BURHAN

Résumé : Périmètres et aires

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/perimetres-et-aires/resume

Chapitre	Semestre
Périmètres et aires	Semestre 1

Le périmètre d'une figure

> **À retenir : Le périmètre, c'est le tour**
>
> Le périmètre mesure le tour d'une figure. C'est une longueur. Il s'écrit en cm, en m ou en km.

Définition : Périmètre d'une figure

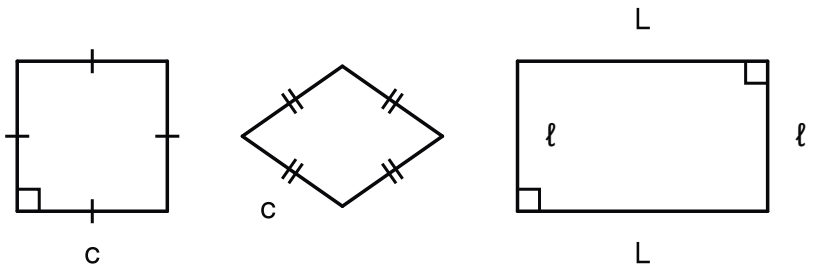
Le **périmètre** d'une figure plane est la longueur de son contour, c'est-à-dire de la ligne qui la borde.

Pour un polygone, le périmètre est la somme des longueurs de tous ses côtés, exprimées dans la même unité. Il s'exprime dans une unité de longueur : mm, cm, m, km…

Propriété : Périmètre du carré, du losange et du rectangle

- Un carré et un losange de côté c ont pour périmètre $P = 4 \times c$.
- Un rectangle de longueur L et de largeur ℓ a pour périmètre $P = 2 \times (L + \ell)$.

Les longueurs sont exprimées dans la même unité ; le périmètre est exprimé dans cette unité.



Carré et losange : quatre côtés égaux de longueur c ; rectangle : deux longueurs L et deux largeurs ℓ.

Méthode : calculer un périmètre

1. **Mets toutes les longueurs dans la même unité.** Convertis d'abord, si besoin.

2. **Choisis le calcul.** Carré, losange ou rectangle : prends sa formule. Autre polygone : additionne tous ses côtés.
3. **Écris le résultat** avec son unité de longueur.

Exemple

Énoncé. Un quadrilatère est un polygone à quatre côtés. Celui-ci a des côtés de $3{,}7\ \text{cm}$, $6{,}4\ \text{cm}$, $2{,}6\ \text{cm}$ et $5{,}1\ \text{cm}$.

Calcul. Le périmètre se trouve par la définition : c'est la somme des quatre longueurs.

$$\begin{aligned} P &= 3{,}7 + 6{,}4 + 2{,}6 + 5{,}1 \\ &= 17{,}8\ \text{cm}. \end{aligned}$$

Exemple

Carré. Son côté mesure $15{,}5\ \text{cm}$. D'après la formule du périmètre du carré :

$$P = 4 \times 15{,}5 = 62\ \text{cm}.$$

Rectangle. Il mesure $43\ \text{cm}$ sur $6{,}5\ \text{cm}$. D'après la formule du périmètre du rectangle :

$$\begin{aligned} P &= 2 \times (43 + 6{,}5) \\ &= 2 \times 49{,}5 = 99\ \text{cm}. \end{aligned}$$

Attention : Une seule unité avant de calculer

Un rectangle mesure $2{,}7\ \text{m}$ sur $65\ \text{cm}$. Le calcul $2 \times (2{,}7 + 65) = 135{,}4$ est faux : il mélange deux unités.

Convertis d'abord : $2{,}7\ \text{m} = 270\ \text{cm}$. Alors :

$$\begin{aligned} P &= 2 \times (270 + 65) \\ &= 670\ \text{cm}. \end{aligned}$$

Le périmètre vaut $670\ \text{cm}$, soit $6{,}7\ \text{m}$.

