BURHAN

Périmètres et aires

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/perimetres-et-aires/cours

Chapitre	Semestre
Périmètres et aires	Semestre 1

Du grillage et du gazon

Imagine que ta famille a un jardin rectangulaire de $12\ \text{m}$ de long et $8\ \text{m}$ de large.

Pour l'entourer, il faut acheter du **grillage**. Pour le couvrir d'herbe, il faut acheter du **gazon** en rouleaux.

Ta voisine a un autre jardin rectangulaire, de $16\ \text{m}$ sur $4\ \text{m}$. Pour l'entourer, il lui faut exactement autant de grillage que vous.

Devine : Une prédiction

Les deux jardins demandent la même longueur de grillage. Faut-il aussi la même quantité de gazon ?

A. Oui : même grillage, donc même gazon.

Faux.

Faux. Le grillage mesure le tour du jardin ; le gazon couvre sa surface. Ce sont deux grandeurs différentes.

B. Non : ton jardin demande plus de gazon.

Juste.

Juste : ton jardin contient 96 carrés de $1\ \text{m}$ de côté, celui de ta voisine 64.

C. Non : le jardin voisin demande plus de gazon.

Faux.

Faux. Le jardin voisin est plus long, mais il est beaucoup plus étroit : il contient moins de carrés de gazon.

D. On ne peut pas savoir sans y aller.

Faux.

Faux. Les longueurs suffisent : on compte les carrés de $1\ \text{m}$ de côté qui couvrent chaque jardin.

Correction

Le grillage fait le tour du jardin.

Pour ton jardin : $12 + 8 + 12 + 8 = 40\ \text{m}$. Pour le jardin voisin : $16 + 4 + 16 + 4 = 40\ \text{m}$.

Le gazon couvre la surface. Partage chaque jardin en carrés de $1\ \text{m}$ de côté.

Ton jardin contient 8 rangées de 12 carrés, soit 96 carrés. Le jardin voisin contient 4 rangées de 16 carrés, soit 64 carrés.

> Avec le même grillage, il faut donc plus de gazon pour ton jardin.

Le grillage dépend du tour du jardin : c'est son périmètre. Le gazon dépend de sa surface : c'est son aire.

Dans ce chapitre, tu apprends à calculer l'un et l'autre, sans jamais les confondre.

Le périmètre d'une figure

Faire le tour d'une figure

Rappel du primaire : tu connais le carré, le rectangle, le losange, le parallélogramme, le trapèze et le triangle. Les unités de longueur sont mm, cm, dm, m et km, avec $1\ \text{cm} = 10\ \text{mm}$ et $1\ \text{m} = 100\ \text{cm}$. Un angle droit se vérifie avec l'équerre.

Devine : Le tour d'un pentagone

Imagine un pentagone, c'est-à-dire un polygone à cinq côtés. Ses côtés mesurent $3\ \text{cm}$, $4\ \text{cm}$, $2{,}5\ \text{cm}$, $5\ \text{cm}$ et $3{,}5\ \text{cm}$. Fais-en un croquis à main levée si tu veux.

Une fourmi part d'un sommet et fait le tour en suivant les côtés. Quelle distance parcourt-elle ?

A. $18\ \text{cm}$

Juste.

Juste : elle parcourt chaque côté une fois, et $3 + 4 + 2{,}5 + 5 + 3{,}5 = 18$.

B. $14{,}5\ \text{cm}$

Faux.

Faux. Ce total oublie le côté de $3{,}5\ \text{cm}$: la fourmi revient à son point de départ.

C. $5\ \text{cm}$

Faux.

Faux. C'est le plus long côté seulement. La fourmi parcourt les cinq côtés.

D. $36\ \text{cm}$

Faux.

Faux. Ce total compte chaque côté deux fois. La fourmi ne fait qu'un seul tour.

Correction

La fourmi parcourt chaque côté une fois, puis elle revient à son point de départ.

On additionne donc les cinq longueurs, toutes en cm :

$$3 + 4 + 2{,}5 + 5 + 3{,}5 = 18.$$

La fourmi parcourt $18\ \text{cm}$.

Définition : Périmètre d'une figure

Le **périmètre** d'une figure plane est la longueur de son contour, c'est-à-dire de la ligne qui la borde.

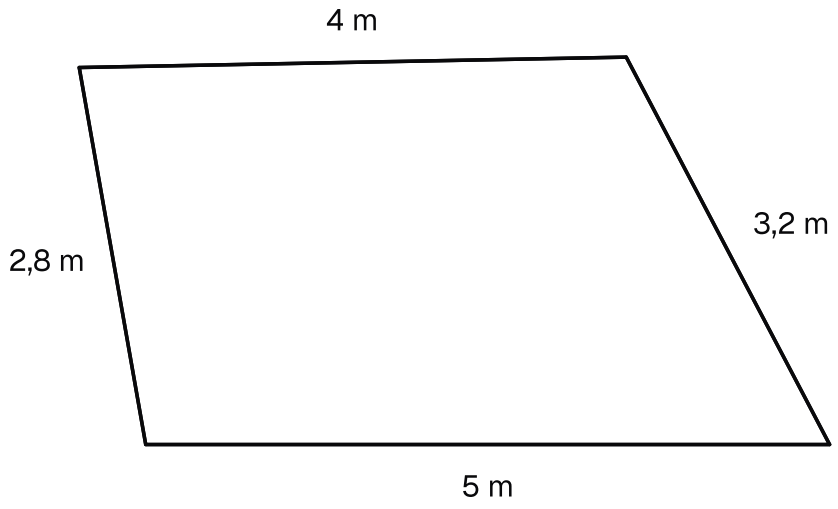
Pour un polygone, le périmètre est la somme des longueurs de tous ses côtés, exprimées dans la même unité. Il s'exprime dans une unité de longueur : mm, cm, m, km…

Exemple : un polygone quelconque

Le potager du jardin a la forme d'un quadrilatère, c'est-à-dire d'un polygone à quatre côtés. Ses côtés mesurent $5\ \mathrm{m}$, $3{,}2\ \mathrm{m}$, $4\ \mathrm{m}$ et $2{,}8\ \mathrm{m}$.

D'après la définition du périmètre, on additionne les quatre côtés :

$$\begin{aligned} P &= 5 + 3{,}2 + 4 + 2{,}8 \\ &= 15\ \mathrm{m}. \end{aligned}$$

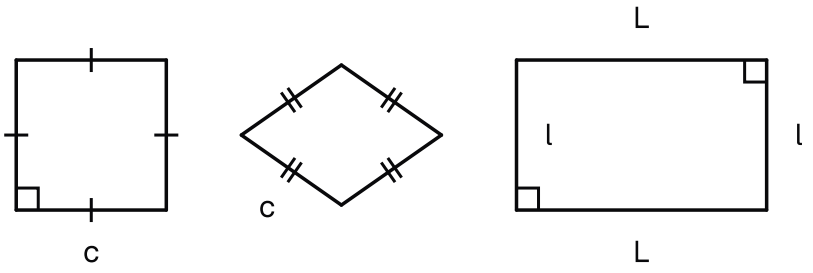


Le potager du jardin, un quadrilatère dont on additionne les quatre côtés : 5 m, 3,2 m, 4 m et 2,8 m.

Carré, losange et rectangle

Pourquoi est-ce vrai ? Un carré et un losange ont quatre côtés de même longueur. Un rectangle a ses côtés opposés de même longueur.

La preuve qui suit regroupe donc les termes de la somme. Elle n'utilise que la définition du périmètre.



Les trois figures de la preuve : un carré et un losange dont les quatre côtés mesurent c, un rectangle de longueur L et de largeur l.

Propriété : Périmètre du carré, du losange et du rectangle

- Un carré et un losange de côté c ont pour périmètre $P = 4 \times c$.
- Un rectangle de longueur L et de largeur ℓ a pour périmètre $P = 2 \times (L + \ell)$.

Les longueurs sont exprimées dans la même unité ; le périmètre est exprimé dans cette unité.

Démonstration

Étape 1. Un carré et un losange ont leurs quatre côtés de même longueur c. D'après la définition du périmètre, on additionne les quatre côtés : $P = c + c + c + c = 4 \times c$.

Étape 2. Un rectangle a ses côtés opposés de même longueur : deux côtés mesurent L et deux côtés mesurent ℓ. D'après la définition du périmètre, $P = L + \ell + L + \ell$.

Étape 3. On regroupe les termes deux par deux : $P = (L + \ell) + (L + \ell) = 2 \times (L + \ell)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Un périmètre se calcule toujours avec la définition : on additionne les côtés.

La formule regroupe seulement les côtés égaux. Pour le carré et le losange :

$$c + c + c + c = 4 \times c.$$

Pour le rectangle :

$$L + \ell + L + \ell \\ = 2 \times (L + \ell).$$

Si tu oublies une formule, refais la somme des côtés.

Vérifie : Le périmètre d'un rectangle

Un rectangle a pour longueur L et pour largeur ℓ. Quelle écriture est égale à son périmètre ?

A. $2 \times L + \ell$

Faux.

Faux. Une largeur manque. Avec $L = 5$ et $\ell = 3$, on obtient 13, alors que le tour mesure $5 + 3 + 5 + 3 = 16$.

B. $L + \ell$

Faux.

Faux. C'est la moitié du tour : avec $L = 5$ et $\ell = 3$, on obtient 8 au lieu de 16.

C. $2 \times (L + \ell)$

Juste.

Juste : $L + \ell + L + \ell = (L + \ell) + (L + \ell) = 2 \times (L + \ell)$.

D. $L \times \ell$

Faux.

Faux. Ce produit n'additionne pas les côtés : avec $L = 5$ et $\ell = 3$, il vaut 15, pas 16.

Correction

D'après la définition du périmètre :

$$P = L + \ell + L + \ell.$$

On regroupe les termes deux par deux :

$$\begin{aligned} P &= (L + \ell) + (L + \ell) \\ &= 2 \times (L + \ell). \end{aligned}$$

Exemple : le jardin et son carré de fleurs

Le jardin de l'entrée mesure $12\ \text{m}$ sur $8\ \text{m}$. D'après la formule du périmètre du rectangle :

$$\begin{aligned} P &= 2 \times (12 + 8) \\ &= 2 \times 20 = 40\ \text{m}. \end{aligned}$$

Le carré de fleurs a un côté de $1{,}5\ \text{m}$. D'après la formule du périmètre du carré :

$$P = 4 \times 1{,}5 = 6\ \text{m}.$$

Méthode et piège des unités

Méthode : calculer un périmètre

1. **Mettre les longueurs dans la même unité.** Si une longueur est en m et une autre en cm, convertis d'abord.
2. **Reconnaître la figure.** Pour un carré, un losange ou un rectangle, utilise sa formule. Pour un autre polygone, additionne tous les côtés.

