BURHAN

Les nombres décimaux relatifs : ordre, addition et soustraction

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/nombres-relatifs-ordre-et-addition/cours

Chapitre	Semestre
Les nombres décimaux relatifs : ordre, addition et soustraction	Semestre 1

Plus froid que zéro

Ce matin d'hiver, à Ifrane, le thermomètre de la cour affiche -4 °C à 7 h. Il fait plus froid que zéro.

À 15 h, le même thermomètre affiche $+7$ °C. Le soleil a réchauffé la ville.

Devine : La hausse de la journée

De combien de degrés la température a-t-elle monté entre 7 h et 15 h ?

A. 3 degrés

Faux.

Tu as calculé $7 - 4$. Or la température part d'au-dessous de zéro : il faut d'abord remonter jusqu'à 0.

B. 11 degrés

Juste.

De -4 à 0, la température monte de 4 degrés. De 0 à $+7$, elle monte encore de 7 degrés : $4 + 7 = 11$.

C. 7 degrés

Faux.

C'est seulement la montée de 0 à $+7$. Tu oublies les 4 degrés entre -4 et 0.

D. -3 degrés

Faux.

La température a monté : une hausse ne s'écrit pas avec un nombre négatif.

Indice 1

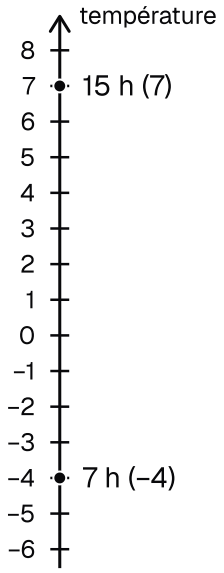
Imagine le thermomètre : compte d'abord les degrés de -4 jusqu'à 0.

Correction

La température a monté de 11 degrés : 4 degrés pour remonter de -4 à 0, puis 7 degrés de 0 à $+7$.

Un thermomètre ressemble à une règle graduée posée debout. Sa graduation porte un zéro.

Au-dessus de zéro, on lit les températures positives. Au-dessous de zéro, on lit les températures négatives, avec le signe $-$.



Le thermomètre de la cour d'Ifrane, gradué de degré en degré : –4 à 7 h, sous le zéro, et 7 à 15 h, au-dessus.

Les nombres avec un signe $-$ sont partout autour de toi. Dans un parking souterrain, le niveau -2 est le deuxième sous-sol. Sur un relevé de compte, -150 dirhams signale une dette.

À la fin du chapitre, tu sauras écrire la hausse du matin d'Ifrane en une seule ligne : $(+7) - (-4) = 11$.

Des nombres avec un signe

Au-dessus et au-dessous

Devine : Le deuxième sous-sol

Dans un immeuble de Casablanca, le rez-de-chaussée porte le numéro 0. Les étages au-dessus portent les numéros 1, 2, 3…

Quel numéro l'ascenseur affiche-t-il pour le deuxième sous-sol, deux niveaux sous le rez-de-chaussée ?

A. 2

Faux.
Le numéro 2 désigne le deuxième étage, au-dessus du rez-de-chaussée.

B. -1

Faux.
Le numéro -1 désigne le premier sous-sol, juste sous le rez-de-chaussée.

C. -2

Juste.
Le signe $-$ indique un niveau sous le rez-de-chaussée, et 2 compte les niveaux.

Correction

> L'ascenseur affiche -2. Le signe $-$ veut dire « au-dessous du rez-de-chaussée », et 2 compte les niveaux descendus.

Le signe $-$ veut dire « au-dessous de zéro ». Le signe $+$ veut dire « au-dessus de zéro ».

C'est pareil pour l'altitude. Le sommet du Toubkal est à environ $+4\,167$ m. Une plongeuse à 12 m sous la surface de la mer est à l'altitude -12 m.

Le signe d'un nombre

Remarque : Rappel du primaire

Tu as vu à l'école primaire les nombres décimaux, comme 12, $2{,}5$ ou $0{,}75$. Ils servent à compter et à mesurer. Dans ce chapitre, on écrit un signe devant eux.

Définition : Nombres relatifs

Un **nombre relatif** s'écrit avec un **signe** et un nombre décimal, sauf le nombre 0.