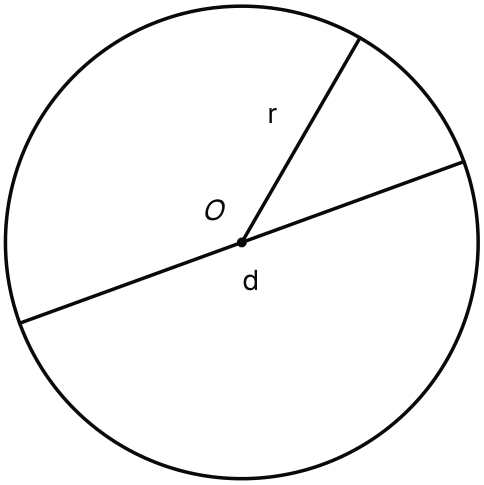
La longueur d'un cercle

Propriété : Longueur d'un cercle

Pour tous les cercles, la longueur du cercle divisée par son diamètre donne toujours le même nombre. Ce nombre se note π (on lit « pi »). Il n'est pas un nombre décimal ; une valeur approchée est $\pi \approx 3{,}14$.

Un cercle de rayon r a pour diamètre $d = 2 \times r$. Sa longueur est

$$L = \pi \times d = 2 \times \pi \times r.$$



Le rayon r et le diamètre d d'un cercle de centre O : d vaut deux fois r.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'utilises sans le prouver. Le diamètre est toujours le double du rayon.

Méthode : calculer la longueur d'un cercle

1. **Trouve le diamètre.** Si tu connais le rayon, double-le : $d = 2 \times r$.
2. **Écris la valeur exacte** avec la lettre π : $L = \pi \times d$.
3. **Donne une valeur approchée** avec le signe $\approx$. Dis ton outil : $\pi \approx 3{,}14$, ou la touche π de la calculatrice.

Exemple

Énoncé. Un cercle a pour rayon $44\ \text{cm}$.

Diamètre. $d = 2 \times 44 = 88\ \text{cm}$.

Valeur exacte. La formule de la longueur du cercle donne :

$$L = 88 \times \pi\ \text{cm}.$$

Valeurs approchées. Avec $\pi \approx 3{,}14$, on calcule $88 \times 3{,}14 = 276{,}32$: $L \approx 276{,}32\ \text{cm}$.

Avec la touche π de la calculatrice, $L \approx 276{,}46\ \text{cm}$ au centième près.

Attention : Valeur exacte ou valeur approchée ?

Un cercle a pour diamètre $41\ \text{cm}$. Sa longueur exacte est $L = 41 \times \pi\ \text{cm}$.

Écrire « $L = 128{,}74\ \text{cm}$ » est faux. Ce nombre n'est qu'une valeur approchée, obtenue avec $\pi \approx 3{,}14$.

On écrit donc $L \approx 128{,}74\ \text{cm}$.

L'aire et ses unités

Définition : Aire d'une surface ; unités d'aire

L'**aire** d'une surface mesure son étendue. Pour la mesurer, on choisit une unité d'aire : l'aire est le nombre de fois que la surface contient cette unité.

Le **centimètre carré**, noté cm^2, est l'aire d'un carré de côté $1\ \text{cm}$. De même, mm^2, dm^2, m^2 et km^2 sont les aires de carrés de côté $1\ \text{mm}$, $1\ \text{dm}$, $1\ \text{m}$ et $1\ \text{km}$.

Pour les terrains, on utilise aussi l'**are** et l'**hectare** : $1\ \text{a} = 100\ \text{m}^2$ et $1\ \text{ha} = 100\ \text{a} = 10\,000\ \text{m}^2$.

Propriété : Changer d'unité d'aire

Dans la liste mm^2, cm^2, dm^2, m^2, chaque unité d'aire, à partir du cm^2, vaut 100 fois l'unité qui la précède :

$$1\ \text{cm}^2 = 100\ \text{mm}^2$$
$$1\ \text{dm}^2 = 100\ \text{cm}^2$$
$$1\ \text{m}^2 = 100\ \text{dm}^2$$

Par conséquent, $1\ \text{m}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2$.