3. **Calculer, puis écrire l'unité.** Un périmètre est une longueur : il s'écrit en cm, en m…

Attention : la même unité avant de calculer

Un rectangle mesure $1{,}2\ \text{m}$ sur $45\ \text{cm}$.

✗ $P = 2 \times (1{,}2 + 45) = 92{,}4$: on a mélangé des mètres et des centimètres.

✓ On convertit d'abord : $1{,}2\ \text{m} = 120\ \text{cm}$. Alors :

$$\begin{aligned} P &= 2 \times (120 + 45) \\ &= 2 \times 165 = 330\ \text{cm}. \end{aligned}$$

Le périmètre vaut $330\ \text{cm}$, soit $3{,}3\ \text{m}$.

À toi : Un triangle et un carré

Un triangle a pour côtés $45\ \text{mm}$, $6\ \text{cm}$ et $7{,}5\ \text{cm}$. Calcule son périmètre en cm. Un carré a le même périmètre que ce triangle : quel est son côté ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par mettre les trois longueurs en cm, avec $1\ \text{cm} = 10\ \text{mm}$.
Indice 2
$45\ \text{mm} = 4{,}5\ \text{cm}$. Additionne ensuite les trois côtés.
Indice 3
Point délicat : pour le carré, on sait que $4 \times c$ vaut le périmètre. On cherche c : on divise donc le périmètre par 4.

Réponse
On convertit d'abord : $45\ \text{mm} = 4{,}5\ \text{cm}$.

D'après la définition du périmètre, on additionne les trois côtés :

$$\begin{aligned} P &= 4{,}5 + 6 + 7{,}5 \\ &= 18\ \text{cm}. \end{aligned}$$

D'après la formule du périmètre du carré, $4 \times c = 18$. On cherche c : on divise le périmètre par 4.

$$c = 18 \div 4 = 4{,}5\ \text{cm}.$$

Contrôle : $4 \times 4{,}5 = 18$.

Conclusion. Le triangle a pour périmètre $18\ \text{cm}$, et le carré a pour côté $4{,}5\ \text{cm}$.

Rédiger en devoir

Remarque : Coin devoir : rédiger un calcul de périmètre

En devoir, on nomme la formule avant de remplacer les lettres. Par exemple, pour un losange de côté $7{,}5\ \text{cm}$: « D'après la formule du périmètre du losange, $P = 4 \times c = 4 \times 7{,}5 = 30\ \text{cm}$. » Termine toujours par l'unité.

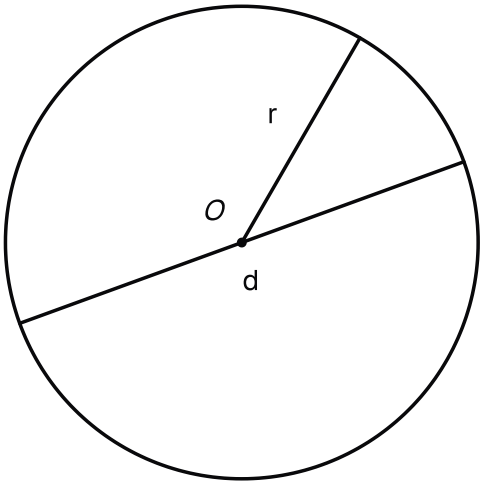
Tu sais maintenant calculer le tour de n'importe quel polygone. Pour le carré, le losange et le rectangle, la formule va plus vite.

Il reste une figure sans aucun côté : le cercle.

La longueur d'un cercle

Mesurer avec une ficelle

Rappel du primaire : un cercle est formé des points situés à la même distance de son centre. Cette distance est le **rayon**, noté r. Le **diamètre**, noté d, est la longueur d'un segment qui passe par le centre et joint deux points du cercle : il vaut deux rayons.



Un cercle de centre O : le rayon r va du centre au cercle, le diamètre d traverse le cercle en passant par O.

Devine : La ficelle et le diamètre

Sami entoure trois objets ronds avec une ficelle. Il mesure la ficelle, puis le diamètre de l'objet.

Objet	Longueur de la ficelle	Diamètre
assiette	$75{,}4\ \text{cm}$	$24\ \text{cm}$
couvercle	$47{,}1\ \text{cm}$	$15\ \text{cm}$

Objet	Longueur de la ficelle	Diamètre
roue de vélo	$213{,}6\ \text{cm}$	$68\ \text{cm}$

Divise, à la calculatrice, la longueur de la ficelle par le diamètre. Que remarques-tu ?

A. Le quotient est proche de 2 : deux diamètres.

Faux.

Faux. Deux diamètres d'assiette font $48\ \text{cm}$: la ficelle est bien plus longue.

B. Le quotient grandit avec la taille de l'objet.

Faux.

Faux. L'objet le plus grand donne presque le même quotient que les deux autres.

C. La ficelle dépasse toujours le diamètre de $50\ \text{cm}$.

Faux.

Faux. Les écarts sont $51{,}4\ \text{cm}$, $32{,}1\ \text{cm}$ et $145{,}6\ \text{cm}$: ils changent.

D. Le quotient est presque le même, un peu plus de 3.

Juste.

Juste : pour les trois objets, la ficelle mesure un peu plus de trois diamètres.

Correction

À la calculatrice, au centième près :

$$75{,}4 \div 24 \approx 3{,}14$$
$$47{,}1 \div 15 = 3{,}14$$
$$213{,}6 \div 68 \approx 3{,}14$$

Le quotient est presque le même pour les trois objets.

Les petites différences viennent des mesures : une ficelle n'est jamais parfaitement précise.

Le nombre pi

Propriété : Longueur d'un cercle

Pour tous les cercles, la longueur du cercle divisée par son diamètre donne toujours le même nombre. Ce nombre se note π (on lit « pi »). Il n'est pas un nombre décimal ; une valeur approchée est $\pi \approx 3{,}14$.

Un cercle de rayon r a pour diamètre $d = 2 \times r$. Sa longueur est

$$L = \pi \times d = 2 \times \pi \times r.$$

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Les mesures de Sami le rendent crédible, mais elles ne le démontrent pas : une mesure n'est jamais exacte.

Sa preuve dépasse la 1re année du collège.

En clair : le tour d'un cercle mesure un peu plus de trois diamètres. Le nombre exact se note π.

Si on l'écrit avec une virgule, ses chiffres ne s'arrêtent jamais. Pour calculer, on le remplace donc par un nombre proche.

Exemple : avec le diamètre

La **valeur exacte** d'une longueur garde la lettre π.

Une **valeur approchée** remplace π par un nombre proche, comme $3{,}14$. On l'écrit avec le signe $\approx$, qui se lit « environ égal à ».

Une roue de vélo d'enfant a un diamètre de $40\ \text{cm}$. D'après la formule de la longueur du cercle :

$$L = \pi \times 40 = 40 \times \pi\ \text{cm}.$$

On écrit le nombre devant π. C'est la valeur exacte.

Avec $\pi \approx 3{,}14$: $L \approx 40 \times 3{,}14$, soit $L \approx 125{,}6\ \text{cm}$.

Avec la touche π de la calculatrice, on lit $125{,}66\ldots$. On arrondit au dixième de centimètre, c'est-à-dire au millimètre près : $L \approx 125{,}7\ \text{cm}$.

Les deux valeurs approchées diffèrent un peu : c'est pourquoi on dit toujours l'outil employé.

Méthode

Méthode : calculer la longueur d'un cercle

1. **Repérer le rayon ou le diamètre.** Si tu connais le rayon r, le diamètre est $d = 2 \times r$.
2. **Appliquer la formule.** $L = \pi \times d$, ou $L = 2 \times \pi \times r$.
3. **Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée.** La valeur exacte s'écrit avec π. La valeur approchée s'écrit avec le signe $\approx$, en disant l'outil : $\pi \approx 3{,}14$ ou la touche π de la calculatrice.

Exemple : avec le rayon

Une assiette a un rayon de $11\ \text{cm}$. D'après la formule de la longueur du cercle :

$$\begin{aligned} L &= 2 \times \pi \times 11 \\ &= 22 \times \pi\ \text{cm}. \end{aligned}$$

Avec $\pi \approx 3{,}14$: $L \approx 22 \times 3{,}14$, soit $L \approx 69{,}08$ cm.

Avec la touche π de la calculatrice : $L \approx 69{,}1$ cm au millimètre près.

Deux pièges

Attention : rayon ou diamètre ?

Un couvercle a un rayon de 5 cm.

✗ $L = \pi \times 5 = 5 \times \pi$ cm : on a mis le rayon dans la formule qui demande le diamètre.

✓ Le diamètre est $d = 2 \times 5 = 10$ cm, donc $L = \pi \times 10 = 10 \times \pi$ cm.

Lis bien l'énoncé : rayon ou diamètre ?

Attention : valeur exacte ou valeur approchée ?

Pour le même couvercle :

✗ $L = 10 \times 3{,}14 = 31{,}4$ cm : le signe $=$ fait croire que $31{,}4$ cm est la longueur exacte.

✓ $L = 10 \times \pi$ cm est la valeur exacte. Avec $\pi \approx 3{,}14$, on écrit $L \approx 31{,}4$ cm : le signe $\approx$ annonce une valeur approchée.

À toi : Un tour de roue

La roue avant d'un vélo a un rayon de 35 cm. Quelle distance parcourt le vélo quand la roue fait un tour complet ? Et quand elle fait dix tours ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pendant un tour, le vélo avance de la longueur du cercle de la roue.
Indice 2
On connaît le rayon : $L = 2 \times \pi \times 35 = 70 \times \pi$ cm.
Indice 3
Point délicat : π n'est pas égal à $3{,}14$. Écris d'abord la valeur exacte, puis la valeur approchée avec $\approx$, en disant l'outil.