- Un nombre précédé du signe $+$ est un nombre **positif** : $+4$, $+2{,}5$. On peut ne pas écrire le signe $+$: $+4 = 4$.
- Un nombre précédé du signe $-$ est un nombre **négatif** : -3, $-0{,}7$.
- Le nombre 0 s'écrit sans signe.

Un **entier relatif** est un nombre relatif qui peut s'écrire sans virgule, comme -12 ou $+5$. Un **décimal relatif** peut avoir une virgule, comme $-3{,}25$. Tout entier relatif est aussi un décimal relatif.

Exemple : un relevé à Midelt

Un jour d'hiver à Midelt, on relève $-2{,}5$ °C à 6 h, 0 °C à 9 h et $+8$ °C à midi.

- $-2{,}5$ est un décimal relatif négatif. Écrit sans son signe, c'est $2{,}5$.
- 0 s'écrit sans signe.
- $+8$ est un entier relatif positif. On peut l'écrire simplement 8.

Vérifie : Trouve le bon nombre

Lequel de ces nombres est un entier relatif écrit avec le signe $-$?

A. $-0{,}5$
Faux.

$-0{,}5$ porte bien le signe $-$. Mais il ne peut pas s'écrire sans virgule : ce n'est pas un entier relatif.

B. -14

Juste.

-14 porte le signe $-$ et s'écrit sans virgule : c'est un entier relatif négatif.

C. $+3$

Faux.

$+3$ est bien un entier relatif, mais il porte le signe $+$.

D. 0

Faux.

0 est un entier, mais il s'écrit sans signe : il ne porte pas le signe $-$.

Correction

La bonne réponse est -14 : il porte le signe $-$, et il s'écrit sans virgule.

Les nombres opposés

Devine : Le plongeur et la mouette

Un plongeur est à l'altitude -6 m, sous la surface de la mer. Une mouette vole à l'altitude $+6$ m. Que remarques-tu sur ces deux nombres ?

A. Même nombre, signes contraires

Juste.

Les deux nombres s'écrivent avec 6. L'un a le signe $+$, l'autre le signe $-$.

B. Deux nombres égaux, de même valeur

Faux.

Ils ne sont pas égaux : -6 est au-dessous de zéro, $+6$ au-dessus.

C. Le même signe, des nombres différents

Faux.

Leurs signes sont différents : $-$ pour le plongeur, $+$ pour la mouette. Et le nombre 6 est le même.

Correction

Les altitudes -6 et $+6$ s'écrivent avec le même nombre, 6, et des signes contraires. On dit que ce sont des nombres **opposés**.

Définition : Nombres opposés

Deux nombres relatifs sont **opposés** lorsqu'ils s'écrivent avec le même nombre et des signes contraires.

- L'opposé de $+6$ est -6 ; l'opposé de $-2{,}4$ est $+2{,}4$.
- Par convention, l'opposé de 0 est 0.

Sur une droite graduée, deux nombres opposés différents de 0 sont placés de part et d'autre de 0, et 0 est au milieu des deux points.

Exemple : écrire un opposé

- L'opposé de -13 est $+13$.
- L'opposé de $+0{,}8$ est $-0{,}8$.
- L'opposé de $4{,}75$ est $-4{,}75$.

Pour écrire un opposé, on garde le nombre et on change seulement le signe.

La droite graduée

Méthode : placer des nombres sur une droite graduée

1. **Choisir une unité** : regarde le plus petit et le plus grand nombre à placer. Choisis une unité, par exemple 1 cm, qui les fait tenir sur ta feuille.
2. **Tracer la droite** et marquer le point 0, en laissant de la place des deux côtés. Reporte l'unité régulièrement de chaque côté de 0.
3. **Placer un positif** à droite de 0, en comptant autant d'unités que le nombre.
4. **Placer un négatif** à gauche de 0, en comptant autant d'unités que le nombre écrit sans son signe.