Méthode : convertir une aire

1. **Range les unités** de la plus petite à la plus grande : mm^2, cm^2, dm^2, m^2. Un **cran**, c'est le passage d'une unité de cette liste à sa voisine.
2. **Compte les crans** entre l'unité de départ et l'unité d'arrivée.
3. **Calcule.** Vers une unité plus petite, multiplie par 100 à chaque cran. Vers une unité plus grande, divise par 100 à chaque cran.
4. **Contrôle.** Une unité plus petite donne un nombre plus grand.

Pour l'are et l'hectare, passe par le m^2 : $1\ \text{a} = 100\ \text{m}^2$.

Exemple

Un cran, vers une unité plus petite. Le nombre est multiplié par 100 :

$$6{,}3\ \text{dm}^2 = 6{,}3 \times 100\ \text{cm}^2$$
$$= 630\ \text{cm}^2.$$

Deux crans vers une unité plus grande. On divise par 100, puis encore par 100 :

$$\begin{aligned} 4\,700\ \mathrm{cm}^2 &= 47\ \mathrm{dm}^2 \\ &= 0{,}47\ \mathrm{m}^2. \end{aligned}$$

Avec l'hectare. On passe par l'are, puis par le m^2 :

$$0{,}9\ \mathrm{ha} = 90\ \mathrm{a} = 9\,000\ \mathrm{m}^2.$$

Attention : Un cran d'aire vaut 100

Entre deux unités d'aire voisines, le facteur est 100. Ainsi $5{,}2\ \mathrm{cm}^2 = 520\ \mathrm{mm}^2$.

Écrire $5{,}2\ \mathrm{cm}^2 = 52\ \mathrm{mm}^2$ est faux. Le facteur 10 sert pour les longueurs, pas pour les aires.

Aires du carré, du rectangle et du triangle

Propriété : Aire du carré et du rectangle

- Un carré de côté c a pour aire $\mathcal{A} = c \times c$.
- Un rectangle de longueur L et de largeur ℓ a pour aire $\mathcal{A} = L \times \ell$.

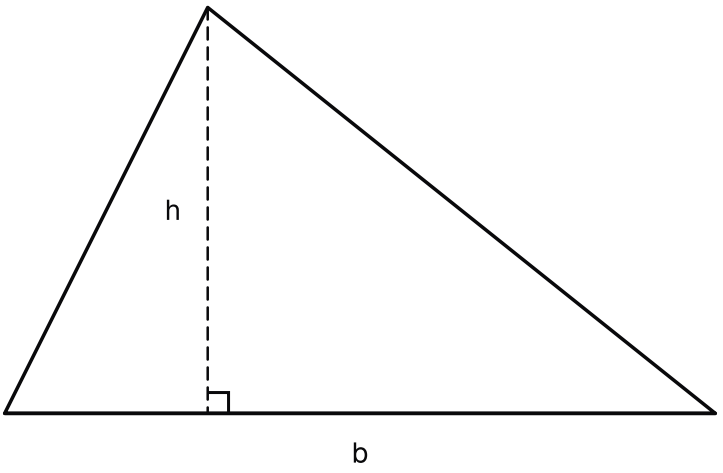
Les longueurs sont exprimées dans la même unité ; l'aire est exprimée dans l'unité d'aire correspondante : en cm^2 si les longueurs sont en cm.

Propriété : Aire du triangle

Dans un triangle, on choisit un côté, appelé **base** ; on note b sa longueur. La **hauteur** relative à cette base est la distance du sommet opposé à la droite qui porte la base ; on note h sa longueur. L'aire du triangle est

$$\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}.$$

Dans un triangle rectangle, si l'on prend pour base un côté de l'angle droit, la hauteur est l'autre côté de l'angle droit.



Une base de longueur b et la hauteur h relative à cette base, perpendiculaire à la droite qui porte la base.

Remarque : Des formules admises

Ces formules sont admises. Tu les utilises sans les prouver.

La hauteur fait un angle droit avec la base. Elle peut se trouver à l'extérieur du triangle : elle arrive alors sur le prolongement de la base.

