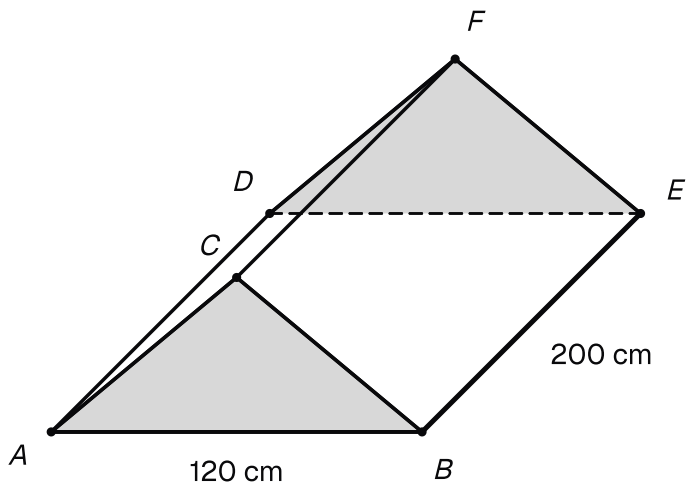
Un prisme couché

Attention : Les bases ne sont pas toujours « en bas »

Une tente est posée sur son tapis de sol, un rectangle long de $200\ \text{cm}$ (la longueur de la tente) et large de $120\ \text{cm}$.

✗ « Les bases sont le tapis de sol et le dessous du toit. »

✓ Les bases sont les deux triangles, devant et derrière : ce sont les faces superposables et parallèles. Chaque arête latérale mesure ici $200\ \text{cm}$: c'est la hauteur, même couchée à l'horizontale.



La tente couchée sur son tapis de sol : ses bases sont les deux triangles teintés, devant et derrière, et l'arête latérale [BE], posée au sol, mesure 200 cm.

À toi : Compter faces et arêtes

Un prisme droit a pour bases deux parallélogrammes. Combien a-t-il de faces en tout ? Combien d'arêtes ?

Indice 1
Compte d'abord les faces latérales : il y en a une par côté de la base.

Indice 2
Combien de côtés a un parallélogramme ? Chaque côté donne une face latérale. N'oublie pas les deux bases.

Indice 3
Point délicat : pour les arêtes, compte celles des deux bases, puis les arêtes latérales.

Réponse

Faces. Il y a 4 faces latérales et 2 bases, soit $4 + 2 = 6$ faces.

Arêtes. Chaque base a 4 côtés. Il y a 4 arêtes latérales. Le prisme a donc $4 + 4 + 4 = 12$ arêtes.

Tu sais maintenant reconnaître un prisme droit, même couché, et nommer ses éléments. C'est la clé de tout le chapitre.

Représenter un solide en perspective cavalière

Dessiner sur une feuille plate

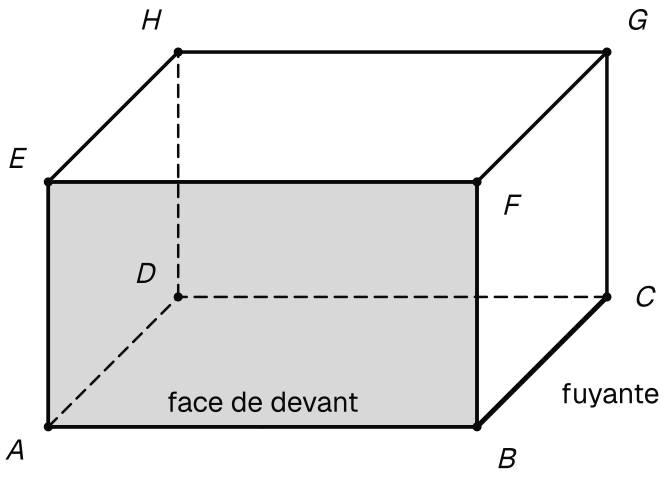
Ta feuille est plate, mais un solide ne l'est pas. Pour le dessiner, on utilise la **perspective cavalière**.

C'est une façon de dessiner un solide qui donne l'impression de la profondeur. Tu vas la pratiquer à main levée, sans règle.

> **Devine : La face de côté**
>
> Tu dessines une boîte à chaussures vue de face, un peu par le côté. Dans la réalité, la face de droite est un rectangle. À quoi ressemble-t-elle sur ton dessin ?
>
> **A.** À un rectangle de la même taille
> **Faux.**
> Non. Si tu la dessinais en vraie forme, la boîte paraîtrait toute plate.
>
> **B.** À un parallélogramme plus étroit
> **Juste.**
> Oui. Ses côtés partent en biais vers l'arrière et sont raccourcis. C'est ce qui donne la profondeur.
>
> **C.** À un triangle
> **Faux.**
> Non. La face garde quatre côtés, deux à deux parallèles.
>
> **Correction**
> Sur le dessin, la face de droite devient un parallélogramme plus étroit. Ses côtés qui partent vers l'arrière sont dessinés en biais et raccourcis.

Trois règles suffisent.

La face de devant est dessinée en **vraie forme**. Les arêtes qui partent vers l'arrière s'appellent les **fuyantes** : elles sont parallèles, obliques et raccourcies, souvent de moitié. Les arêtes que l'on ne voit pas sont dessinées en **pointillés**.



Le pavé ABCDEFGH vu selon la perspective cavalière : ABFE, à l'avant, garde sa vraie forme, les fuyantes partent en biais vers l'arrière, et les trois arêtes cachées sont en pointillés.

La méthode pas à pas

Méthode : Représenter un solide à main levée en perspective cavalière

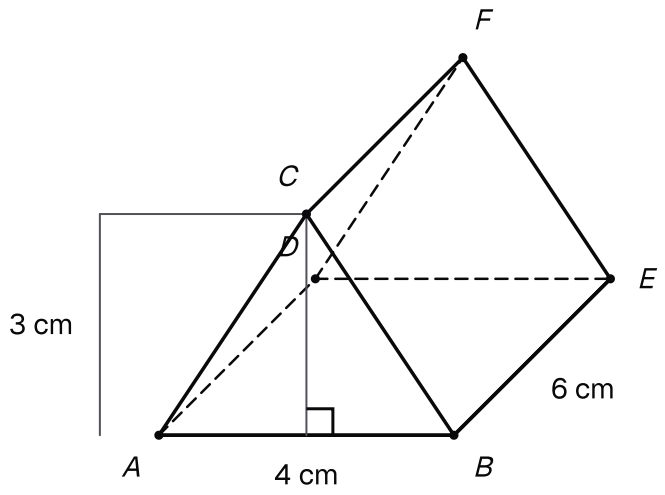
1. **Dessine** en vraie forme la face de devant : une base ou une face latérale.
2. **Trace** les fuyantes : parallèles entre elles, obliques, plus courtes que dans la réalité.
3. **Relie** leurs extrémités : la face arrière a la même forme que la face avant.
4. **Repasse** en pointillés les arêtes cachées.

Exemple : une tente vue de face

La tente a des triangles de base $4\ \text{cm}$ et de hauteur $3\ \text{cm}$, et une longueur de $6\ \text{cm}$. Dessine d'abord le triangle de devant, en vraie forme.

De chaque sommet, trace une fuyante vers le haut et vers la droite, inclinée d'environ 45 degrés. Chaque fuyante mesure $3\ \text{cm}$, la moitié de $6\ \text{cm}$. Relie les trois extrémités : c'est le triangle arrière.