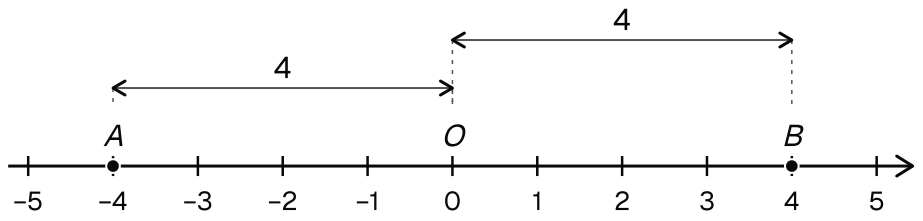
Exemple : une droite graduée sur ton cahier

Trace sur ton cahier une droite horizontale, et marque le point 0 au milieu. Prends 1 cm pour une unité. Fais cinq graduations à droite de 0, numérotées 1 à 5, et cinq à gauche, numérotées -1 à -5.

Marque ensuite trois points : le point 4 sur la quatrième graduation à droite de 0, le point -4 sur la quatrième graduation à gauche de 0, et le point 0 entre les deux.

Pour aller de 0 à 4, on compte 4 unités vers la droite. Pour aller de 0 à -4, on compte 4 unités vers la gauche.

Les points -4 et 4 sont donc à la même longueur de 0, chacun d'un côté : ce sont deux nombres opposés.



La droite graduée du cahier : le point A en −4 et le point B en 4 sont chacun à 4 unités du point O, de part et d'autre.

Vérifie : Deux points à placer

Sur ta droite graduée, place $-2{,}5$ et 3. De quel côté de 0 est chaque point ?

Indice 1
Le signe du nombre donne le côté de 0.
Indice 2
Le nombre écrit sans son signe donne le nombre d'unités à compter depuis 0.

Réponse

- $-2{,}5$ est négatif : il est à gauche de 0. On compte $2{,}5$ unités vers la gauche, à mi-chemin entre -3 et -2.
- 3 est positif : il est à droite de 0. On compte 3 unités vers la droite.

À toi

À toi : Signes et opposés

Pour chacun des nombres -7 ; $2{,}5$; 0 ; $-0{,}25$, donne son signe et son opposé. Lesquels sont des entiers relatifs ?

Indice 1
Le signe se lit devant le nombre. Le signe $+$ peut ne pas être écrit : $2{,}5 = +2{,}5$.
Indice 2
Pour l'opposé, garde le nombre et change seulement le signe : l'opposé de -7 est $+7$.
Indice 3
Point délicat : 0 s'écrit sans signe. Pour son opposé, relis l'encadré sur les nombres opposés.

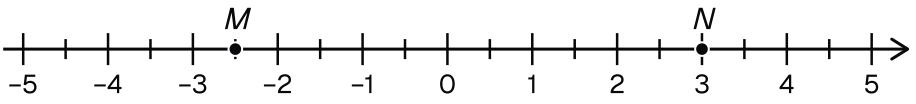
Réponse

- -7 est négatif ; son opposé est $+7$.
- $2{,}5$ est positif, avec un signe $+$ non écrit ; son opposé est $-2{,}5$.
- 0 s'écrit sans signe ; son opposé est 0.
- $-0{,}25$ est négatif ; son opposé est $0{,}25$.

Les entiers relatifs de la liste sont -7 et 0 : ils s'écrivent sans virgule.

À retenir

- Un nombre relatif s'écrit avec un signe et un nombre, sauf 0, qui s'écrit sans signe.
- Deux nombres opposés ont le même nombre et des signes contraires.
- Sur une droite graduée, les négatifs sont à gauche de 0 et les positifs à droite.



Correction de l'activité « Deux points à placer » : M en −2,5, à gauche de 0, et N en 3, à droite de 0.

Comparer et ranger

Le plus froid

Devine : Le sommet ou le village ?

Un matin de janvier, il fait -15 °C au sommet du Toubkal et -3 °C à Imlil, le village au pied de la montagne. Où fait-il le plus froid ?

A. Au sommet, à -15 °C

Juste.
Sur le thermomètre, -15 est plus bas que -3 : il fait plus froid au sommet.

B. À Imlil, à -3 °C

Faux.
Tu as comparé 3 et 15 sans regarder le signe. Sur le thermomètre, -3 est plus haut que -15 : il fait moins froid à Imlil.