Réponse
Pendant un tour, le vélo avance de la longueur du cercle de la roue. D'après la formule de la longueur du cercle :

$$\begin{aligned} L &= 2 \times \pi \times 35 \\ &= 70 \times \pi \text{ cm}. \end{aligned}$$

Avec $\pi \approx 3{,}14$: $L \approx 70 \times 3{,}14$, soit $L \approx 219{,}8\ \text{cm}$.

En dix tours, le vélo parcourt dix fois plus : $700 \times \pi\ \text{cm}$. Avec $\pi \approx 3{,}14$: $700 \times \pi \approx 2\,198\ \text{cm}$, soit environ $21{,}98\ \text{m}$.

Conclusion. En un tour de roue, le vélo parcourt environ $219{,}8\ \text{cm}$; en dix tours, environ $21{,}98\ \text{m}$.

L'aire d'une surface et ses unités

Compter des carreaux

Devine : Trois figures sur papier quadrillé

Sur du papier quadrillé, chaque carreau est un carré de $1\ \text{cm}$ de côté. Trace trois figures en suivant les lignes :

- la figure A, un rectangle de 5 carreaux sur 2 ;
- la figure B, un carré de 3 carreaux sur 3 ;
- la figure C, une bande de 8 carreaux sur 1.

Laquelle couvre le plus de carreaux ?

A. La figure C, la plus longue.

Faux.

Faux. C'est la figure dont le tour est le plus long, $18\ \text{cm}$. Mais elle ne couvre que 8 carreaux.

B. La figure B, le carré.

Faux.

Faux. Le carré couvre $3 \times 3 = 9$ carreaux, un de moins que la figure A.

C. La figure A, le rectangle.

Juste.

Juste : elle couvre 2 rangées de 5 carreaux, soit 10 carreaux.

D. Elles couvrent autant de carreaux.

Faux.

Faux. Elles couvrent 10, 9 et 8 carreaux.

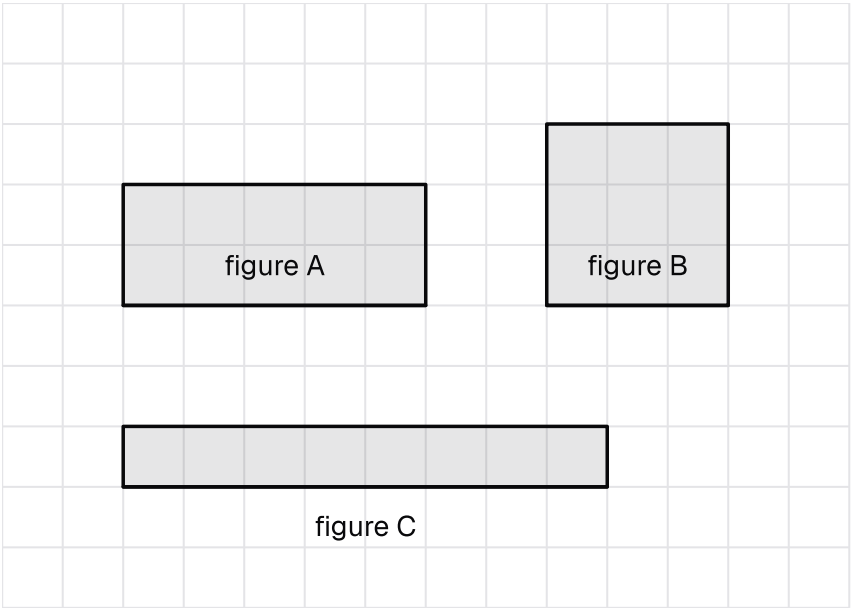
Correction

On compte les carreaux, rangée par rangée :

- la figure A en couvre $2 \times 5 = 10$;
- la figure B en couvre $3 \times 3 = 9$;
- la figure C en couvre $1 \times 8 = 8$.

La figure A couvre le plus de carreaux.

> Pourtant, c'est la figure C qui a le plus long tour : $18\ \text{cm}$, contre $14\ \text{cm}$ pour A et $12\ \text{cm}$ pour B.



Les figures A, B et C tracées en suivant les lignes d'un papier quadrillé à carreaux de 1 cm.

Définition : Aire d'une surface ; unités d'aire

L'**aire** d'une surface mesure son étendue. Pour la mesurer, on choisit une unité d'aire : l'aire est le nombre de fois que la surface contient cette unité.

Le **centimètre carré**, noté cm^2, est l'aire d'un carré de côté $1\ \text{cm}$. De même, mm^2, dm^2, m^2 et km^2 sont les aires de carrés de côté $1\ \text{mm}$, $1\ \text{dm}$, $1\ \text{m}$ et $1\ \text{km}$.

Pour les terrains, on utilise aussi l'**are** et l'**hectare** : $1\ \text{a} = 100\ \text{m}^2$ et $1\ \text{ha} = 100\ \text{a} = 10\,000\ \text{m}^2$.

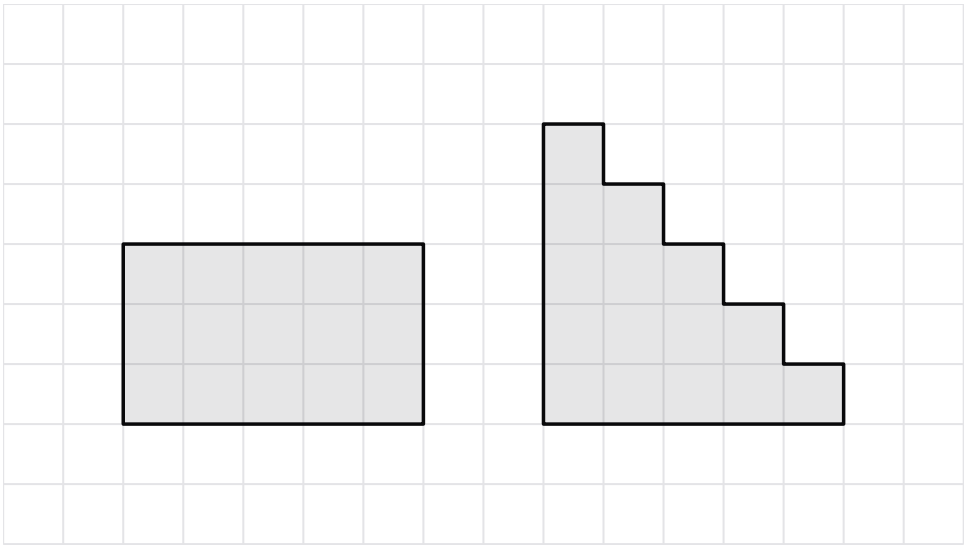
Exemple : même aire, formes différentes

Sur papier quadrillé à carreaux de $1\ \text{cm}$, trace un rectangle de 5 carreaux sur 3. Il contient 3 rangées de 5 carreaux : 15 carreaux.

Trace ensuite un escalier : une rangée de 5 carreaux, puis au-dessus des rangées de 4, 3, 2 et 1 carreaux, toutes alignées à gauche. Il contient $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ carreaux.

D'après la définition de l'aire, les deux figures ont la même aire, $15\ \text{cm}^2$.

Leurs formes sont différentes, et leurs périmètres aussi : $16\ \text{cm}$ et $20\ \text{cm}$.

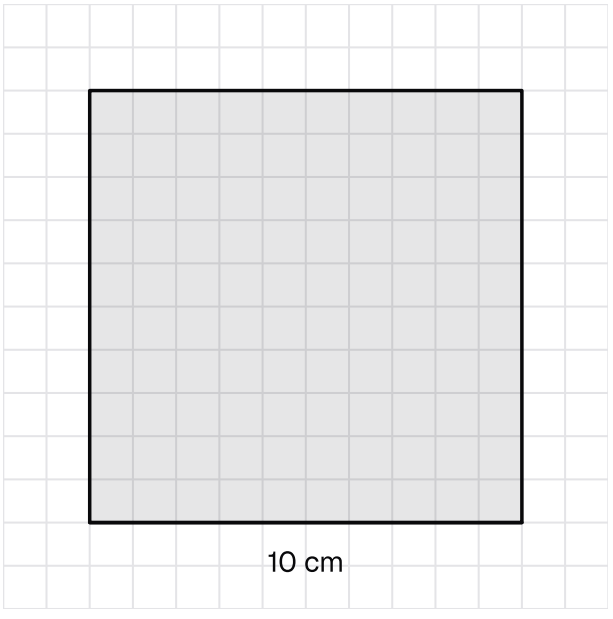


Un rectangle de 5 carreaux sur 3 et un escalier de 5, 4, 3, 2 et 1 carreaux : 15 carreaux chacun, deux formes différentes.

Changer d'unité d'aire

Pourquoi est-ce vrai ? Pourquoi faut-il 100 petits carrés, et non 10, pour couvrir un carré de $1\ \mathrm{dm}$ de côté ?

La preuve qui suit compte les carrés rangée par rangée. Elle n'utilise que la définition de l'aire et les conversions de longueurs.



Un carré de 1 dm de côté, soit 10 cm, posé sur le quadrillage : 10 rangées de 10 petits carrés de 1 cm de côté.

Propriété : Changer d'unité d'aire

Dans la liste mm^2, cm^2, dm^2, m^2, chaque unité d'aire, à partir du cm^2, vaut 100 fois l'unité qui la précède :

$$1\ \mathrm{cm}^2 = 100\ \mathrm{mm}^2, \quad 1\ \mathrm{dm}^2 = 100\ \mathrm{cm}^2, \quad 1\ \mathrm{m}^2 = 100\ \mathrm{dm}^2.$$

Par conséquent, $1\ \mathrm{m}^2 = 10\,000\ \mathrm{cm}^2$.

Démonstration

Étape 1. Un carré de côté $1\ \mathrm{dm}$ a un côté de $10\ \mathrm{cm}$. On le découpe en carrés de côté $1\ \mathrm{cm}$: on obtient 10 rangées de 10 petits carrés.

Étape 2. Le grand carré contient donc $10 \times 10 = 100$ carrés de côté $1\ \mathrm{cm}$. D'après la définition de l'aire, $1\ \mathrm{dm}^2 = 100\ \mathrm{cm}^2$.