Avec ces fuyantes, le coin arrière en bas à gauche est caché par le devant. Ses trois arêtes vont en pointillés.



Le dessin de la tente : le triangle de devant en vraie forme, 4 cm de base et 3 cm de haut, puis les trois fuyantes de la longueur de 6 cm, tracées deux fois plus courtes.

Ce que le dessin respecte

Un dessin en perspective cavalière ne dit pas tout vrai.

Sur le dessin	Respecté	Pas respecté
face de devant	forme, longueurs, angles	rien
fuyantes	parallélisme	longueurs, angles droits
arêtes cachées	position	elles sont en pointillés

Un angle droit d'une face de côté peut donc paraître aigu sur le dessin.

Trouve l'erreur : Le dessin de Samir

Samir dessine un cube d'arête $4\ \text{cm}$ en perspective cavalière. Il mesure une fuyante sur son dessin : $2\ \text{cm}$.

Il s'écrie : « Mon dessin est raté ! » Qu'en penses-tu ?

A. Il a raison : chaque arête du cube doit mesurer $4\ \text{cm}$ sur le dessin.

Faux.

Faux. Seule la face de devant garde ses vraies longueurs.

B. Il a raison : une fuyante doit être deux fois plus longue.

Faux.

Faux. Une fuyante est raccourcie, jamais allongée.

C. Il a tort : une fuyante est raccourcie, souvent de moitié.

Juste.
Juste. Une fuyante de $2\ \text{cm}$ représente bien une arête de $4\ \text{cm}$.

Correction
Le dessin de Samir est juste. Les fuyantes sont raccourcies : ici de moitié, car $4 : 2 = 2$. Sur le cube réel, toutes les arêtes mesurent $4\ \text{cm}$.

À toi : Dessiner une brique

Sur ton cahier, dessine à main levée une brique en forme de pavé droit. Elle mesure $6\ \text{cm}$ de long, $2\ \text{cm}$ de haut et $3\ \text{cm}$ de profondeur. Quelles arêtes dessines-tu en pointillés ?

Indice 1
Commence par la face de devant : un rectangle de $6\ \text{cm}$ sur $2\ \text{cm}$, en vraie forme.
Indice 2
Trace quatre fuyantes parallèles, vers le haut et vers la droite, d'environ $1{,}5\ \text{cm}$ chacune.
Indice 3
Point délicat : avec des fuyantes vers le haut et la droite, un seul sommet de l'arrière est caché par le devant. Lequel ?

Réponse
La face de devant est un rectangle de $6\ \text{cm}$ sur $2\ \text{cm}$. Les fuyantes mesurent $1{,}5\ \text{cm}$ sur le dessin, car $3 : 2 = 1{,}5$.

Le sommet arrière en bas à gauche est caché. Les trois arêtes qui y arrivent sont en pointillés.

Tu sais maintenant donner de la profondeur à une feuille plate. Tu dessineras aussi le cylindre de cette façon, un peu plus loin.

Le patron d'un prisme droit

Déplier une boîte

Prends une boîte de dentifrice vide. Coupe-la le long de quelques arêtes, puis aplatis-la. Tu obtiens une figure plate, d'un seul morceau.

Tu as vu au primaire ce travail sur le cube et le pavé droit.

Devine : Une boîte en forme de toit

Tu déplies une boîte en forme de prisme droit à base triangulaire. Combien de faces compte la figure plate obtenue ?

A. 5 faces : 2 triangles et 3 rectangles
Juste.
Oui. Chaque face de la boîte se retrouve à plat : rien ne disparaît.

B. 6 faces, comme un pavé droit

Faux.

Non. Le pavé droit a quatre faces latérales ; ici, la base n'a que trois côtés.

C. 3 faces : seulement les rectangles

Faux.

Non. Les deux triangles restent attachés à la figure plate.

Correction

La boîte a 2 bases triangulaires et 3 faces latérales rectangulaires. La figure plate compte donc $2 + 3 = 5$ faces.

Replie maintenant la figure plate. La boîte se reforme. Il n'y a aucun trou, et aucune face n'en recouvre une autre.

Définition : Patron d'un solide

Le **patron** d'un solide est une figure plane, d'un seul morceau, que l'on peut découper puis plier pour fabriquer ce solide, sans trou et sans que deux faces se recouvrent.

Un même solide peut avoir plusieurs patrons différents.

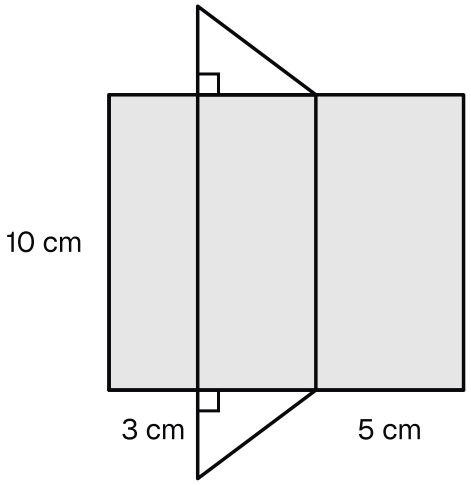
Le patron d'un prisme à base triangulaire

Exemple : la boîte en forme de toit

Ses bases sont des triangles de côtés $3\ \text{cm}$, $4\ \text{cm}$ et $5\ \text{cm}$. Sa hauteur est $10\ \text{cm}$.

Dépliée, elle montre trois rectangles côte à côte : $10\ \text{cm}$ sur $3\ \text{cm}$, $10\ \text{cm}$ sur $4\ \text{cm}$, $10\ \text{cm}$ sur $5\ \text{cm}$.

Ensemble, ces rectangles forment un grand rectangle de $10\ \text{cm}$ sur $12\ \text{cm}$, car $3 + 4 + 5 = 12$. Les deux triangles sont collés de part et d'autre.



Le patron de la boîte en forme de toit : trois faces latérales de 3 cm, 4 cm et 5 cm de large forment un rectangle de 12 cm sur 10 cm, et les deux triangles rectangles sont collés en haut et en bas.

Propriété : Patron d'un prisme droit

Le patron d'un prisme droit est formé :

- des **deux bases**, superposables ;
- des **faces latérales**, des rectangles qui ont tous un côté égal à la hauteur h du prisme ; leur autre côté est un côté de la base.

Placées côte à côte, les faces latérales forment un seul **grand rectangle**. Un de ses côtés mesure h ; l'autre est égal au **périmètre de la base**.

Remarque : Admis

Tu l'as observé en dépliant une boîte, sans le démontrer. Ce résultat est admis : on l'accepte parce qu'on l'a vérifié sur des exemples, sans en faire la démonstration.

Vérifie : Le grand rectangle

Un prisme droit a pour bases des parallélogrammes de côtés $6\ \text{cm}$ et $3\ \text{cm}$. Sa hauteur est $7\ \text{cm}$. Quelles sont les dimensions du grand rectangle de son patron ?

A. $7\ \text{cm}$ sur $9\ \text{cm}$

Faux.

Faux. $9\ \text{cm}$ est la moitié du périmètre : un parallélogramme a quatre côtés, pas deux.

B. $6\ \text{cm}$ sur $3\ \text{cm}$

Faux.
Faux. Ce sont les côtés de la base, pas le grand rectangle.

C. $7\ \text{cm}$ sur $18\ \text{cm}$
Juste.
Juste. Un côté est la hauteur, l'autre est le périmètre de la base.

Correction
Un côté du grand rectangle est la hauteur du prisme : $7\ \text{cm}$. L'autre est le périmètre de la base : $6 + 3 + 6 + 3 = 18$, soit $18\ \text{cm}$.