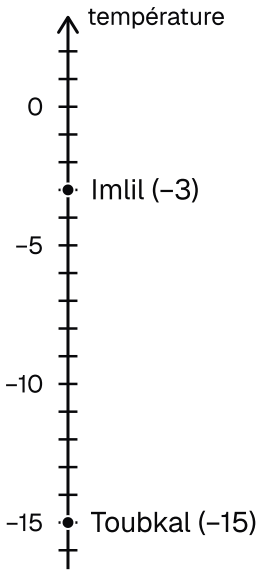
C. Il fait aussi froid aux deux endroits

Faux.
Les deux températures sont différentes : -15 et -3 ne sont pas le même nombre.

Correction
Il fait le plus froid au sommet. Sur le thermomètre, -15 est plus bas que -3 : il faut monter de 12 graduations pour aller de -15 à -3.

Sur un thermomètre, plus une température est basse, plus elle est petite.

Couche maintenant le thermomètre : le bas passe à gauche, le haut à droite. Tu obtiens une droite graduée, et les petits nombres sont à gauche.



Deux relevés d'un matin de janvier sur un même thermomètre : –15 au sommet du Toubkal, plus bas que –3 à Imlil.

L'ordre sur la droite graduée

Remarque : Rappel du primaire

Tu as vu à l'école primaire comment comparer deux décimaux positifs : $5{,}2 < 5{,}25$ et $12 > 9{,}8$. Le symbole $<$ se lit « inférieur à », le symbole $>$ se lit « supérieur à ». La pointe du symbole est tournée vers le plus petit nombre.

Définition : Ordre sur une droite graduée

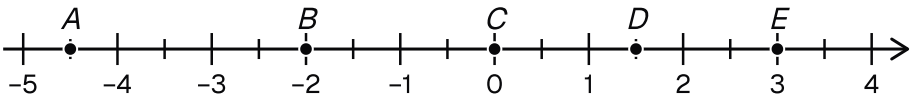
Sur une **droite graduée**, on place 0, puis les nombres positifs à droite de 0 et les nombres négatifs à gauche de 0, avec la même unité de longueur.

De deux nombres placés sur la droite graduée, le **plus petit** est celui qui est placé le plus à gauche. On écrit $-3 < 1$ (« -3 est inférieur à 1 ») ou $1 > -3$ (« 1 est supérieur à -3 »).

Exemple : cinq nombres sur ta droite

Trace sur ton cahier une droite graduée de -5 à 4, avec 1 cm pour une unité.

Place $-4{,}5$ à mi-chemin entre -5 et -4, puis -2 sur sa graduation. Place 0, puis $1{,}5$ à mi-chemin entre 1 et 2, et enfin 3 sur sa graduation.



Les cinq nombres de l'exemple sur une droite d'une unité par centimètre : de gauche à droite, A, B, C, D et E.

Exemple : lire la droite

Sur ta droite, $-4{,}5$ est le plus à gauche : c'est le plus petit des cinq nombres. En lisant de gauche à droite, on écrit : $-4{,}5 < -2 < 0 < 1{,}5 < 3$.

Comparer sans dessiner

Devine : Deux nombres négatifs

Sans dessiner de droite, compare -12 et -9.

A. $-12 > -9$

Faux.
Tu as comparé 12 et 9 en oubliant le signe. Sur la droite, -12 est à gauche de -9.

B. $-12 = -9$

Faux.
Ces deux nombres sont différents : ils ne sont pas placés au même endroit sur la droite.

C. $-12 < -9$

Juste.
Sur la droite graduée, -12 est à gauche de -9 : il est plus petit.

Correction
On a $-12 < -9$. Les deux nombres sont négatifs, et -12 est placé plus à gauche que -9 sur la droite graduée.

Propriété : Comparer deux nombres relatifs

- Un nombre négatif est inférieur à 0, et 0 est inférieur à un nombre positif. Donc un nombre négatif est **inférieur** à un nombre positif : $-5 < 2$.
- Deux nombres positifs se comparent comme au primaire : $3{,}7 < 4{,}1$.
- Deux nombres négatifs : le plus petit est celui qui, écrit **sans son signe**, est le plus grand. Comme $8 > 3$, on a $-8 < -3$.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. Tu l'as observé sur le thermomètre et sur la droite graduée : un nombre placé plus à gauche est plus petit.

Exemple : comparer

Compare $-6{,}3$ et $-6{,}8$. Les deux sont négatifs. Écrits sans leur signe, $6{,}8 > 6{,}3$. Donc $-6{,}8 < -6{,}3$.