Méthode : calculer une aire avec une formule

1. **Nomme la figure** et écris la formule de son aire.
2. **Choisis une base**, puis trouve la hauteur qui lui correspond : c'est la distance du sommet opposé à la droite qui porte cette base.
3. **Mets les longueurs dans la même unité.**
4. **Calcule.** Écris l'unité d'aire : des cm^2 si les longueurs sont en cm.

Exemple

Carré. Son côté mesure $7{,}8\ \text{cm}$. D'après la formule de l'aire du carré :

$$\mathcal{A} = 7{,}8 \times 7{,}8 = 60{,}84\ \text{cm}^2.$$

Rectangle. Il mesure $11{,}5\ \text{cm}$ sur $6{,}6\ \text{cm}$. D'après la formule de l'aire du rectangle :

$$\mathcal{A} = 11{,}5 \times 6{,}6 = 75{,}9\ \text{cm}^2.$$

Exemple

Un triangle. Sa base mesure $53\ \text{cm}$ et la hauteur relative à cette base $5{,}4\ \text{cm}$. D'après la formule de l'aire du triangle :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{53 \times 5{,}4}{2} \\ &= \frac{286{,}2}{2} = 143{,}1\ \text{cm}^2.\end{aligned}$$

Un triangle rectangle. Les côtés de l'angle droit mesurent $6{,}2\ \text{cm}$ et $9{,}4\ \text{cm}$. L'un sert de base, l'autre de hauteur :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{6{,}2 \times 9{,}4}{2} \\ &= \frac{58{,}28}{2} = 29{,}14\ \text{cm}^2.\end{aligned}$$

Attention : Périmètre et aire : deux mesures différentes

Un rectangle de $20{,}5\ \text{cm}$ sur $0{,}5\ \text{cm}$ a pour périmètre $2 \times (20{,}5 + 0{,}5) = 42\ \text{cm}$. Un carré de côté $10{,}5\ \text{cm}$ a aussi pour périmètre $4 \times 10{,}5 = 42\ \text{cm}$.

Pourtant, leurs aires diffèrent :

- rectangle : $20{,}5 \times 0{,}5 = 10{,}25\ \text{cm}^2$;
- carré : $10{,}5 \times 10{,}5 = 110{,}25\ \text{cm}^2$.

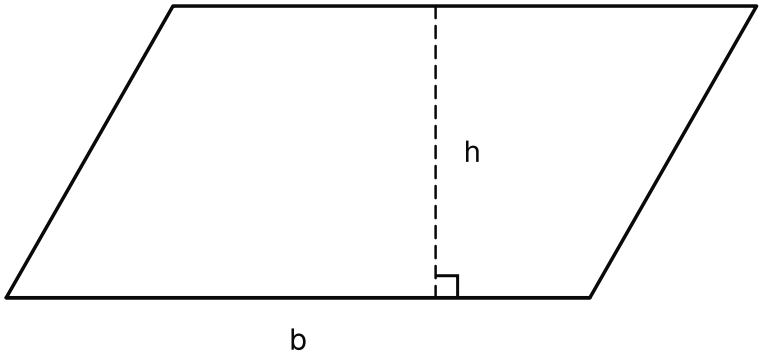
Un périmètre est une longueur ; une aire est une étendue.

Aires du parallélogramme, du losange et du trapèze

Propriété : Aire du parallélogramme

Dans un parallélogramme, on choisit un côté comme **base** ; on note b sa longueur. La **hauteur** relative à cette base est la distance d'un point du côté opposé à la droite qui porte la base ; on note h sa longueur. L'aire du parallélogramme est