Construire le patron

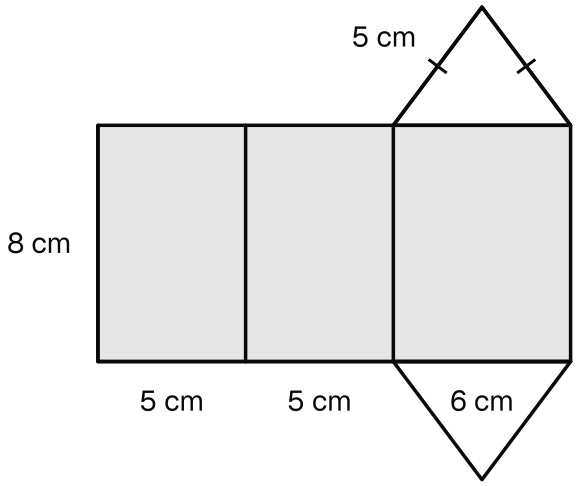
Méthode : Construire le patron d'un prisme droit

1. **Trace** un grand rectangle : un côté mesure la hauteur du prisme, l'autre le périmètre de la base.
2. **Partage**-le en bandes : chaque bande a un côté égal à un côté de la base, pris en faisant le tour.
3. **Ajoute** les deux bases, une en haut, une en bas, chacune collée par un côté de même longueur.
4. **Vérifie** que deux côtés qui se collent au pliage ont la même longueur.

Exemple : Exemple guidé : une tente de poupée

Ses bases sont des triangles de côtés $5\ \text{cm}$, $5\ \text{cm}$ et $6\ \text{cm}$. Sa hauteur est $8\ \text{cm}$.

1. **Trace** un rectangle de $8\ \text{cm}$ sur $16\ \text{cm}$, car $5 + 5 + 6 = 16$.
2. **Partage**-le en bandes de $5\ \text{cm}$, $5\ \text{cm}$ et $6\ \text{cm}$.
3. **Ajoute** un triangle en haut et un en bas. Rappel du primaire : pour construire un triangle dont tu connais les trois côtés, trace un côté à la règle, puis les deux autres au compas.
4. **Vérifie** : chaque côté collé mesure la même longueur des deux côtés.



Le patron de la tente de poupée : un rectangle de 8 cm sur 16 cm partagé en bandes de 5 cm, 5 cm et 6 cm, et un triangle de côtés 5 cm, 5 cm et 6 cm en haut et en bas de la bande de 6 cm.

Fabrique la maquette. Reproduis ce patron sur une feuille cartonnée.

Ajoute de petites bandes de colle, les **languettes**, sur quelques bords. Découpe, plie le long des traits, puis colle.

Un patron qui coince

Trouve l'erreur : Le patron de Lina

Lina veut un prisme droit à bases triangulaires de côtés $3\ \text{cm}$, $4\ \text{cm}$ et $5\ \text{cm}$, de hauteur $6\ \text{cm}$. Elle trace trois rectangles côte à côte : $6\ \text{cm}$ sur $3\ \text{cm}$, $6\ \text{cm}$ sur $4\ \text{cm}$ et $6\ \text{cm}$ sur $5\ \text{cm}$.

Elle colle le premier triangle par son côté de $3\ \text{cm}$ contre le rectangle de $3\ \text{cm}$. Elle colle le second par son côté de $5\ \text{cm}$ contre le rectangle de $4\ \text{cm}$.

Au pliage, ça coince. Pourquoi ?

A. Un côté de $5\ \text{cm}$ du triangle touche un bord de $4\ \text{cm}$.

Juste.

Juste. Deux côtés qui se collent doivent avoir la même longueur.

B. Rien ne cloche : chaque base touche bien une face latérale.

Faux.

Faux. Toucher ne suffit pas : les deux bords collés doivent avoir la même longueur.

C. Il manque un rectangle : il faut quatre faces latérales.

Faux.

Faux. Une base triangulaire a trois côtés, donc trois faces latérales.

Correction

Le second triangle est collé par un côté de $5\ \text{cm}$ contre un bord de $4\ \text{cm}$. Ces deux bords ne peuvent pas se superposer. Il faut le coller contre le rectangle de $6\ \text{cm}$ sur $5\ \text{cm}$.

À toi : Décrire un patron

Un prisme droit a pour bases des triangles de côtés $4\ \text{cm}$, $5\ \text{cm}$ et $6\ \text{cm}$. Sa hauteur est $9\ \text{cm}$. Décris son patron : le grand rectangle, les faces latérales et les bases.

Indice 1
Un côté du grand rectangle mesure la hauteur du prisme.
Indice 2
L'autre côté est le périmètre de la base : additionne les trois côtés du triangle.
Indice 3
Point délicat : chaque triangle se colle contre une bande de même longueur que son côté.

Réponse
Le grand rectangle mesure $9\ \text{cm}$ sur $15\ \text{cm}$, car $4 + 5 + 6 = 15$.

Il se partage en trois faces latérales : $9\ \text{cm}$ sur $4\ \text{cm}$, $9\ \text{cm}$ sur $5\ \text{cm}$, $9\ \text{cm}$ sur $6\ \text{cm}$.

Les deux bases sont des triangles de côtés $4\ \text{cm}$, $5\ \text{cm}$ et $6\ \text{cm}$. L'une se colle en haut, l'autre en bas.

Tu sais maintenant construire le patron d'un prisme droit et fabriquer sa maquette. Ce grand rectangle va aussi te servir à calculer une aire.

Aire latérale et aire totale d'un prisme droit

Emballer une boîte

Pour emballer une boîte, il faut savoir combien de papier prévoir. La surface à recouvrir est une aire. Le patron de la boîte va t'aider à la calculer.

Devine : Le papier du grand rectangle

Une boîte en prisme droit a des bases triangulaires de côtés $6\ \text{cm}$, $8\ \text{cm}$ et $10\ \text{cm}$. Sa hauteur est $5\ \text{cm}$. Quelle est l'aire du grand rectangle de son patron ?

A. $120\ \text{cm}^2$
Juste.
Oui. Le grand rectangle mesure $5\ \text{cm}$ sur $24\ \text{cm}$.

B. $24\ \text{cm}^2$
Faux.
Non. $24\ \text{cm}$ est le périmètre de la base, une longueur. Il reste à multiplier par l'autre côté du rectangle, la hauteur.

C. $240\ \text{cm}^2$

Faux.

Non. Ce nombre est le double de l'aire cherchée : reprends les dimensions du rectangle.

Correction

Un côté du grand rectangle est la hauteur, $5\ \text{cm}$. L'autre est le périmètre de la base : $6 + 8 + 10 = 24$, soit $24\ \text{cm}$. Son aire est $24 \times 5 = 120$, soit $120\ \text{cm}^2$.

Tu as vu dans le chapitre « Périmètres et aires » l'aire de trois figures :

- rectangle : longueur × largeur ;
- parallélogramme : côté × hauteur relative à ce côté ;
- triangle : côté × hauteur relative à ce côté, puis on divise par 2.

Dans un triangle, la **hauteur relative** à un côté est le segment perpendiculaire à ce côté qui part du sommet opposé. Dans un parallélogramme, c'est la distance entre ce côté et le côté opposé.

Le grand rectangle du patron regroupe toutes les faces latérales. La somme de leurs aires s'appelle l'**aire latérale**. Avec les aires des deux bases en plus, on obtient l'**aire totale**.