Compare $-0{,}5$ et $0{,}2$. Un négatif est inférieur à un positif : $-0{,}5 < 0{,}2$.

Ranger des nombres

Méthode : ranger des nombres relatifs

1. **Trier** les nombres : d'un côté les négatifs, puis 0, puis les positifs.
2. **Ranger les positifs** comme à l'école primaire.
3. **Ranger les négatifs** : écris-les sans leur signe. Entre deux négatifs, le plus petit est celui qui a le plus grand nombre sans signe. Exemple : $-9 < -4$, car $9 > 4$.
4. **Écrire la suite** avec $<$ pour l'ordre croissant, ou avec $>$ pour l'ordre décroissant.

Exemple : l'ordre croissant

Range dans l'ordre croissant : 2 ; $-3{,}5$; 0 ; -1 ; $1{,}25$.

- Les négatifs sont $-3{,}5$ et -1. Comme $3{,}5 > 1$, on a $-3{,}5 < -1$.
- Les positifs se rangent comme au primaire : $1{,}25 < 2$.

Donc $-3{,}5 < -1 < 0 < 1{,}25 < 2$.

Attention : deux nombres négatifs

✗ $-7 > -2$, « parce que $7 > 2$ ».

✓ $-7 < -2$: sur la droite graduée, -7 est à gauche de -2. Pour deux négatifs, l'ordre des nombres écrits sans signe s'inverse.

En devoir

Remarque : Coin devoir : ranger des nombres

En devoir, un rangement se justifie avant d'être écrit. Voici une rédaction pour ranger 1 ; $-2{,}4$; $-2{,}04$; $0{,}5$ dans l'ordre décroissant.

« Les positifs : $1 > 0{,}5$. Les négatifs : $2{,}4 > 2{,}04$, donc $-2{,}04 > -2{,}4$. Un positif est supérieur à un négatif. Donc $1 > 0{,}5 > -2{,}04 > -2{,}4$. »

À toi : Les températures d'Imilchil

Le club scientifique d'un collège mesure les températures au centième de degré. Range dans l'ordre croissant ses relevés d'une nuit d'hiver, dans six villages autour d'Imilchil : $-1{,}5$; 3 ; -4 ; 0 ; $-1{,}05$; $2{,}5$.

Indice 1
Commence par trier : les négatifs, puis 0, puis les positifs.
Indice 2
Les négatifs sont $-1{,}5$, -4 et $-1{,}05$. Écris-les sans signe et compare $1{,}5$, 4 et $1{,}05$.
Indice 3
Point délicat : $1{,}05 < 1{,}5$, donc $-1{,}05$ est plus grand que $-1{,}5$.

Réponse
Les négatifs : $4 > 1{,}5 > 1{,}05$, donc $-4 < -1{,}5 < -1{,}05$. Les positifs : $2{,}5 < 3$.

Rangement : $-4 < -1{,}5 < -1{,}05 < 0 < 2{,}5 < 3$.

Additionner deux nombres relatifs

Gains et pertes

Devine : Deux coups de suite

Dans un jeu de société, Salma perd 3 points, puis elle perd encore 5 points. Quel est le bilan de ces deux coups ?

A. Un gain de 8 points
Faux.
Salma n'a rien gagné : elle a perdu deux fois.

B. Une perte de 2 points
Faux.
Tu as calculé $5 - 3$. Mais deux pertes s'ajoutent : elles ne se compensent pas.

C. Un gain de 2 points
Faux.
Salma n'a gagné aucun point : ses deux coups sont des pertes.

D. Une perte de 8 points
Juste.

Deux pertes s'ajoutent : $3 + 5 = 8$. Le bilan est une perte de 8 points.

Correction
Le bilan est une perte de 8 points. Une perte de 3, puis une perte de 5, font une perte de $3 + 5 = 8$ points.

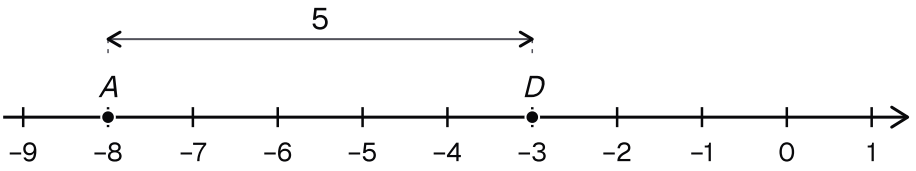
Une perte de 3 points s'écrit -3. Une perte de 5 points s'écrit -5. Un gain s'écrirait avec le signe $+$.