$$\mathcal{A} = b \times h.$$

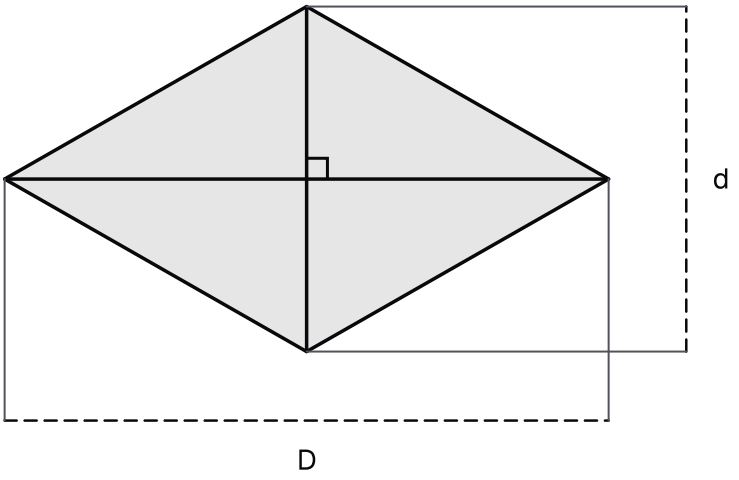


Un parallélogramme : la base b est un côté, la hauteur h est la distance du côté opposé à la droite qui porte b.

Propriété : Aire du losange

Un losange dont les diagonales mesurent D et d a pour aire

$$\mathcal{A} = \frac{D \times d}{2}.$$

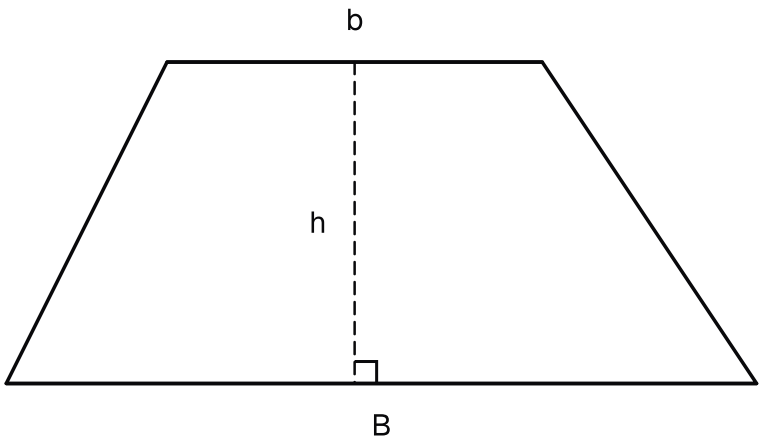


Un losange et ses deux diagonales, de longueurs D et d, qui se coupent à angle droit en leur milieu.

Propriété : Aire du trapèze

Un trapèze a deux côtés parallèles, appelés ses **bases** ; on note B et b leurs longueurs. Sa **hauteur** est la distance d'un point d'une base à la droite qui porte l'autre base ; on note h sa longueur. L'aire du trapèze est

$$\mathcal{A} = \frac{(B + b) \times h}{2}.$$



Un trapèze : la grande base B, la petite base b qui lui est parallèle, et la hauteur h mesurée à angle droit.

Remarque : Des formules admises

Ces formules sont admises. Tu les utilises sans les prouver. Dans chaque cas, la hauteur est une distance, mesurée à angle droit.

Exemple

Parallélogramme de base $13{,}2\ \text{cm}$ et de hauteur $6{,}5\ \text{cm}$:

$$\mathcal{A} = 13{,}2 \times 6{,}5 = 85{,}8\ \text{cm}^2.$$

Losange de diagonales $57\ \text{cm}$ et $34\ \text{cm}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{57 \times 34}{2} \\ &= \frac{1\,938}{2} = 969\ \text{cm}^2.\end{aligned}$$

Trapèze de bases $12{,}7\ \text{cm}$ et $7{,}3\ \text{cm}$, de hauteur $9{,}5\ \text{cm}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{(12{,}7 + 7{,}3) \times 9{,}5}{2} \\ &= \frac{190}{2} = 95\ \text{cm}^2.\end{aligned}$$

Attention : La hauteur, pas le côté penché

Un parallélogramme a des côtés de $18{,}5\ \text{cm}$ et $9{,}2\ \text{cm}$. Sa hauteur relative au côté de $18{,}5\ \text{cm}$ mesure $7{,}6\ \text{cm}$.

Son aire est $18{,}5 \times 7{,}6 = 140{,}6\ \text{cm}^2$.

Le calcul $18{,}5 \times 9{,}2 = 170{,}2$ est faux. Le côté de $9{,}2\ \text{cm}$ est penché : ce n'est pas la hauteur.