La formule

Propriété : Aire latérale et aire totale d'un prisme droit

Soit un prisme droit de hauteur h, dont la base a pour périmètre P et pour aire B, les longueurs étant exprimées dans la même unité.

- L'**aire latérale** du prisme droit, c'est-à-dire la somme des aires de ses faces latérales, est

$$\text{aire latérale} = P \times h.$$

- L'**aire totale** du prisme droit est la somme de son aire latérale et des aires de ses deux bases :

$$\text{aire totale} = P \times h + 2 \times B.$$

Remarque : Admis

Tu l'as vu sur le patron, sans le démontrer. Ce résultat est admis.

Exemple : la tente de poupée

Ses bases sont des triangles de côtés $5\ \text{cm}$, $5\ \text{cm}$ et $6\ \text{cm}$. La hauteur du triangle relative au côté de $6\ \text{cm}$ est $4\ \text{cm}$. La hauteur du prisme est $8\ \text{cm}$.

Aire latérale. Le périmètre de la base est $P = 5 + 5 + 6 = 16\ \text{cm}$. On le multiplie par la hauteur du prisme : $P \times h = 16 \times 8 = 128\ \text{cm}^2$.

Les deux bases. L'aire d'une base est $B = 6 \times 4 : 2 = 12\ \text{cm}^2$. Les deux bases font $2 \times 12 = 24\ \text{cm}^2$.

Aire totale. On ajoute l'aire latérale et les deux bases :

$$\begin{aligned}\text{aire totale} &= 128 + 24 \\ &= 152\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

Vérifie : Une aire latérale

Un prisme droit a pour bases des parallélogrammes de côtés $4\ \text{cm}$ et $2\ \text{cm}$. Sa hauteur est $5\ \text{cm}$. Quelle est son aire latérale ?

A. $40\ \text{cm}^2$

Faux.

Faux. Tu as multiplié les trois longueurs. L'aire latérale est le périmètre de la base multiplié par la hauteur.

B. $60\ \text{cm}^2$

Juste.

Juste. Le périmètre de la base vaut $12\ \text{cm}$, et $12 \times 5 = 60$.

C. $30\ \text{cm}^2$

Faux.

Faux. Tu as pris un seul côté de chaque longueur. Un parallélogramme a quatre côtés.

Correction

Le périmètre de la base est $P = 4 + 2 + 4 + 2 = 12$, soit $12\ \text{cm}$.

L'aire latérale est $P \times h = 12 \times 5 = 60$, soit $60\ \text{cm}^2$.

La méthode

Méthode : Calculer l'aire latérale et l'aire totale d'un prisme droit

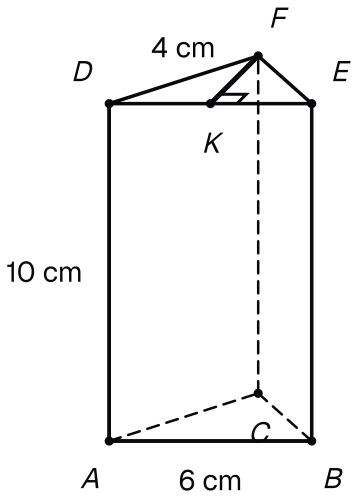
1. **Convertis** les longueurs : une seule unité pour toutes.
2. **Calcule** le périmètre P de la base, puis l'aire latérale $P \times h$.
3. **Calcule** l'aire B d'une base, avec la formule de sa figure.
4. **Additionne** : aire totale $= P \times h + 2 \times B$. Écris l'unité d'aire.

Attention : Hauteur du triangle de base et hauteur du prisme

Un prisme droit a pour bases des triangles de côté $6\ \text{cm}$ et de hauteur relative $4\ \text{cm}$. La hauteur du prisme est $10\ \text{cm}$.

✗ Karim calcule l'aire de la base avec la hauteur du prisme, $10\ \text{cm}$.

✓ L'aire de la base utilise la hauteur du triangle : $B = 6 \times 4 : 2 = 12\ \text{cm}^2$. La hauteur du prisme, $10\ \text{cm}$, sert pour l'aire latérale et le volume.



Deux hauteurs à ne pas confondre : [FK], épaissie, est la hauteur de 4 cm du triangle DEF relative au côté [DE], qui mesure 6 cm comme [AB] ; l'arête [AD], de 10 cm, est la hauteur du prisme.

À toi : Aire totale d'une boîte

Un prisme droit a pour bases des triangles rectangles. Les côtés de l'angle droit mesurent $3\ \text{cm}$ et $4\ \text{cm}$, le troisième côté $5\ \text{cm}$.

La hauteur du prisme est $10\ \text{cm}$. Calcule son aire latérale, puis son aire totale.

Indice 1
Commence par le périmètre de la base : la somme des trois côtés.
Indice 2
L'aire d'un triangle rectangle est le produit des côtés de l'angle droit, divisé par 2.
Indice 3
Point délicat : il y a deux bases. Ajoute $2 \times B$, pas B seulement.

Réponse
Aire latérale. $P = 3 + 4 + 5 = 12\ \text{cm}$, donc l'aire latérale vaut $12 \times 10 = 120\ \text{cm}^2$.

Aire d'une base. Les côtés de l'angle droit donnent $B = 3 \times 4 : 2 = 6\ \text{cm}^2$.

Aire totale.

$$\begin{aligned}\text{aire totale} &= 120 + 2 \times 6 \\ &= 132 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Conclusion. L'aire latérale du prisme vaut 120 cm^2 et son aire totale 132 cm^2.

En devoir

À retenir : Coin devoir : l'aire totale d'un prisme droit

Une boîte est un prisme droit. Ses bases sont des parallélogrammes de côtés 6 cm *et* 4 cm.

La hauteur relative au côté de 6 cm *est* 3 cm. *La hauteur de la boîte est* 10 cm. *Calcule son aire totale.*

En devoir, on écrit :

« Le périmètre de la base est $P = 6 + 4 + 6 + 4 = 20 \text{ cm}$.

L'aire latérale est $P \times h = 20 \times 10 = 200 \text{ cm}^2$.

La base est un parallélogramme. Son aire est $B = 6 \times 3 = 18 \text{ cm}^2$.

$$\begin{aligned}\text{aire totale} &= 200 + 2 \times 18 \\ &= 236 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

L'aire totale de la boîte est donc 236 cm^2. »

Vérifie : La phrase de conclusion

Une boîte a une aire latérale de 90 cm^2. Chacune de ses deux bases a une aire de 8 cm^2. Quelle conclusion écris-tu en devoir ?

A. L'aire totale de la boîte est 98 cm^2.
Faux.
Faux. Tu n'as compté qu'une base. Il y en a deux.

B. L'aire totale de la boîte est 106 cm^2.
Juste.
Juste. Le calcul est bon, et l'unité est une unité d'aire.

C. L'aire totale de la boîte est 106 cm^3.
Faux.
Faux. Le nombre est bon, mais une aire s'exprime en cm^2.

Correction
L'aire totale est $90 + 2 \times 8 = 106$. On conclut : « L'aire totale de la boîte est 106 cm^2. »

Tu sais maintenant calculer la quantité de papier pour emballer une boîte, et la rédiger comme en devoir.

Volume d'un prisme droit

Remplir une boîte

Tu as vu au primaire que le **volume** d'un solide est la place qu'il occupe. Un cube d'arête $1\ \text{cm}$ a un volume de $1\ \text{cm}^3$.