Le bilan des deux coups de Salma s'écrit donc $(-3) + (-5)$. On met les nombres relatifs entre parenthèses : ainsi, deux signes ne se touchent jamais.

Deux nombres de même signe

Sur une droite graduée, ajouter un nombre positif, c'est avancer vers la droite. Ajouter un nombre négatif, c'est reculer vers la gauche.

Pour $(-3) + (-5)$, tu pars de -3 et tu recules de 5 unités. Tu arrives à -8.



Le calcul (–3) + (–5) sur la droite : on part du point D, en –3, et on recule de 5 unités jusqu'au point A, en –8.

Propriété : Somme de deux nombres de même signe

Pour additionner deux nombres relatifs de **même signe** :

- on garde leur signe commun ;
- on additionne les nombres écrits sans leur signe.

Exemples : $(+2{,}5) + (+4) = +6{,}5$ et $(-3) + (-7) = -10$.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. Tu l'as observé avec les points du jeu : deux pertes s'ajoutent et font une perte plus grande. Tu peux aussi le contrôler sur une droite graduée, en reculant deux fois vers la gauche.

Exemple : même signe

$(+1{,}5) + (+2{,}25) = +3{,}75$: même signe $+$, et $1{,}5 + 2{,}25 = 3{,}75$.

$(-12) + (-0{,}5) = -12{,}5$: même signe $-$, et $12 + 0{,}5 = 12{,}5$.

Deux nombres de signes contraires

Devine : Un gain et une perte

Hamza gagne 7 points, puis il en perd 10. Quel est le bilan $(+7) + (-10)$?

A. $+3$

Faux.

Hamza a perdu plus de points qu'il n'en a gagné : son bilan est négatif.

B. -3

Juste.

La perte de 10 dépasse le gain de 7 de 3 points : $10 - 7 = 3$. Hamza est en perte.

C. -17

Faux.

Tu as ajouté 7 et 10. Mais un gain et une perte se compensent en partie : on soustrait.

D. $+17$

Faux.

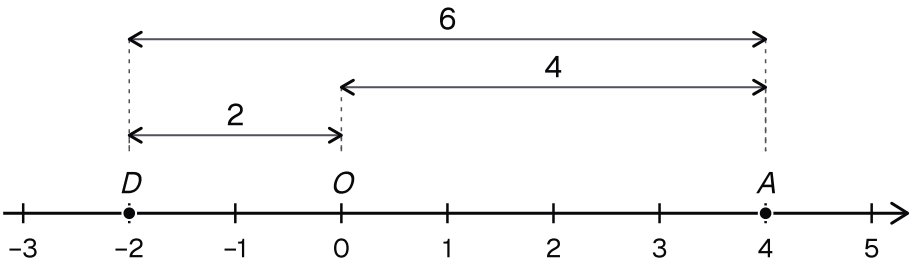
Un gain de 7 et une perte de 10 ne peuvent pas donner un gain de 17.

Correction

On a $(+7) + (-10) = -3$. Le gain de 7 points compense 7 des 10 points perdus : il reste une perte de 3 points.

Calcule $(-2) + (+6)$ avec la droite graduée. Tu pars de -2 et tu avances de 6 unités vers la droite.

Après 2 unités, tu es en 0. Il reste 4 unités à avancer : tu arrives à 4. Donc $(-2) + (+6) = 4$.



Le calcul (–2) + (+6) : depuis le point D, en –2, on avance de 2 unités jusqu'au point O, puis de 4 unités jusqu'au point A, en 4.

Propriété : Somme de deux nombres de signes contraires

Pour additionner deux nombres relatifs de **signes contraires** :

- on prend le signe de celui qui, écrit sans son signe, est le plus grand ;
- on soustrait le plus petit nombre écrit sans signe du plus grand.

Exemples : $(-9)+(+4)=-5$ et $(+7{,}2)+(-1{,}2)=+6$.