Étape 3. Le même découpage, avec $1\ \mathrm{cm} = 10\ \mathrm{mm}$ puis $1\ \mathrm{m} = 10\ \mathrm{dm}$, donne $1\ \mathrm{cm}^2 = 100\ \mathrm{mm}^2$ et $1\ \mathrm{m}^2 = 100\ \mathrm{dm}^2$. Enfin, $1\ \mathrm{m}^2 = 100\ \mathrm{dm}^2$ et chaque dm^2 vaut $100\ \mathrm{cm}^2$: $1\ \mathrm{m}^2 = 100 \times 100\ \mathrm{cm}^2 = 10\,000\ \mathrm{cm}^2$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour changer d'unité d'aire, on découpe un carré unité en petits carrés unités.

Un côté de $1\ \mathrm{dm}$ contient 10 segments de $1\ \mathrm{cm}$: le carré contient 10 rangées de 10 carrés, soit $10 \times 10 = 100$.

Le nombre 100 vient de là : 10 dans un sens, 10 dans l'autre.

Vérifie : Des millimètres carrés

Combien de carrés de $1\ \mathrm{mm}$ de côté faut-il pour couvrir un carré de $1\ \mathrm{cm}$ de côté ?

A. 10 carrés

Faux.

Faux. 10 petits carrés ne couvrent qu'une rangée. Il y a 10 rangées.

B. 100 carrés

Juste.

Juste : 10 rangées de 10 carrés, soit $10 \times 10 = 100$.

C. 20 carrés

Faux.

Faux. $10 + 10 = 20$ additionne deux côtés ; il faut compter les rangées.

D. $1\,000$ carrés

Faux.

Faux. C'est trop : 10 rangées de 10 carrés font 100 carrés.

Correction

On a $1\ \text{cm} = 10\ \text{mm}$. Le carré de $1\ \text{cm}$ de côté se découpe en 10 rangées de 10 petits carrés de $1\ \text{mm}$ de côté.

Il en contient $10 \times 10 = 100$. Donc :

$$1\ \text{cm}^2 = 100\ \text{mm}^2.$$

Exemple : deux conversions

Dans la liste mm^2, cm^2, dm^2, m^2, passer d'une unité à sa voisine, c'est faire **un cran**.

D'après la règle de conversion des aires, un cran vers une unité plus petite multiplie par 100 :

$$\begin{aligned} 4{,}5\ \text{m}^2 &= 4{,}5 \times 100\ \text{dm}^2 \\ &= 450\ \text{dm}^2. \end{aligned}$$

Un cran vers une unité plus grande divise par 100 :

$$\begin{aligned} 2\,600\ \text{cm}^2 &= 2\,600 \div 100\ \text{dm}^2 \\ &= 26\ \text{dm}^2. \end{aligned}$$

Méthode de conversion

Méthode : convertir une aire

1. **Repérer les deux unités.** Place-les dans la liste mm^2, cm^2, dm^2, m^2, puis a et ha.
2. **Compter les crans.** Chaque cran vers une unité plus petite multiplie par 100. Chaque cran vers une unité plus grande divise par 100.
3. **Contrôler le sens.** Avec une unité plus petite, le nombre obtenu est plus grand.

Attention : 100, et non 10

✗ $7\ \text{dm}^2 = 70\ \text{cm}^2$: on a multiplié par 10, comme pour une longueur.

✓ $7\ \text{dm}^2 = 700\ \text{cm}^2$: un carré de $1\ \text{dm}$ de côté contient 100 carrés de $1\ \text{cm}$ de côté.

Are, hectare et dernier piège

L'are et l'hectare servent pour les grandes surfaces.

Un are est l'aire d'un carré de $10\ \text{m}$ de côté : il contient 10 rangées de 10 carrés de $1\ \text{m}$ de côté, soit $100\ \text{m}^2$.

Un hectare est l'aire d'un carré de $100\ \text{m}$ de côté : $100 \times 100 = 10\,000\ \text{m}^2$.

Le jardin de l'entrée couvre $96\ \mathrm{m}^2$, un peu moins d'un are.

Attention : périmètre ou aire ?

✗ « Ces deux jardins ont le même périmètre, donc la même aire. »

✓ Le périmètre est une longueur, en m ; l'aire est une surface, en m^2. Les deux jardins de l'entrée ont le même périmètre, $40\ \mathrm{m}$, mais des aires différentes : $96\ \mathrm{m}^2$ et $64\ \mathrm{m}^2$.

À toi : Le gazon en d'autres unités

Le gazon du jardin de l'entrée couvre $96\ \mathrm{m}^2$. Convertis cette aire en dm^2, puis en ares.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Repère les crans : de m^2 à dm^2, on va vers une unité plus petite.
Indice 2
Un cran : 96×100. Pour les ares, souviens-toi que $1\ \mathrm{a} = 100\ \mathrm{m}^2$.
Indice 3
Point délicat : vers une unité plus grande, on divise par 100, et non par 10. Le nombre devient plus petit.

Réponse
De m^2 à dm^2, on fait un cran vers une unité plus petite : on multiplie par 100.

$$\begin{aligned} 96\ \mathrm{m}^2 &= 96 \times 100\ \mathrm{dm}^2 \\ &= 9\,600\ \mathrm{dm}^2. \end{aligned}$$

Comme $1\ \mathrm{a} = 100\ \mathrm{m}^2$, on divise par 100 pour obtenir des ares :

$$\begin{aligned} 96\ \mathrm{m}^2 &= 96 \div 100\ \mathrm{a} \\ &= 0{,}96\ \mathrm{a}. \end{aligned}$$

Conclusion. Le gazon couvre $9\,600\ \mathrm{dm}^2$, soit $0{,}96\ \mathrm{a}$.

Aires du carré, du rectangle et du triangle

Compter par rangées

Devine : Les carreaux d'un rectangle

Sur papier quadrillé, trace un rectangle de 7 carreaux de long et 4 carreaux de large. Combien de carreaux contient-il ?

A. 11 carreaux
Faux.
Faux. $7 + 4 = 11$ additionne une longueur et une largeur ; on ne compte pas ainsi les carreaux.

B. 22 carreaux

Faux.

Faux. $2 \times (7 + 4) = 22$ est le tour du rectangle, compté en côtés de carreaux.

C. 28 carreaux

Juste.

Juste : 4 rangées de 7 carreaux, soit $4 \times 7 = 28$.

D. 49 carreaux

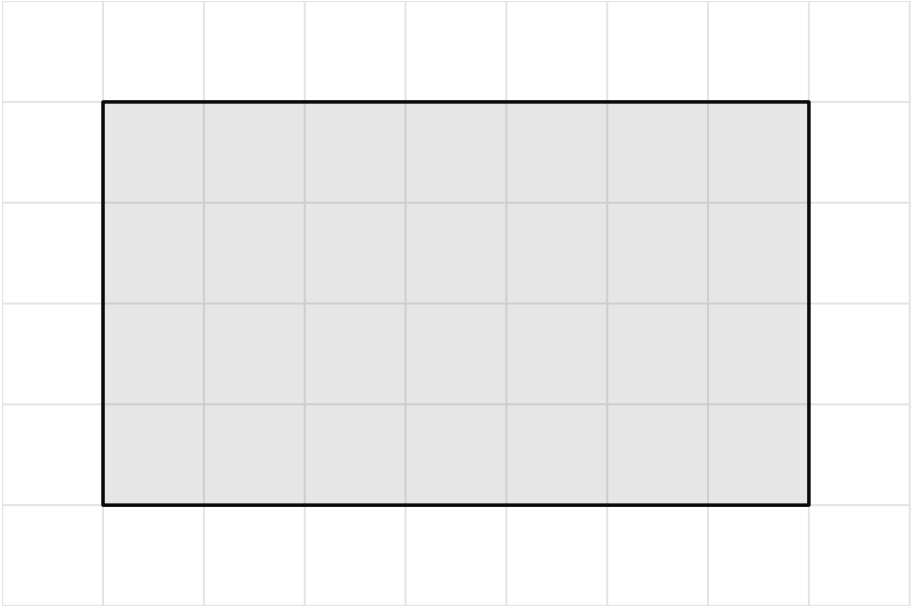
Faux.

Faux. $7 \times 7 = 49$ serait un carré de 7 carreaux de côté.

Correction

Le rectangle contient 4 rangées de 7 carreaux.

On compte $4 \times 7 = 28$ carreaux.



Le rectangle de l'activité : 7 carreaux de long et 4 carreaux de large, tracé sur les lignes du quadrillage.

Propriété : Aire du carré et du rectangle

- Un carré de côté c a pour aire $\mathcal{A} = c \times c$.
- Un rectangle de longueur L et de largeur ℓ a pour aire $\mathcal{A} = L \times \ell$.

Les longueurs sont exprimées dans la même unité ; l'aire est exprimée dans l'unité d'aire correspondante : en cm^2 si les longueurs sont en cm.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Le comptage par rangées le rend naturel : 4 rangées de 7 carreaux font $4 \times 7 = 28$ carreaux. On l'admet aussi quand les longueurs sont des nombres décimaux.

Exemple : une chambre et son tapis

La chambre de Yasmine est un rectangle de $4{,}2\ \text{m}$ sur $3\ \text{m}$. D'après la formule de l'aire du rectangle :

$$\mathcal{A} = 4{,}2 \times 3 = 12{,}6\ \text{m}^2.$$

Son tapis est un carré de $1{,}8\ \text{m}$ de côté. D'après la formule de l'aire du carré :

$$\mathcal{A} = 1{,}8 \times 1{,}8 = 3{,}24\ \text{m}^2.$$

Le triangle

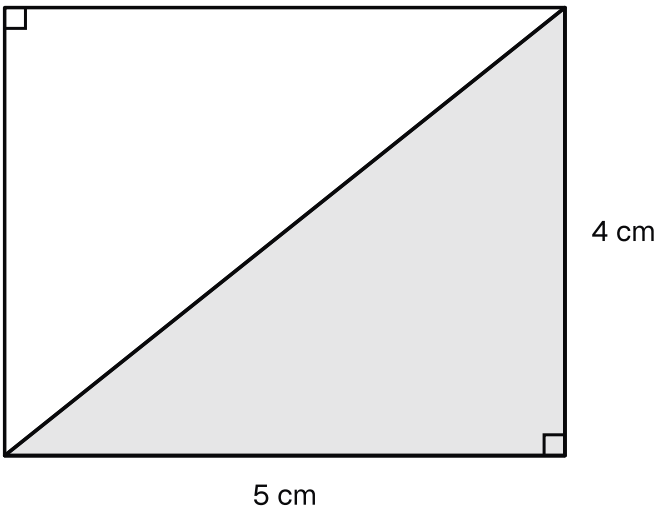
Observation : trace un rectangle de $5\ \text{cm}$ sur $4\ \text{cm}$. Une **diagonale** est un segment qui joint deux sommets non voisins : trace l'une des deux.