Un pavé droit de $4\ \text{cm}$, $3\ \text{cm}$ et $2\ \text{cm}$ contient $4 \times 3 \times 2 = 24$ de ces petits cubes. Son volume est $24\ \text{cm}^3$.

Devine : Un pavé coupé en deux

Ce pavé repose sur sa face de $4\ \text{cm}$ sur $3\ \text{cm}$. Tu le coupes de haut en bas, en suivant une diagonale de cette face, c'est-à-dire le segment qui joint deux sommets opposés du rectangle.

Tu obtiens deux prismes droits identiques, à base triangulaire. Quel est le volume de chacun ?

A. $24\ \text{cm}^3$, comme le pavé

Faux.
Non. Chaque morceau n'est qu'une partie du pavé.

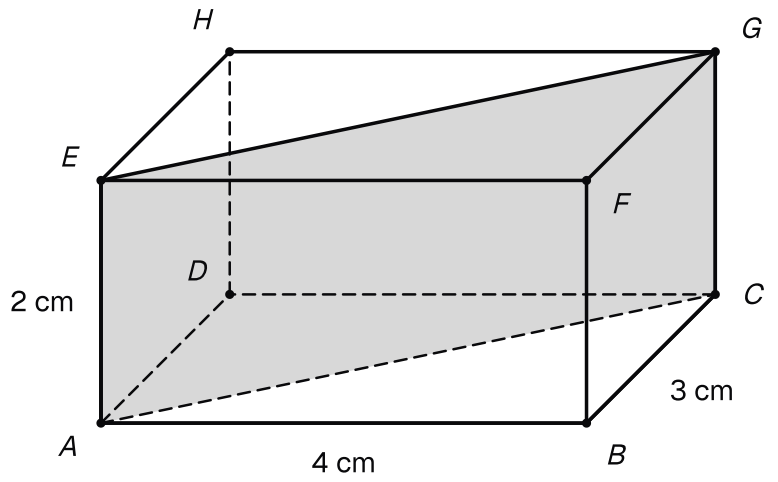
B. $6\ \text{cm}^3$

Faux.
Non. Ce nombre est l'aire du triangle de base, pas un volume.

C. $12\ \text{cm}^3$

Juste.
Oui. Les deux morceaux sont identiques : chacun est la moitié du pavé.

Correction
Les deux prismes sont identiques et forment ensemble le pavé. Chacun a donc pour volume $24 : 2 = 12$, soit $12\ \text{cm}^3$.



Le pavé de 4 cm sur 3 cm et de 2 cm de haut, et la coupe verticale qui suit la diagonale [AC] de la face du dessous.

Regarde un de ces prismes. Sa base est un triangle rectangle d'aire $4 \times 3 : 2 = 6\ \text{cm}^2$. Sa hauteur est $2\ \text{cm}$.

Or $6 \times 2 = 12$: l'aire de la base multipliée par la hauteur donne le volume.

La formule

Propriété : Volume d'un prisme droit

Soit un prisme droit de hauteur h dont la base a pour aire B, les longueurs étant exprimées dans la même unité. Son **volume** V est

$$V = B \times h.$$

Si les longueurs sont en centimètres, l'aire B est en cm^2 et le volume V est en cm^3.

Remarque : Admis

Tu l'as vu sur un pavé coupé en deux, sans le démontrer. Ce résultat est admis.

Exemple : un morceau de fromage

Le morceau est un prisme droit. Ses bases sont des triangles de côté $8\ \text{cm}$ et de hauteur relative $5\ \text{cm}$. Son épaisseur, la hauteur du prisme, est $4\ \text{cm}$.

L'aire d'une base est $B = 8 \times 5 : 2 = 20\ \text{cm}^2$. On la multiplie par la hauteur :

$$\begin{aligned} V &= B \times h \\ &= 20 \times 4 \\ &= 80 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Vérifie : Un volume

Un prisme droit a pour bases des parallélogrammes de côté 5 cm et de hauteur relative 2 cm. Sa hauteur est 6 cm. Quel est son volume ?

A. 60 cm^3

Juste.

Juste. $B = 5 \times 2 = 10 \text{ cm}^2$, puis $10 \times 6 = 60$.

B. 30 cm^3

Faux.

Faux. Tu as divisé par 2 comme pour un triangle. L'aire d'un parallélogramme est côté × hauteur relative.

C. 60 cm^2

Faux.

Faux. Le nombre est bon, mais un volume s'exprime en cm^3.

Correction

L'aire d'une base est $B = 5 \times 2 = 10 \text{ cm}^2$.

Le volume est $V = B \times h = 10 \times 6 = 60 \text{ cm}^3$.

La méthode

Méthode : Calculer le volume d'un prisme droit

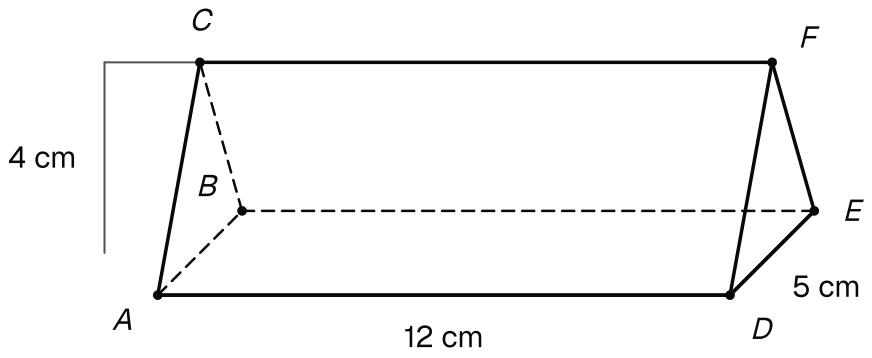
1. **Repère** les deux bases : les faces superposables et parallèles, pas forcément celle du dessous.
2. **Calcule** l'aire B d'une base.
3. **Multiplie** par la hauteur du prisme : $V = B \times h$.
4. **Écris** le résultat avec l'unité de volume. Convertis-le si l'on demande une capacité.

Exemple : Exemple guidé : un prisme couché

Un prisme droit est posé sur une face latérale de 12 cm sur 5 cm. À gauche et à droite, ses bases sont des triangles de côté 5 cm et de hauteur relative 4 cm.

1. **Repère** : les bases sont les triangles, et la hauteur du prisme est 12 cm.
2. **Calcule** : $B = 5 \times 4 : 2 = 10 \text{ cm}^2$.

3. **Multiplie** : $V = 10 \times 12 = 120\ \text{cm}^3$.



Le prisme couché de l'exemple : il repose sur une face latérale de 12 cm sur 5 cm, et ses bases, à gauche et à droite, sont des triangles de côté 5 cm et de hauteur 4 cm.

Volume et capacité

Tu as vu au primaire les unités de **capacité**, comme le litre. Elles mesurent ce qu'un récipient peut contenir.

Volume	Capacité
$1\ \text{dm}^3$	$1\ \text{L}$
$1\ \text{cm}^3$	$1\ \text{mL}$

De plus, $1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$.

Attention : Unités d'aire et unités de volume

Une aire s'exprime en cm^2 ou en m^2, un volume en cm^3 ou en m^3. Avant de calculer, mets toutes les longueurs dans la même unité.

✗ « Un mètre cube vaut cent décimètres cubes. »

✓ Un cube de $1\ \text{m}$ d'arête contient $10 \times 10 \times 10$ cubes de $1\ \text{dm}$ d'arête : $1\ \text{m}^3 = 1\,000\ \text{dm}^3$.