Si les deux nombres écrits sans signe sont égaux, les deux nombres sont opposés, et leur somme est égale à 0 : $(-6)+(+6)=0$.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. Tu l'as observé avec un gain et une perte : ils se compensent en partie, et le plus grand des deux l'emporte. Le cas de deux nombres opposés se contrôle sur l'exemple qui suit.

Exemple : signes contraires

$(-15)+(+6)$: sans signe, $15>6$. Le résultat prend le signe de -15, et $15-6=9$. Donc $(-15)+(+6)=-9$.

$(+3{,}2)+(-0{,}7)=+2{,}5$, car $3{,}2>0{,}7$ et $3{,}2-0{,}7=2{,}5$.

$(+4{,}5)+(-4{,}5)=0$: ces deux nombres sont opposés.

La méthode

Méthode : additionner deux nombres relatifs

1. **Regarder les signes** des deux nombres.
2. **Même signe** : le résultat a ce signe. Additionne les deux nombres écrits sans signe.
3. **Signes contraires** : cherche le nombre le plus grand, sans tenir compte des signes. Le résultat a **son signe**. Pour trouver le nombre, retire le petit du grand.
4. **Signes contraires, même nombre sans signe** : les deux nombres sont opposés, et le résultat est 0.
5. **Contrôler** avec une histoire de gains et de pertes.

Trouve l'erreur : Un seul calcul faux

Yassine a fait quatre additions. Une seule est fausse. Laquelle ?

A. $(-8)+(-2)=-10$

Faux.
Ce calcul est juste : même signe $-$, et $8 + 2 = 10$.

B. $(+8) + (-2) = +6$
Faux.
Ce calcul est juste : signes contraires, $8 > 2$, et $8 - 2 = 6$.

C. $(-8) + (+2) = -10$
Juste.
C'est l'erreur : les signes sont contraires, il faut soustraire. Comme $8 - 2 = 6$, on a $(-8) + (+2) = -6$.

D. $(-2) + (+8) = +6$
Faux.
Ce calcul est juste : signes contraires, $8 > 2$, et le résultat prend le signe de $+8$.

Correction
Le calcul faux est le troisième. Les signes sont contraires : on soustrait, $8 - 2 = 6$, et on garde le signe de -8. Donc $(-8) + (+2) = -6$.

Le piège, puis à toi

Attention : regarder les signes

✗ $(+5) + (-9) = -14$.

✓ $(+5) + (-9) = -4$. Les signes sont contraires : on ne fait pas $5 + 9$. On soustrait, $9 - 5 = 4$, et on garde le signe de -9.

À toi : Quatre additions

Calcule : a) $(-6{,}5) + (-1{,}5)$; b) $(+2{,}4) + (-6)$; c) $(-11) + (+11)$; d) $(-0{,}8) + (+3)$.

Indice 1
Pour chaque calcul, regarde d'abord les signes : même signe, ou signes contraires ?
Indice 2
En b), $6 > 2{,}4$: le résultat prend le signe de -6, puis on calcule $6 - 2{,}4$.
Indice 3
Point délicat : en c), les deux nombres sont opposés.

Réponse
- a) Même signe : $(-6{,}5) + (-1{,}5) = -8$, car $6{,}5 + 1{,}5 = 8$.
- b) Signes contraires : $(+2{,}4) + (-6) = -3{,}6$, car $6 - 2{,}4 = 3{,}6$.
- c) Deux opposés : $(-11) + (+11) = 0$.

- d) Signes contraires : $(-0{,}8) + (+3) = +2{,}2$, car $3 - 0{,}8 = 2{,}2$.

Soustraire, c'est ajouter l'opposé

Un écart de températures

Devine : Entre midi et minuit

À Azrou, il fait $+5$ °C à midi et -2 °C à minuit. Quel est l'écart entre ces deux températures ?

A. 3 degrés

Faux.
Tu as calculé $5 - 2$ sans regarder le signe de -2. Il faut descendre jusqu'à 0, puis encore au-dessous.

B. -7 degrés

Faux.
Un écart entre deux températures se compte en degrés, sans signe $-$.

C. -3 degrés

Faux.
Un écart se compte sans signe $-$. Tu as calculé $5 - 2$, puis ajouté un signe $-$: il faut descendre jusqu'à 0, puis encore au-dessous.