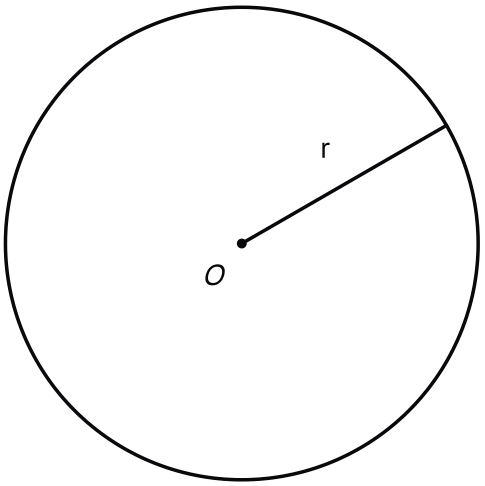
Aire du disque et figures composées

Propriété : Aire du disque

Le **disque** de centre O et de rayon r est la surface formée par le cercle de centre O et de rayon r et par son intérieur. Son aire est

$$\mathcal{A} = \pi \times r \times r.$$

Avec $\pi \approx 3{,}14$, on obtient une valeur approchée de cette aire.



Le disque de centre O et de rayon r : le cercle qui le borde et toute la surface intérieure.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'utilises sans le prouver.

Exemple

Énoncé. Un disque a pour rayon $19\ \text{cm}$.

Valeur exacte. La formule de l'aire du disque donne :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \pi \times 19 \times 19 \\ &= 361 \times \pi \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

Valeurs approchées. Avec $\pi \approx 3{,}14$, on calcule $361 \times 3{,}14 = 1\,133{,}54$: $\mathcal{A} \approx 1\,133{,}54 \text{ cm}^2$.

Avec la touche π de la calculatrice, $\mathcal{A} \approx 1\,134{,}11 \text{ cm}^2$ au centième près.

Attention : Rayon ou diamètre ?

Un disque a pour diamètre 58 cm. Son rayon est $58 \div 2 = 29 \text{ cm}$.

Son aire est $\pi \times 29 \times 29 = 841 \times \pi \text{ cm}^2$.

Écrire $\pi \times 58 \times 58$ est faux. L'aire du disque se calcule avec le rayon.

Méthode : aire d'une figure composée

1. **Observe la figure.** Est-elle faite de morceaux collés, ou d'une grande figure percée ?
2. **Morceaux collés** : calcule l'aire de chaque morceau, puis additionne.
3. **Figure percée** : calcule l'aire de la grande figure, puis soustrais l'aire du trou.
4. **Vérifie** que les morceaux ne se chevauchent pas.

Exemple

Par découpage. Un rectangle mesure $12{,}8 \text{ cm}$ sur $5{,}8 \text{ cm}$. Sur un de ses côtés de $12{,}8 \text{ cm}$, à l'extérieur, on colle un triangle dont la base est ce côté tout entier. La hauteur relative à cette base mesure $4{,}3 \text{ cm}$.

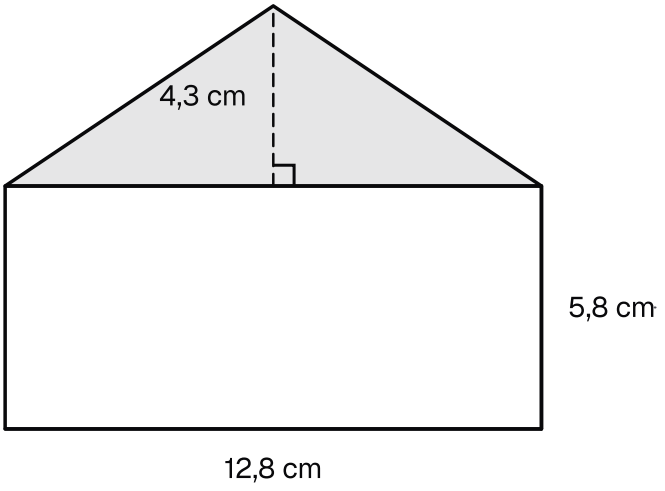
On additionne l'aire du rectangle et celle du triangle :

$$\begin{aligned}&12{,}8 \times 5{,}8 + \frac{12{,}8 \times 4{,}3}{2} \\ &= 74{,}24 + 27{,}52 \\ &= 101{,}76 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