Elle coupe le rectangle en deux triangles rectangles superposables, c'est-à-dire qui se recouvrent exactement.

Chacun a donc pour aire la moitié de celle du rectangle :

$$\frac{5 \times 4}{2} = 10\ \text{cm}^2.$$

Ce découpage rend crédible la formule de l'aire du triangle. Ce n'est pas une démonstration.



Une diagonale coupe le rectangle de 5 cm sur 4 cm en deux triangles rectangles superposables ; l'un d'eux est teinté.

Rappel du chapitre sur les droites perpendiculaires et parallèles : la **distance** d'un point A à une droite est la longueur du segment qui va de A à la droite en formant un angle droit avec elle.

Propriété : Aire du triangle

Dans un triangle, on choisit un côté, appelé **base** ; on note b sa longueur. La **hauteur** relative à cette base est la distance du sommet opposé à la droite qui porte la base ; on note h sa longueur. L'aire du triangle est

$$\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}.$$

Dans un triangle rectangle, si l'on prend pour base un côté de l'angle droit, la hauteur est l'autre côté de l'angle droit.

Remarque : Un résultat admis

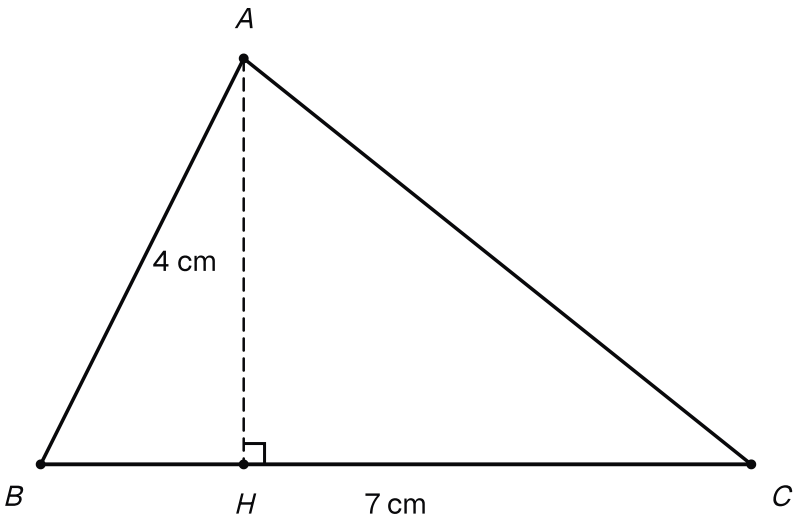
Ce résultat est admis. Le découpage du rectangle le rend crédible pour un triangle rectangle ; pour les autres triangles, on l'admet aussi.

Exemple : la hauteur à l'intérieur

Trace un segment $[BC]$ de $7\ \text{cm}$. Place un point H sur $[BC]$, à $2\ \text{cm}$ de B. Trace en H la perpendiculaire à (BC) et place A dessus, à $4\ \text{cm}$ de H.

Le triangle ABC a pour base $BC = 7\ \text{cm}$ et pour hauteur $AH = 4\ \text{cm}$. D'après la formule de l'aire du triangle :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{7 \times 4}{2} \\ &= \frac{28}{2} = 14\ \text{cm}^2.\end{aligned}$$



Le triangle ABC de l'exemple : la base [BC] mesure 7 cm et la hauteur [AH], dont le pied H est sur [BC], mesure 4 cm.

Une hauteur à l'extérieur

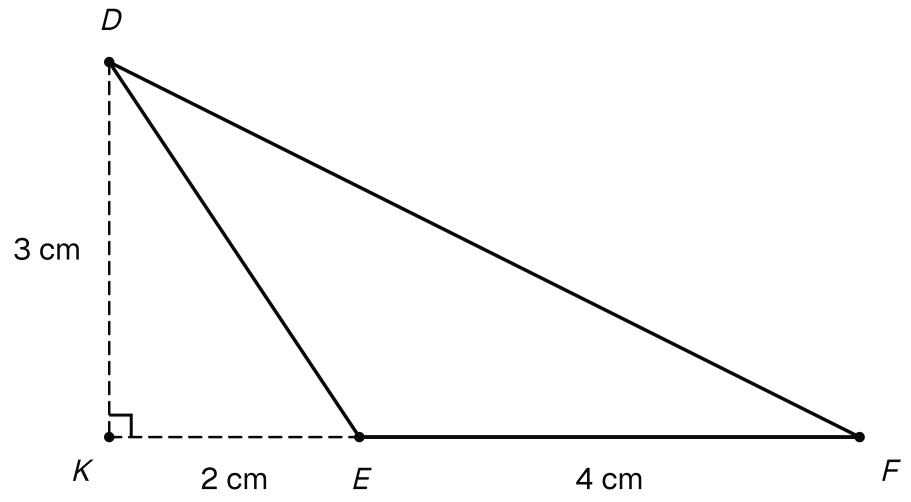
Exemple : la hauteur à l'extérieur

Trace un segment $[EF]$ de $4\ \text{cm}$ et prolonge-le au-delà de E. Place K sur ce prolongement, à $2\ \text{cm}$ de E. Trace en K la perpendiculaire à (EF) et place D dessus, à $3\ \text{cm}$ de K.

La hauteur $[DK]$ est à l'extérieur du triangle DEF. Elle mesure la distance de D à la droite (EF).

D'après la formule de l'aire du triangle :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{4 \times 3}{2} \\ &= \frac{12}{2} = 6\ \text{cm}^2.\end{aligned}$$



Le triangle DEF : la base [EF] de 4 cm est prolongée au-delà de E, et la hauteur [DK] de 3 cm reste en dehors du triangle.

Méthode : calculer une aire avec une formule

1. **Reconnaître la figure.** Choisis la formule de son aire et nomme-la.
2. **Repérer la base et sa hauteur.** La hauteur est perpendiculaire à la base ; elle peut se trouver à l'extérieur de la figure.
3. **Vérifier les unités.** Toutes les longueurs doivent être dans la même unité.
4. **Calculer, puis écrire l'unité d'aire.** Des longueurs en cm donnent une aire en cm^2.

Rédiger en devoir

Remarque : Coin devoir : rédiger un calcul d'aire

En devoir, on nomme la formule, on remplace les lettres, puis on calcule. Par exemple, pour un triangle de base $9\ \text{cm}$ et de hauteur $4\ \text{cm}$: « D'après la formule de l'aire du triangle, $\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{9 \times 4}{2} = 18\ \text{cm}^2$. » L'unité d'aire termine la phrase.

À toi : Le tapis de ta chambre

Le tapis de ta chambre est un rectangle de $2{,}5\ \text{m}$ sur $160\ \text{cm}$. Calcule son aire en m^2, puis en dm^2. Une diagonale partage le tapis en deux triangles : quelle est l'aire de chacun ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Mets d'abord les deux longueurs dans la même unité : $160\ \text{cm} = 1{,}6\ \text{m}$.

Indice 2

D'après la formule de l'aire du rectangle, $\mathcal{A} = 2{,}5 \times 1{,}6$. Le triangle est un triangle rectangle : ses côtés de l'angle droit mesurent $2{,}5\ \mathrm{m}$ et $1{,}6\ \mathrm{m}$.

Indice 3

Point délicat : pour passer des m^2 aux dm^2, on multiplie par 100, et non par 10.

Réponse

On convertit d'abord : $160\ \mathrm{cm} = 1{,}6\ \mathrm{m}$. D'après la formule de l'aire du rectangle :

$$\mathcal{A} = 2{,}5 \times 1{,}6 = 4\ \mathrm{m}^2.$$

Un cran vers une unité plus petite multiplie par 100 :

$$\begin{aligned} 4\ \mathrm{m}^2 &= 4 \times 100\ \mathrm{dm}^2 \\ &= 400\ \mathrm{dm}^2. \end{aligned}$$

Chaque triangle a pour base $2{,}5\ \mathrm{m}$ et pour hauteur $1{,}6\ \mathrm{m}$. D'après la formule de l'aire du triangle :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{2{,}5 \times 1{,}6}{2} \\ &= \frac{4}{2} = 2\ \mathrm{m}^2. \end{aligned}$$

Conclusion. Le tapis couvre $4\ \mathrm{m}^2$, soit $400\ \mathrm{dm}^2$. Chaque triangle couvre $2\ \mathrm{m}^2$, la moitié du tapis.

Aires du parallélogramme, du losange et du trapèze

Le parallélogramme

Devine : Découper et recoller

Sur papier quadrillé, trace un parallélogramme $ABCD$. Le côté $[AB]$ suit une ligne du quadrillage et mesure 5 carreaux. Le point D est 3 carreaux au-dessus de A et 1 carreau à sa droite ; C est 5 carreaux à droite de D.

Le point H de $[AB]$ est juste sous D. Découpe le triangle ADH et recolle-le contre le côté $[BC]$. Combien de carreaux couvre la figure obtenue ?

A. 15 carreaux

Juste.

Juste : la figure obtenue est un rectangle de 5 carreaux sur 3, soit $3 \times 5 = 15$ carreaux.

B. 8 carreaux

Faux.

Faux. $5 + 3 = 8$ additionne deux longueurs ; on doit compter les rangées de carreaux.

C. $7{,}5$ carreaux

Faux.