À toi : Les litres d'un aquarium

Un aquarium a la forme d'un pavé droit de $50\ \text{cm}$ de long, $30\ \text{cm}$ de large et $40\ \text{cm}$ de haut. Combien de litres d'eau peut-il contenir ?

Indice 1

Un pavé droit est un prisme droit : choisis une base, par exemple le fond.

Indice 2

Pour obtenir directement des litres, convertis d'abord les longueurs en décimètres.

Indice 3

Point délicat : $1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L}$, mais $1\ \text{cm}^3$ ne fait que $1\ \text{mL}$.

Réponse

Comme $10\ \text{cm} = 1\ \text{dm}$, l'aquarium mesure $5\ \text{dm}$, $3\ \text{dm}$ et $4\ \text{dm}$.

L'aire de sa base est $B = 5 \times 3 = 15\ \text{dm}^2$. Son volume est donc :

$$V = 15 \times 4 = 60\ \text{dm}^3$$

Conclusion. Comme $1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L}$, l'aquarium peut contenir $60\ \text{L}$ d'eau.

Tu sais maintenant calculer le volume d'un prisme droit et le donner en litres. Le cylindre se calcule presque de la même façon : rendez-vous à la section suivante.

Le cylindre de révolution et son patron

Des objets ronds

Une boîte de conserve, un rouleau d'essuie-tout, un pot de peinture : ces objets ont deux faces rondes identiques, face à face. Entre elles, une surface courbe fait le tour.

Devine : L'intrus

Lequel de ces objets n'a pas la forme d'un cylindre de révolution ?

A. Un pot de peinture fermé

Faux.

Non. Son fond et son couvercle sont deux disques identiques, face à face : c'est un cylindre.

B. Une pièce de monnaie

Faux.

Non. Elle est très plate, mais c'est bien un cylindre, de très petite hauteur.

C. Une tente canadienne

Juste.

Oui. Ses bases sont des triangles : c'est un prisme droit.

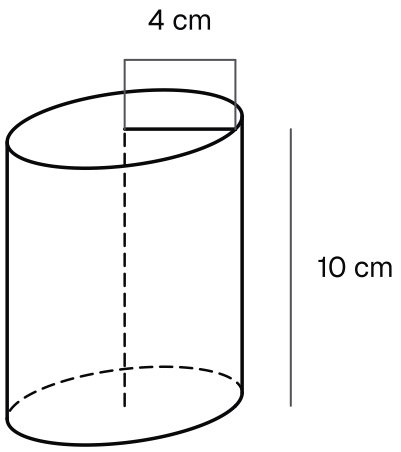
Correction

La tente canadienne est un prisme droit à bases triangulaires. Le pot de peinture et la pièce de monnaie ont deux bases rondes identiques : ce sont des cylindres.

Exemple : une boîte de conserve

Pose une boîte de conserve debout. Son fond et son couvercle sont des **disques** de rayon $4\ \text{cm}$. La distance entre ces deux disques est $10\ \text{cm}$.

Le tour de la boîte, où l'on colle l'étiquette, est une surface courbe.



La boîte de conserve debout : deux disques de rayon 4 cm, à 10 cm l'un de l'autre, et en pointillés le trait qui joint leurs centres.

Les mots du cylindre

Définition : Cylindre de révolution

Un **cylindre de révolution** (on dit aussi **cylindre droit**) est un solide limité par :

- deux **disques** superposables et parallèles, de même rayon r, appelés les **bases** ;
- une surface courbe, appelée la **surface latérale**.

La droite qui passe par les centres des deux bases est l'**axe** du cylindre ; elle est perpendiculaire aux bases. La distance entre les centres des deux bases est la **hauteur** h du cylindre.

À retenir : En clair

Un cylindre de révolution a deux bases : des disques identiques, face à face. Le **diamètre** d'une base est le double de son rayon.

L'**axe** traverse le cylindre en passant par les centres des deux bases, comme une broche. Il est perpendiculaire aux bases.

Vérifie : Le rayon d'un pot

Un pot de peinture cylindrique a un fond de diamètre $20\ \text{cm}$. Sa hauteur est $25\ \text{cm}$. Quel est le rayon de ses bases ?

A. $20\ \text{cm}$

Faux.

Faux. $20\ \text{cm}$ est le diamètre, le double du rayon.

B. $25\ \text{cm}$

Faux.

Faux. $25\ \text{cm}$ est la hauteur du pot, pas une mesure de sa base.

C. $10\ \text{cm}$

Juste.

Juste. Le rayon est la moitié du diamètre.

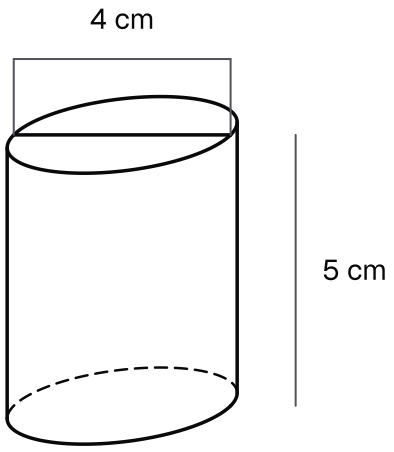
Correction

Le rayon est la moitié du diamètre : $20 : 2 = 10$, soit $10\ \text{cm}$.

Dessiner un cylindre

En perspective, un disque se dessine comme un ovale aplati. Pour un cylindre debout, trace un ovale de $4\ \text{cm}$ de large et de $1{,}5\ \text{cm}$ de haut. Trace le même ovale $5\ \text{cm}$ plus bas.

Relie les deux bouts de gauche, puis les deux bouts de droite, par deux traits verticaux. La partie du haut de l'ovale du bas est cachée : repasse-la en pointillés.



Le cylindre debout de 4 cm de diamètre et de 5 cm de haut : deux ovales reliés par deux traits verticaux, le haut de l'ovale du bas en pointillés.

Trouve l'erreur : Le dessin de Nour

Nour dessine une boîte de conserve debout. Elle trace les deux ovales en entier, en trait plein. Qu'en penses-tu ?

A. C'est juste : un disque se dessine toujours en entier.

Faux.

Faux. Une partie du disque du bas est cachée par la boîte.

B. La moitié arrière de l'ovale du bas va en pointillés.

Juste.

Juste. Comme pour le prisme, ce qui est caché va en pointillés.

C. Il faut dessiner deux cercles parfaits, pas des ovales.

Faux.

Faux. En perspective, un disque vu de biais paraît aplati.

Correction

La moitié arrière de l'ovale du bas est cachée par la boîte. Nour doit la repasser en pointillés. L'ovale du haut reste en trait plein : on le voit en entier.

Dérouler l'étiquette

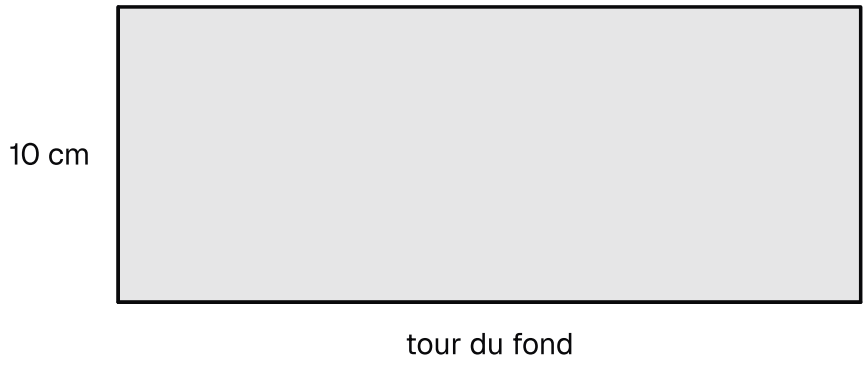
Reprends la boîte de rayon $4\ \text{cm}$ et de hauteur $10\ \text{cm}$. Coupe l'étiquette tout droit, puis déroule-la : c'est un rectangle.