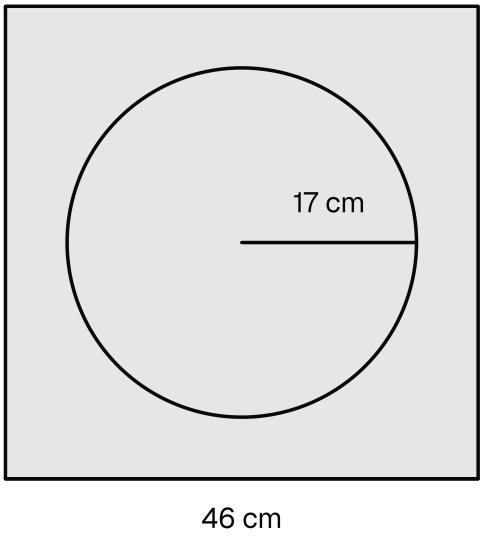
Par différence. Un carré de côté 46 cm est percé d'un disque de rayon 17 cm.

Le carré couvre $46 \times 46 = 2\,116 \text{ cm}^2$; le disque couvre $\pi \times 17 \times 17 = 289 \times \pi \text{ cm}^2$. On retire le disque du carré : l'aire exacte est $\mathcal{A} = (2\,116 - 289 \times \pi) \text{ cm}^2$.

Avec $\pi \approx 3{,}14$: $289 \times 3{,}14 = 907{,}46$ et $2\,116 - 907{,}46 = 1\,208{,}54$. Donc $\mathcal{A} \approx 1\,208{,}54 \text{ cm}^2$.



Par découpage : un rectangle de 12,8 cm sur 5,8 cm et un triangle collé sur son grand côté, de hauteur 4,3 cm.



Par différence : un carré de 46 cm de côté percé, en son centre, d'un disque de rayon 17 cm.

Le formulaire du chapitre

Périmètre du carré ou du losange de côté c

$$P = 4 \times c$$

Périmètre du rectangle de longueur L et de largeur ℓ

$$P = 2 \times (L + \ell)$$

Longueur du cercle de diamètre d et de rayon r

$$L = \pi \times d = 2 \times \pi \times r$$

Aire du carré de côté c

$$\mathcal{A} = c \times c$$

Aire du rectangle de longueur L et de largeur ℓ

$$\mathcal{A} = L \times \ell$$

Aire du triangle de base b et de hauteur h

$$\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$$

Aire du parallélogramme de base b et de hauteur h

$$\mathcal{A} = b \times h$$

Aire du losange de diagonales D et d

$$\mathcal{A} = \frac{D \times d}{2}$$

Aire du trapèze de bases B et b et de hauteur h

$$\mathcal{A} = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

Aire du disque de rayon r

$$\mathcal{A} = \pi \times r \times r$$

Méthode : Quelle formule pour quelle figure ?

- **Un polygone quelconque** : additionne ses côtés.
- **Un carré ou un losange** : périmètre égal à quatre fois le côté.
- **Un rectangle** : périmètre $2 \times (L + \ell)$, aire $L \times \ell$.
- **Un triangle** : base fois hauteur, divisé par 2.
- **Un parallélogramme** : base fois hauteur.
- **Un losange** : produit des diagonales, divisé par 2.
- **Un trapèze** : somme des bases, fois la hauteur, divisé par 2.
- **Un cercle ou un disque** : la longueur utilise le diamètre ou le rayon ; l'aire utilise le rayon.
- **Une figure composée** : découpe-la, ou retire le morceau qui manque.

À retenir : Avant de rendre ton calcul

Écris toujours l'unité : des cm pour un périmètre, des cm^2 pour une aire.

Prends la hauteur, jamais un côté penché.

Donne la valeur exacte avec π, puis une valeur approchée avec $\approx$.