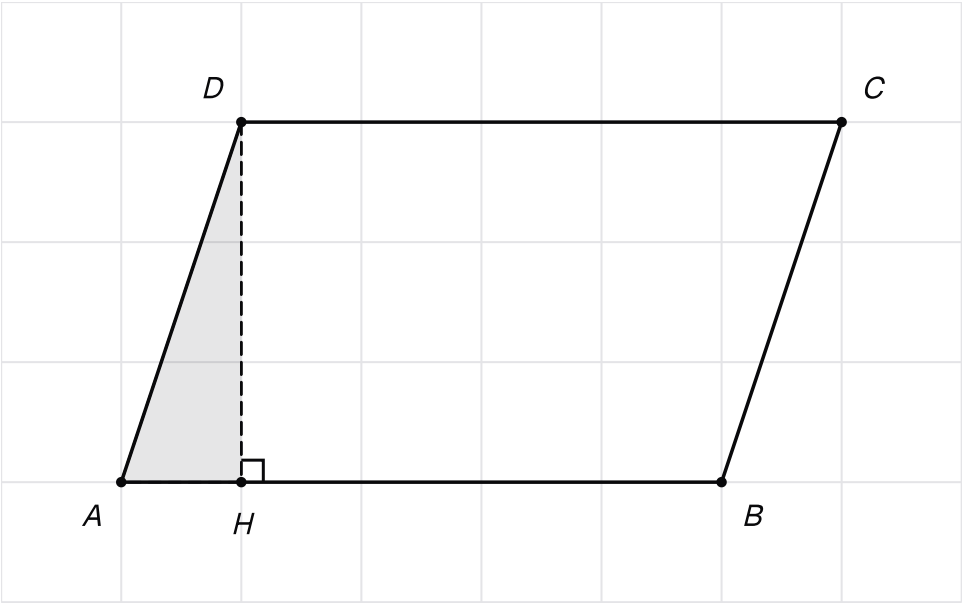
Faux. On a divisé par 2, comme pour un triangle. Ici, rien n'est coupé en deux.

D. 18 carreaux

Faux.
Faux. De A à C, il y a 6 carreaux, mais le rectangle obtenu n'en a que 5 de long : $3 \times 6 = 18$ est trop.

Correction
Le triangle ADH recollé contre $[BC]$ complète un rectangle. Ce rectangle a 5 carreaux de long, comme $[AB]$, et 3 carreaux de haut, comme $[DH]$. Il couvre 3 rangées de 5 carreaux : 15 carreaux.

On n'a rien ajouté ni enlevé : le parallélogramme couvre aussi 15 carreaux.



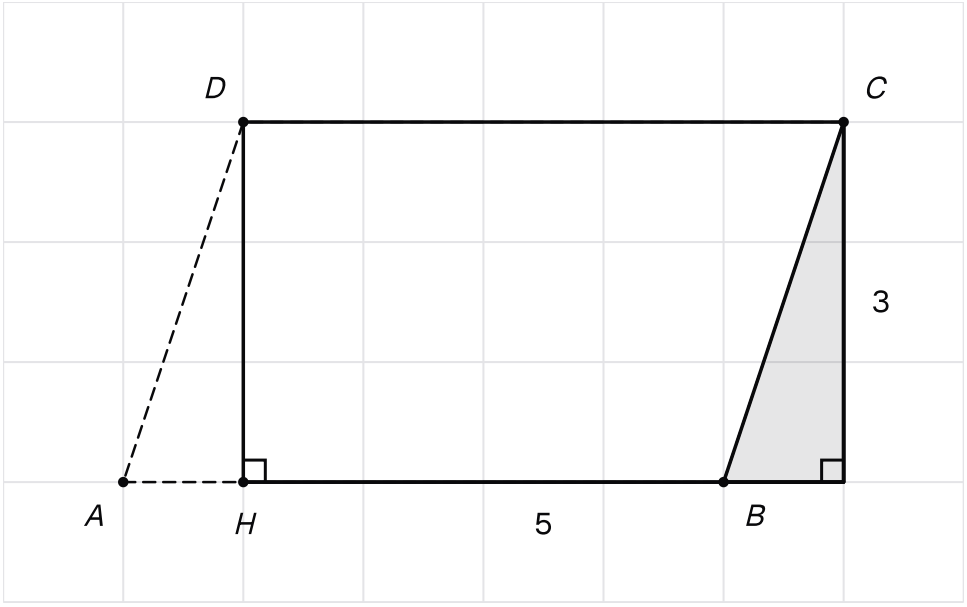
Le parallélogramme ABCD de l'activité sur le quadrillage, avec le point H de [AB] juste sous D et le triangle ADH à découper.

Observation : découper et recoller ne change pas l'aire, puisqu'on n'ajoute rien et qu'on n'enlève rien.

Le rectangle obtenu a pour longueur le côté $[AB]$, sur lequel le parallélogramme est posé : on l'appelle une **base** du parallélogramme.

Sa largeur est DH, la distance de D à la droite (AB) : on l'appelle la **hauteur** relative à cette base.

Cela rend crédible la formule suivante. Ce n'est pas une démonstration.



Après le découpage : le triangle ADH, recollé contre [BC], complète un rectangle de 5 carreaux de long et de 3 carreaux de haut.

Propriété : Aire du parallélogramme

Dans un parallélogramme, on choisit un côté comme **base** ; on note b sa longueur. La **hauteur** relative à cette base est la distance d'un point du côté opposé à la droite qui porte la base ; on note h sa longueur. L'aire du parallélogramme est

$$\mathcal{A} = b \times h.$$

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Le découpage du papier quadrillé le rend crédible ; il ne le démontre pas.

Exemple : la base et sa hauteur

Un parallélogramme $EFGH$ a un côté $[EF]$ de $7\ \text{cm}$ et un côté $[FG]$ de $4\ \text{cm}$. La distance de H à la droite (EF) est $3\ \text{cm}$: c'est la hauteur relative à la base $[EF]$.

D'après la formule de l'aire du parallélogramme :

$$\mathcal{A} = 7 \times 3 = 21\ \text{cm}^2.$$

La longueur $4\ \text{cm}$ du côté $[FG]$ ne sert pas ici.

Le losange

Observation : trace un segment $[AC]$ de $6\ \text{cm}$ et un segment $[BD]$ de $4\ \text{cm}$. Place-les perpendiculaires, de façon qu'ils se coupent en leur milieu O.

Joins A à B, B à C, C à D et D à A : tu obtiens un losange, de diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

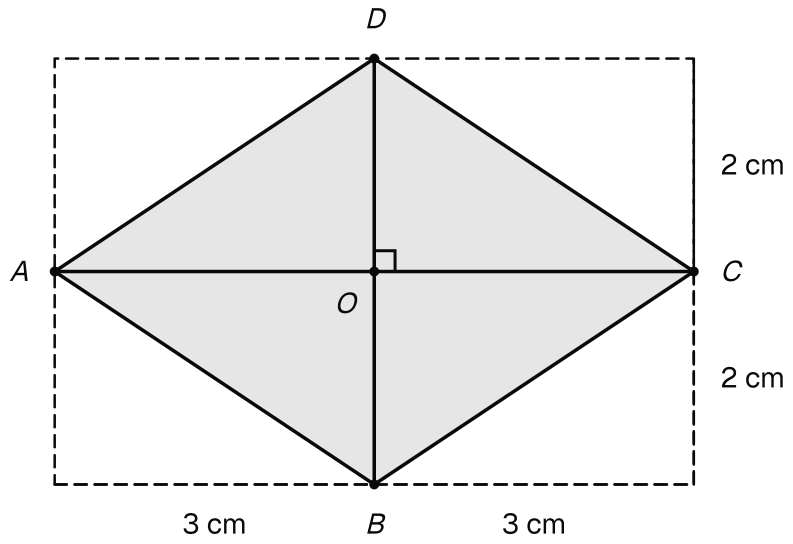
Trace ensuite le rectangle de $6\ \text{cm}$ sur $4\ \text{cm}$ dont chaque côté passe par un sommet du losange et est parallèle à une diagonale.

Les diagonales le partagent en quatre petits rectangles de $3\ \text{cm}$ sur $2\ \text{cm}$. Dans chacun, un côté du losange le coupe en deux triangles superposables : l'un est dans le losange, l'autre dehors.

Le losange occupe donc la moitié du grand rectangle :

$$\frac{6 \times 4}{2} = 12\ \text{cm}^2.$$

Cette observation rend crédible la formule suivante. Ce n'est pas une démonstration.



Le losange ABCD, de diagonales [AC] et [BD], dans le rectangle de 6 cm sur 4 cm dont les côtés passent par ses sommets.

Propriété : Aire du losange

Un losange dont les diagonales mesurent D et d a pour aire

$$\mathcal{A} = \frac{D \times d}{2}.$$

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. L'observation du rectangle autour du losange le rend crédible ; ce n'est pas une démonstration.

Exemple : un cerf-volant

Un cerf-volant a la forme d'un losange. Ses deux baguettes, qui sont ses diagonales, mesurent $80\ \text{cm}$ et $50\ \text{cm}$.

D'après la formule de l'aire du losange :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{80 \times 50}{2} \\ &= \frac{4\,000}{2} = 2\,000\ \text{cm}^2.\end{aligned}$$

C'est aussi $20\ \text{dm}^2$.

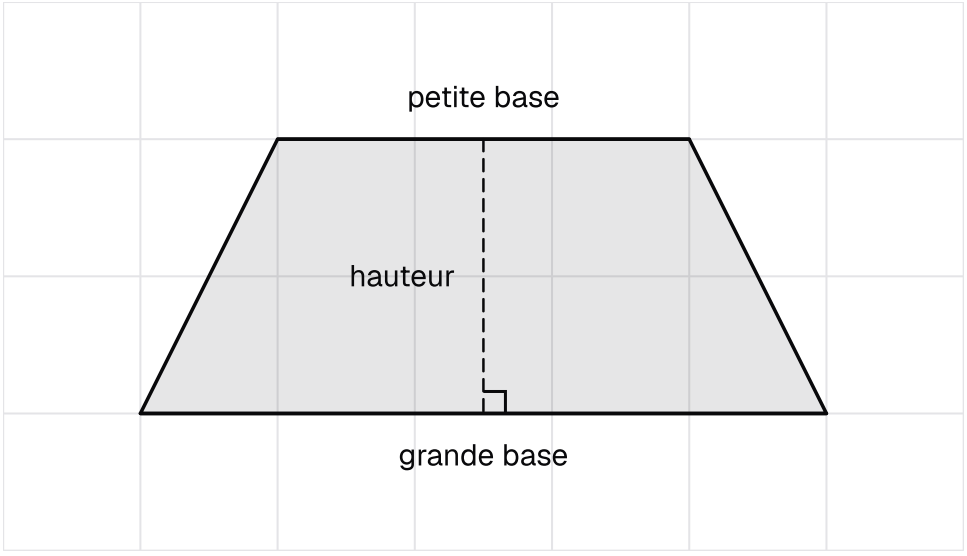
Le trapèze

Observation : les deux côtés parallèles d'un trapèze sont ses **bases**. Sa **hauteur** est la distance d'un point d'une base à la droite qui porte l'autre base.