Un de ses côtés est la hauteur de la boîte. L'autre fait le tour du fond.

Tu as vu dans « Périmètres et aires » que la longueur d'un cercle de rayon r est $2 \times \pi \times r$. Ici, le rayon vaut $4\ \text{cm}$:

$$2 \times \pi \times 4 = 8 \times \pi\ \text{cm}$$

Cette écriture est la valeur **exacte** : elle garde π. Une valeur **approchée** est un nombre décimal proche, obtenu avec $\pi \approx 3{,}14$ ou à la calculatrice.



L'étiquette déroulée de la boîte de rayon 4 cm : un rectangle haut de 10 cm, dont l'autre côté est le tour du fond.

Propriété : Patron d'un cylindre de révolution

Le patron d'un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h est formé :

- des **deux disques** de rayon r, les bases ;
- d'un **rectangle**, la surface latérale déroulée. Un de ses côtés mesure la hauteur h ; l'autre est égal au **périmètre d'une base**, c'est-à-dire $2 \times \pi \times r$.

Remarque : Admis

Tu l'as observé en déroulant une étiquette, sans le démontrer. Ce résultat est admis.

Construire le patron

Exemple : Exemple guidé : le patron d'un pot

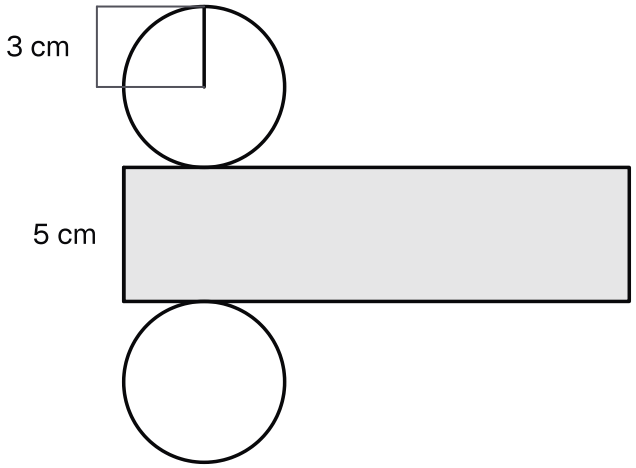
Le pot a un rayon de $3\ \text{cm}$ et une hauteur de $5\ \text{cm}$.

Un côté du rectangle fait le tour d'une base :

$$2 \times \pi \times 3 = 6 \times \pi\ \text{cm}$$

Avec $\pi \approx 3{,}14$, on calcule $6 \times 3{,}14 = 18{,}84$. Ce côté mesure donc environ $18{,}8\ \text{cm}$ au dixième.

Le patron est un rectangle de $5\ \text{cm}$ sur environ $18{,}8\ \text{cm}$, avec deux disques de rayon $3\ \text{cm}$.



Le patron du pot de rayon 3 cm et de hauteur 5 cm : un rectangle haut de 5 cm et long d'environ 18,8 cm, et deux disques de rayon 3 cm qui touchent ses grands côtés.

Méthode : Construire le patron d'un cylindre de révolution

1. **Calcule** le périmètre d'une base, $2 \times \pi \times r$; prends une valeur approchée avec $\pi \approx 3{,}14$.
2. **Trace** un rectangle dont un côté mesure h et l'autre ce périmètre.
3. **Trace** au compas deux disques de rayon r : l'un touche le côté du haut, l'autre le côté du bas, ces deux côtés mesurant $2 \times \pi \times r$.

À toi : Le patron d'un rouleau

Tu veux construire le patron d'un cylindre de rayon $2\ \text{cm}$ et de hauteur $6\ \text{cm}$. Donne les dimensions du rectangle, au dixième, avec $\pi \approx 3{,}14$. Que traces-tu ensuite ?

Indice 1
Un côté du rectangle mesure la hauteur du cylindre.
Indice 2
L'autre côté est la longueur du cercle de base : $2 \times \pi \times r$.
Indice 3
Point délicat : les disques ont un rayon de $2\ \text{cm}$. Ouvre ton compas de $2\ \text{cm}$, pas de $4\ \text{cm}$.

Réponse
La longueur du rectangle est égale au tour d'une base :

$$2 \times \pi \times 2 = 4 \times \pi\ \text{cm}$$

Avec $\pi \approx 3{,}14$: $4 \times 3{,}14 = 12{,}56$, soit environ $12{,}6\ \text{cm}$ au dixième. Le rectangle mesure donc $6\ \text{cm}$ sur environ $12{,}6\ \text{cm}$.

> Ensuite, trace deux disques de rayon $2\ \text{cm}$. L'un touche le côté du haut, l'autre le côté du bas : ce sont les deux côtés d'environ $12{,}6\ \text{cm}$.

Aire et volume d'un cylindre de révolution

L'aire de l'étiquette

Une usine imprime les étiquettes des boîtes de conserve. Elle doit connaître l'aire d'une étiquette pour commander le papier. Cette aire est celle de la surface latérale du cylindre.

> **Devine : Le bon calcul**
>
> Une boîte de conserve a un rayon de $5\ \text{cm}$ et une hauteur de $10\ \text{cm}$. Son étiquette se déroule en un rectangle. Quel calcul donne l'aire de l'étiquette ?
>
> **A.** $2 \times \pi \times 5 \times 10$
>
> **Juste.**
> Oui. C'est le tour du fond, $2 \times \pi \times 5$, multiplié par la hauteur, 10.
>
> **B.** $\pi \times 5 \times 5 \times 10$
>
> **Faux.**
> Non. Ce calcul utilise l'aire du disque de base. Il ne donne pas l'aire de l'étiquette.
>
> **C.** $2 \times 5 \times 10$
>
> **Faux.**
> Non. Il manque π : le tour du fond mesure $2 \times \pi \times 5$.
>
> **Correction**
> L'étiquette est un rectangle. Un côté est le tour du fond, $2 \times \pi \times 5$, l'autre est la hauteur, 10.
>
> Son aire est donc $2 \times \pi \times 5 \times 10$.

L'aire du rectangle déroulé est le produit de ses deux côtés, soit $2 \times \pi \times r \times h$. C'est l'**aire latérale** du cylindre.

Pour l'aire totale, ajoute les deux disques. Tu as vu dans « Périmètres et aires » que l'aire d'un disque de rayon r est $\pi \times r \times r$.

Les formules d'aire

> **Propriété : Aire latérale et aire totale d'un cylindre de révolution**
>
> Soit un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h, exprimés dans la même unité.
>
> - Son **aire latérale** est l'aire du rectangle de son patron :
>
> $$\text{aire latérale} = 2 \times \pi \times r \times h.$$

- Son **aire totale** est la somme de son aire latérale et des aires de ses deux bases :

$$\text{aire totale} = 2 \times \pi \times r \times h + 2 \times \pi \times r \times r.$$

Remarque : Admis

Tu l'as vu sur le patron, sans le démontrer. Ce résultat est admis.