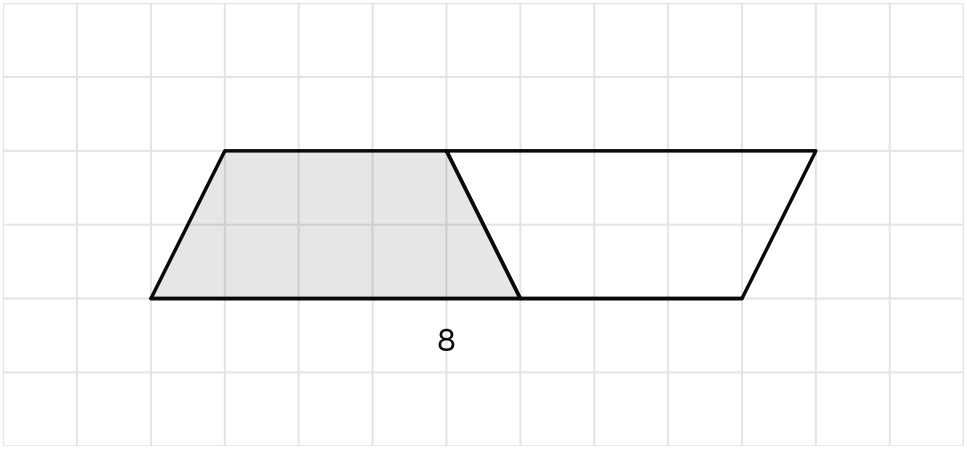
Sur papier quadrillé, trace la grande base, de 5 carreaux, sur une ligne. Trace la petite base, de 3 carreaux, 2 carreaux plus haut, en commençant 1 carreau plus à droite. Joins les bouts voisins des deux bases : tu obtiens un trapèze de hauteur 2 carreaux.

Découpe-le, ainsi qu'un second identique. Fais tourner le second d'un demi-tour, sans le retourner sur l'autre face. Colle-le au premier, côté oblique contre côté oblique : la grande base de l'un prolonge la petite base de l'autre.

Tu obtiens un parallélogramme : base $5 + 3 = 8$ carreaux, hauteur 2 carreaux. Chaque trapèze en occupe la moitié. Ce n'est pas une démonstration.



Le trapèze tracé sur le quadrillage : grande base de 5 carreaux, petite base de 3 carreaux, hauteur de 2 carreaux.



Deux trapèzes identiques, le second tourné d'un demi-tour, forment un parallélogramme de base 5 + 3 = 8 carreaux.

Propriété : Aire du trapèze

Un trapèze a deux côtés parallèles, appelés ses **bases** ; on note B et b leurs longueurs. Sa **hauteur** est la distance d'un point d'une base à la droite qui porte l'autre base ; on note h sa longueur. L'aire du trapèze est

$$\mathcal{A} = \frac{(B + b) \times h}{2}.$$

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. L'assemblage des deux trapèzes le rend crédible ; il ne le démontre pas.

Exemple : un trapèze

Un trapèze $KLMN$ a deux côtés parallèles : $[KL]$ de $11\ \text{cm}$ et $[NM]$ de $7\ \text{cm}$. La distance de N à la droite (KL) est $4\ \text{cm}$.

D'après la formule de l'aire du trapèze :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{(11+7)\times 4}{2}\\ &= \frac{18\times 4}{2}\\ &= \frac{72}{2} = 36\ \text{cm}^2.\end{aligned}$$

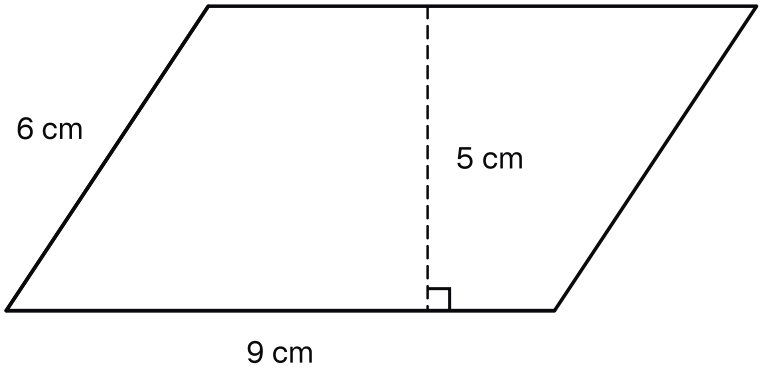
Hauteur ou côté ?

Attention : la hauteur n'est pas un côté oblique

Un parallélogramme a des côtés de $9\ \text{cm}$ et $6\ \text{cm}$. Sa hauteur relative au côté de $9\ \text{cm}$ mesure $5\ \text{cm}$.

✗ $\mathcal{A} = 9\times 6 = 54\ \text{cm}^2$: le côté de $6\ \text{cm}$ est oblique, ce n'est pas la hauteur.

✓ $\mathcal{A} = 9\times 5 = 45\ \text{cm}^2$: la hauteur est perpendiculaire à la base.



Le parallélogramme du piège : côtés de 9 cm et de 6 cm, hauteur de 5 cm perpendiculaire au côté de 9 cm.

À toi : Le cerf-volant de ton frère

Le cerf-volant de ton frère est un losange de côté $45\ \text{cm}$. Ses diagonales mesurent $72\ \text{cm}$ et $54\ \text{cm}$. Calcule son aire, puis la longueur de ruban nécessaire pour border tout son contour.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

L'aire du losange se calcule avec ses diagonales ; son contour se calcule avec son côté.

Indice 2

D'après la formule de l'aire du losange, $\mathcal{A} = \dfrac{72 \times 54}{2}$. D'après la formule du périmètre du losange, $P = 4 \times 45$.

Indice 3

Point délicat : le côté de $45\ \text{cm}$ ne sert pas pour l'aire, et les diagonales ne servent pas pour le contour.

Réponse

D'après la formule de l'aire du losange :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{72 \times 54}{2} \\ &= \frac{3\,888}{2} = 1\,944\ \text{cm}^2.\end{aligned}$$

Le ruban borde le contour. D'après la formule du périmètre du losange :

$$P = 4 \times 45 = 180\ \text{cm}.$$

Conclusion. Le cerf-volant a pour aire $1\,944\ \text{cm}^2$. Il faut $180\ \text{cm}$ de ruban, soit $1{,}8\ \text{m}$.

Aire du disque et figures composées

Le disque

Devine : Un disque dans un carré

Sur du papier quadrillé à carreaux de $1\ \text{cm}$, pique le compas sur un coin de carreau. Trace un cercle de rayon $4\ \text{cm}$, puis le carré de côté $8\ \text{cm}$ dont chaque côté touche le cercle. Ce carré a pour aire $8 \times 8 = 64\ \text{cm}^2$.

Compte à peu près les carreaux à l'intérieur du cercle. Prédis l'aire du disque, c'est-à-dire de la surface à l'intérieur du cercle.

A. Un peu plus de $64\ \text{cm}^2$

Faux.

Faux. Le disque est à l'intérieur du carré : son aire est plus petite.

B. Exactement $32\ \text{cm}^2$

Faux.

Faux. Le disque couvre plus de la moitié du carré : seuls les quatre coins restent libres.

C. Environ $50\ \text{cm}^2$

Juste.

Juste : le disque couvre un peu plus des trois quarts du carré, qui font $48\ \text{cm}^2$.

D. Environ $25\ \text{cm}^2$

Faux.

Faux. 25 est à peu près la longueur du cercle, $8 \times \pi \approx 25{,}12\ \text{cm}$ avec $\pi \approx 3{,}14$: ce n'est pas une aire.

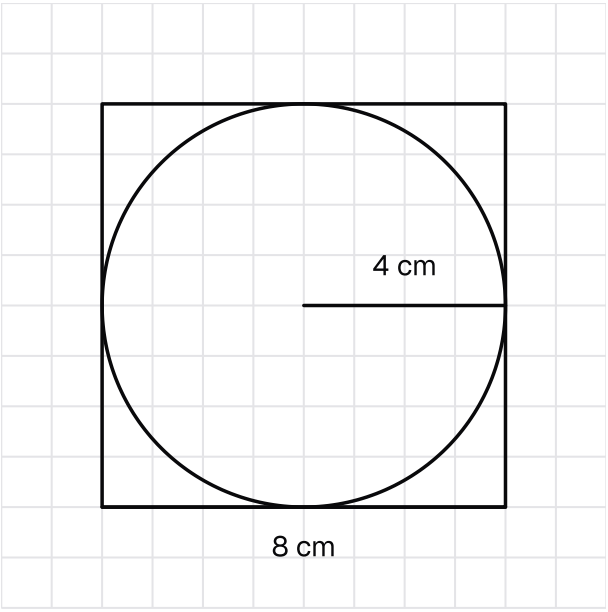
Correction

La formule de l'aire du disque, qui suit, donne :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \pi \times 4 \times 4 \\ &= 16 \times \pi\ \text{cm}^2.\end{aligned}$$

Avec $\pi \approx 3{,}14$: $16 \times 3{,}14 = 50{,}24$, donc $\mathcal{A} \approx 50{,}24\ \text{cm}^2$.

C'est plus que les trois quarts du carré, $48\ \text{cm}^2$, et moins que le carré entier.



Le cercle de rayon 4 cm et le carré de 8 cm de côté qui l'entoure, sur un quadrillage à carreaux de 1 cm.

Propriété : Aire du disque

Le **disque** de centre O et de rayon r est la surface formée par le cercle de centre O et de rayon r et par son intérieur. Son aire est

$$\mathcal{A} = \pi \times r \times r.$$

Avec $\pi \approx 3{,}14$, on obtient une valeur approchée de cette aire.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Aucune justification n'en est donnée en 1re année du collège.

Ici, l'aire du disque est un peu plus des trois quarts de celle du carré qui l'entoure.

Exemple : une table ronde

Une table ronde a un diamètre de $1\ \mathrm{m}$, c'est-à-dire $100\ \mathrm{cm}$. Son rayon est $r = 100 \div 2 = 50\ \mathrm{cm}$.

D'après la formule de l'aire du disque :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \pi \times 50 \times 50 \\ &= 2\,500 \times \pi\ \mathrm{cm}^2.\end{aligned}$$

C'est la valeur exacte.

Avec $\pi \approx 3{,}14$: $\mathcal{A} \approx 7\,850\ \mathrm{cm}^2$, soit $\mathcal{A} \approx 78{,}5\ \mathrm{dm}^2$.

Avec la touche π de la calculatrice : $\mathcal{A} \approx 7\,854\ \mathrm{cm}^2$, au centimètre carré près.

Figures composées

Exemple : découper une figure

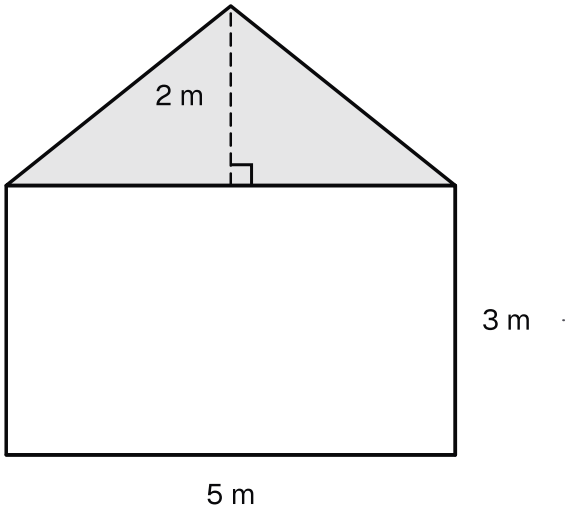
La façade de la cabane à outils du jardin, c'est-à-dire sa face avant, est un rectangle de $5\ \mathrm{m}$ de large et $3\ \mathrm{m}$ de haut.

Un triangle est posé sur son côté du haut. La base du triangle est ce côté tout entier, et son sommet est $2\ \mathrm{m}$ au-dessus du milieu de ce côté.

On découpe la façade en deux morceaux qui ne se chevauchent pas :

- D'après la formule de l'aire du rectangle, le rectangle couvre $5 \times 3 = 15\ \mathrm{m}^2$.
- D'après la formule de l'aire du triangle, le triangle couvre $\dfrac{5 \times 2}{2} = 5\ \mathrm{m}^2$.

On additionne les deux morceaux : la façade a pour aire $15 + 5 = 20\ \mathrm{m}^2$.



La façade de la cabane découpée en deux morceaux : un rectangle de 5 m sur 3 m et, au-dessus, un triangle de hauteur 2 m.

Exemple : retirer un morceau

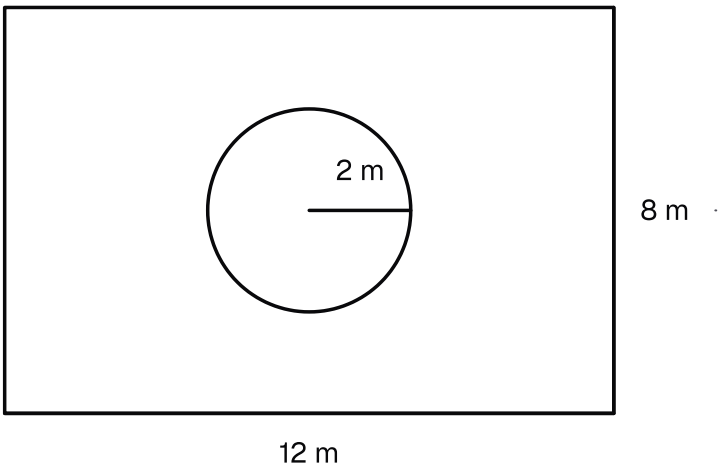
Au milieu du jardin de l'entrée, de $12\ \text{m}$ sur $8\ \text{m}$, on plante un massif rond de rayon $2\ \text{m}$: un **massif** est un coin de terre planté de fleurs. Le reste est couvert de gazon.

D'après la formule de l'aire du rectangle, le jardin couvre $12 \times 8 = 96\ \text{m}^2$.

D'après la formule de l'aire du disque, le massif couvre $\pi \times 2 \times 2 = 4 \times \pi\ \text{m}^2$.

On retire le massif du jardin. Le gazon couvre donc $(96 - 4 \times \pi)\ \text{m}^2$: c'est la valeur exacte.

Avec $\pi \approx 3{,}14$: $4 \times 3{,}14 = 12{,}56$, et $96 - 12{,}56 = 83{,}44$. Le gazon couvre environ $83{,}44\ \text{m}^2$.



Le jardin de 12 m sur 8 m et, en son milieu, le massif rond de rayon 2 m qu'on retire de la surface de gazon.

Méthode : aire d'une figure composée

1. **Découper ou retirer.** Découpe la figure en figures usuelles qui ne se chevauchent pas. Ou bien vois-la comme une grande figure à laquelle on a retiré un morceau.
2. **Calculer chaque morceau.** Calcule l'aire de chaque morceau avec sa formule, en nommant la formule.
3. **Additionner ou soustraire.** Additionne les aires des morceaux, ou soustrais l'aire du morceau retiré.

Deux pièges du disque

Attention : l'aire du disque demande le rayon

La table ronde de la cuisine a un diamètre de $1{,}2\ \text{m}$.

✗ $\mathcal{A} = \pi \times 1{,}2 \times 1{,}2$: on a pris le diamètre à la place du rayon. Le résultat est quatre fois trop grand.

✓ Le rayon est $r = 1{,}2 \div 2 = 0{,}6\ \text{m}$. D'après la formule de l'aire du disque :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \pi \times 0{,}6 \times 0{,}6 \\ &= 0{,}36 \times \pi\ \text{m}^2.\end{aligned}$$

Trouve l'erreur : Le calcul de Lina

Pour un disque de rayon $5\ \text{cm}$, Lina écrit : $\mathcal{A} = 2 \times \pi \times 5 = 10 \times \pi\ \text{cm}^2$. Quelle est son erreur ?

A. L'unité devrait être le centimètre.

Faux.

Faux. Une aire s'exprime bien en cm^2. L'erreur est dans la formule.

B. Elle a pris la formule de la longueur.

Juste.

Juste : $2 \times \pi \times r$ donne la longueur du cercle. L'aire du disque est $\pi \times r \times r$.

C. Elle devait prendre le diamètre, $10\ \mathrm{cm}$.

Faux.

Faux. L'aire du disque utilise le rayon : $\pi \times 10 \times 10$ serait faux aussi.

D. Son calcul ne contient aucune erreur.

Faux.

Faux. Son résultat est la longueur du cercle, pas l'aire du disque.

Correction

Lina a écrit la formule de la longueur du cercle. D'après la formule de l'aire du disque :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \pi \times 5 \times 5 \\ &= 25 \times \pi\ \mathrm{cm}^2.\end{aligned}$$

Rédiger en devoir

Remarque : Coin devoir : aire d'un disque et valeur approchée

En devoir, on écrit la valeur exacte avant la valeur approchée, et on dit l'outil. Par exemple, pour un disque de rayon $7\ \mathrm{cm}$: « D'après la formule de l'aire du disque, $\mathcal{A} = \pi \times 7 \times 7 = 49 \times \pi\ \mathrm{cm}^2$. Avec $\pi \approx 3{,}14$, $\mathcal{A} \approx 153{,}86\ \mathrm{cm}^2$. »

À toi : Le tapis rond

Le sol de ta chambre est un rectangle de $4\ \mathrm{m}$ sur $3{,}5\ \mathrm{m}$. Tu y poses un tapis rond de diamètre $2\ \mathrm{m}$.

Quelle aire du sol reste visible ? Donne la valeur exacte, puis une valeur approchée.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Vois la partie visible comme le rectangle du sol, auquel on retire le disque du tapis.

Indice 2

Le sol couvre $4 \times 3{,}5 = 14\ \mathrm{m}^2$. Le tapis a un rayon de $1\ \mathrm{m}$.

Indice 3

Point délicat : le tapis a un diamètre de $2\ \mathrm{m}$, mais la formule de l'aire du disque utilise le rayon, $1\ \mathrm{m}$.

Réponse

D'après la formule de l'aire du rectangle, le sol couvre $4 \times 3{,}5 = 14\ \mathrm{m}^2$.

Le rayon du tapis est $r = 2 \div 2 = 1$ m. D'après la formule de l'aire du disque, le tapis couvre $\pi \times 1 \times 1 = \pi$ m^2.

On retire le tapis du sol : la partie visible couvre $(14 - \pi)$ m^2. C'est la valeur exacte.

Avec $\pi \approx 3{,}14$: $14 - 3{,}14 = 10{,}86$.

Conclusion. L'aire du sol qui reste visible est $(14 - \pi)$ m^2, soit environ $10{,}86$ m^2.

Ce qu'il faut retenir

Voici les formules du chapitre, une ligne par figure. Les longueurs sont dans la même unité.

Figure	Périmètre ou longueur	Aire
carré de côté c	$P = 4 \times c$	$\mathcal{A} = c \times c$
rectangle de longueur L et de largeur ℓ	$P = 2 \times (L + \ell)$	$\mathcal{A} = L \times \ell$
losange de côté c et de diagonales D et d	$P = 4 \times c$	$\mathcal{A} = \dfrac{D \times d}{2}$
triangle de base b et de hauteur h	somme des trois côtés	$\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$
parallélogramme de base b et de hauteur h	somme des quatre côtés	$\mathcal{A} = b \times h$
trapèze de bases B et b et de hauteur h	somme des quatre côtés	$\mathcal{A} = \dfrac{(B + b) \times h}{2}$
cercle et disque de rayon r	$L = 2 \times \pi \times r$	$\mathcal{A} = \pi \times r \times r$

À retenir : Le conseil du professeur

Avant chaque calcul, pose-toi trois questions :

1. Les longueurs sont-elles dans la même unité ?
2. Quelle formule vas-tu employer ?
3. As-tu repéré la bonne base et sa hauteur, ou le rayon ?

Écris ensuite la valeur exacte avec π avant la valeur approchée.

Termine toujours par l'unité : cm pour un périmètre, cm^2 pour une aire.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Périmètres et aires » (1ac · general · mathematiques)