Exemple : un rouleau de carton fermé

Le rouleau a un rayon de $3\ \text{cm}$ et une hauteur de $10\ \text{cm}$.

Aire latérale. Elle vaut $2 \times \pi \times 3 \times 10 = 60 \times \pi\ \text{cm}^2$.

Les deux bases. L'aire d'un disque de base est $\pi \times 3 \times 3 = 9 \times \pi\ \text{cm}^2$. Les deux bases font $2 \times 9 \times \pi = 18 \times \pi\ \text{cm}^2$.

Aire totale. On additionne les deux résultats :

$$60 \times \pi + 18 \times \pi = 78 \times \pi$$

L'aire totale est $78 \times \pi\ \text{cm}^2$. À la calculatrice, elle vaut environ $245\ \text{cm}^2$, à l'unité.

Le volume

Empile des pièces de monnaie identiques : tu obtiens un cylindre. Chaque pièce ajoute une couche de même aire.

Plus la pile est haute, plus le volume grandit. Comme pour le prisme, le volume vaut l'aire de la base multipliée par la hauteur.

Propriété : Volume d'un cylindre de révolution

Soit un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h, exprimés dans la même unité. Son **volume** V est l'aire d'une base multipliée par la hauteur :

$$V = \pi \times r \times r \times h.$$

Remarque : Admis

Tu peux le faire voir avec une pile de pièces, mais il n'est pas démontré. Ce résultat est admis.

Exemple : un pot de peinture

Le pot a un rayon de $5\ \text{cm}$ et une hauteur de $12\ \text{cm}$.

$$V = \pi \times 5 \times 5 \times 12$$
$$= 300 \times \pi\ \text{cm}^3$$

C'est la valeur exacte. À la calculatrice, au dixième : $V \approx 942{,}5\ \text{cm}^3$.

Or $1\ \text{L} = 1\,000\ \text{cm}^3$: le pot contient donc un peu moins d'un litre.

La méthode

Méthode : Calculer l'aire latérale et le volume d'un cylindre de révolution

1. **Lis** le rayon r. Si l'énoncé donne le diamètre, divise-le par 2.
2. **Écris** la formule, puis remplace r et h par leurs valeurs, dans la même unité.
3. **Donne** la valeur exacte avec π, puis une valeur approchée. Dis la précision et l'outil : calculatrice ou $\pi \approx 3{,}14$.

Attention : Rayon ou diamètre

Une boîte a un fond de diamètre $10\ \text{cm}$ et une hauteur de $4\ \text{cm}$.

✗ Ali calcule le volume en prenant $10\ \text{cm}$ comme rayon.

✓ Les formules utilisent le rayon. On calcule d'abord $r = 10 : 2 = 5\ \text{cm}$, puis $V = \pi \times 5 \times 5 \times 4 = 100 \times \pi\ \text{cm}^3$.

À toi : Le volume d'une boîte

Une boîte de conserve a un diamètre de $6\ \text{cm}$ et une hauteur de $10\ \text{cm}$. Calcule son volume. Donne le résultat exact avec π, puis arrondi au dixième grâce à la calculatrice.

Indice 1
Utilise $V = \pi \times r \times r \times h$.
Indice 2
Pour la valeur exacte, garde π dans le résultat.
Indice 3
Point délicat : $6\ \text{cm}$ est le diamètre, pas le rayon. Divise d'abord par 2.

Réponse
Le rayon est la moitié du diamètre : $r = 6 : 2 = 3\ \text{cm}$.

$$V = \pi \times 3 \times 3 \times 10$$
$$= 90 \times \pi\ \text{cm}^3$$

Conclusion. Le volume exact est $90 \times \pi$ cm^3. À la calculatrice, au dixième : $V \approx 282{,}7$ cm^3.

Valeur exacte et devoir

Attention : Valeur exacte et valeur approchée

Une boîte de pastilles a un rayon de 5 cm et une hauteur de 2 cm. Son volume exact est $50 \times \pi$ cm^3.

✗ Avec $3{,}14$ à la place de π, Inès écrit que le volume est égal à 157 cm^3.

✓ $3{,}14$ n'est qu'une valeur approchée de π. Comme $50 \times 3{,}14 = 157$, on écrit $V \approx 157$ cm^3. La valeur exacte reste $V = 50 \times \pi$ cm^3.

Vérifie : La bonne écriture

Le volume exact d'un verre cylindrique est $100 \times \pi$ cm^3. Quelle écriture est juste ?

A. $V = 314$ cm^3 avec $\pi \approx 3{,}14$

Faux.

Faux. Avec une valeur approchée de π, le résultat est approché : le signe $=$ ne convient pas.

B. $V \approx 314$ cm^3 avec $\pi \approx 3{,}14$

Juste.

Juste. Le signe $\approx$ dit que la valeur est approchée.

C. $V = 100$ cm^3, car on enlève π

Faux.

Faux. On n'enlève jamais π : il fait partie du calcul.

Correction

Comme $100 \times 3{,}14 = 314$, on écrit $V \approx 314$ cm^3 avec $\pi \approx 3{,}14$. La valeur exacte reste $V = 100 \times \pi$ cm^3.

À retenir : Coin devoir : la capacité d'une citerne

Une citerne cylindrique a un rayon de 1 m *et une hauteur de* 2 m*. Combien de litres peut-elle contenir ?*

En devoir, on écrit :

« Je convertis en décimètres, car 1 $\text{m} = 10$ dm : $r = 10$ dm et $h = 20$ dm.

J'écris la formule du volume, puis je remplace :

$$\begin{aligned} V &= \pi \times r \times r \times h \\ &= \pi \times 10 \times 10 \times 20 \\ &= 2\,000 \times \pi \ \text{dm}^3 \end{aligned}$$

> À la calculatrice, à l'unité : $V \approx 6\,283\ \text{dm}^3$.
>
> Comme $1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L}$, la citerne peut contenir environ $6\,283\ \text{L}$. »

Synthèse : retour aux deux boîtes

Reviens aux deux boîtes du marché.

Boîte de chocolats. L'aire d'une base est $B = 6 \times 8 : 2 = 24\ \text{cm}^2$. Son volume est :

$$V = 24 \times 20 = 480\ \text{cm}^3$$

Boîte de conserve. Son volume exact est :

$$\begin{aligned} V &= \pi \times 4 \times 4 \times 10 \\ &= 160 \times \pi\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

À la calculatrice, au dixième : $V \approx 502{,}7\ \text{cm}^3$.

Conclusion. Comme $502{,}7 > 480$, la boîte de conserve contient un peu plus, alors qu'elle est deux fois moins longue.

Voici les formules du chapitre. Elles sont toutes admises.

Prisme droit de hauteur h, dont la base a pour périmètre P et pour aire B :

- aire latérale : $P \times h$;
- aire totale : $P \times h + 2 \times B$;
- volume : $V = B \times h$.

Cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h :

- aire latérale : $2 \times \pi \times r \times h$;
- aire totale : $2 \times \pi \times r \times h + 2 \times \pi \times r \times r$;
- volume : $V = \pi \times r \times r \times h$.

Dans les deux cas, le volume est l'aire d'une base multipliée par la hauteur.

Tu sais maintenant reconnaître, dessiner et fabriquer un prisme droit et un cylindre. Tu sais aussi calculer leur aire et leur volume. La prochaine fois que tu choisis une boîte, tu pourras calculer laquelle contient le plus.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Prisme droit et cylindre de révolution » (1ac · general · mathematiques)