D. 7 degrés

Juste.
De -2 à 0, il y a 2 degrés ; de 0 à $+5$, il y a 5 degrés. En tout, $2 + 5 = 7$.

Correction
L'écart est de 7 degrés : 2 degrés entre -2 et 0, puis 5 degrés entre 0 et $+5$.

L'écart, c'est le nombre qu'il faut ajouter à la température la plus basse pour obtenir la plus haute.

Par exemple, pour passer de -3 °C à $+1$ °C, il faut ajouter 4 degrés : $(-3) + (+4) = +1$. On va écrire ce calcul comme une différence : $(+1) - (-3) = +4$.

La différence

Définition : Différence de deux nombres relatifs

Soit a et b deux nombres relatifs. La **différence** $a - b$ est le nombre qu'il faut ajouter à b pour obtenir a :

$$b + (a - b) = a.$$

Exemple : $2 - 5 = -3$, car $5 + (-3) = 2$.

Exemple : une différence

Pour calculer $(-2)-(-9)$, on cherche ce qu'il faut ajouter à -9 pour arriver à -2.

Depuis -9, on avance de 7 unités jusqu'à -2. Donc $(-2)-(-9)=7$, car $(-9)+7=-2$.

Ajouter l'opposé

Devine : Deux calculs à comparer

Pour calculer $(+4)-(+6)$, on cherche le nombre à ajouter à 6 pour obtenir 4. Quel est ce nombre ?

Compare-le au résultat de $(+4)+(-6)$. Que remarques-tu ?

A. Ils donnent tous les deux -2

Juste.
Pour $(+4)-(+6)$, il faut ajouter -2 à 6 pour obtenir 4. Et $(+4)+(-6)=-2$ aussi.

B. Le premier vaut 2, le second -2

Faux.
On cherche le nombre à ajouter à 6 pour obtenir 4 : c'est -2, et non 2, car $6+2=8$.

C. Le premier vaut -2, le second -10

Faux.
Pour $(+4)+(-6)$, les signes sont contraires : on soustrait, $6-4=2$, et le résultat est -2.

Indice 1
Idée : de 6 à 4, tu recules de 2 unités. Le nombre à ajouter est-il positif ou négatif ?

Correction
Les deux calculs donnent -2. En effet, $6+(-2)=4$, donc $(+4)-(+6)=-2$. Et $(+4)+(-6)=-2$: soustraire $+6$ revient à ajouter -6.

Propriété : Soustraire, c'est ajouter l'opposé

Soit a et b deux nombres relatifs. Soustraire b, c'est ajouter l'opposé de b :

$$a-b=a+(-b).$$

Exemples : $(+3)-(+8)=(+3)+(-8)=-5$ et $(-4)-(-6)=(-4)+(+6)=+2$.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. Tu l'as observé sur un exemple : soustraire $+6$ ou ajouter -6 donne le même résultat. Tu peux le contrôler sur le premier exemple qui suit : on ajoute le résultat au nombre soustrait.

Exemple : ajouter l'opposé

- $(-5) - (+3) = (-5) + (-3) = -8$. Contrôle : $(+3) + (-8) = -5$, le premier nombre.
- $(+2{,}5) - (-1{,}5) = (+2{,}5) + (+1{,}5) = +4$.
- $0 - (-7) = 0 + (+7) = 7$.

La méthode

Méthode : calculer une différence

1. **Transformer** : remplace la soustraction par une addition, et le nombre soustrait par son opposé.
2. **Additionner** avec la règle d'addition de deux nombres relatifs.
3. **Vérifier** : ajoute le résultat au nombre soustrait. Tu dois retrouver le premier nombre.

Exemple : calculer et vérifier

Calcule $(-3{,}5) - (+6)$.

1. On transforme : soustraire $+6$, c'est ajouter -6.
2. Les deux nombres ont le même signe $-$: on additionne $3{,}5$ et 6.

$$\begin{aligned}&(-3{,}5) - (+6)\\ &= (-3{,}5) + (-6)\\ &= -9{,}5\end{aligned}$$

On vérifie : $(+6) + (-9{,}5) = -3{,}5$. C'est bien le premier nombre.

Deux pièges

Attention : l'opposé du nombre soustrait

✗ $8 - (-2) = 8 + (-2)$.

✓ $8 - (-2) = 8 + (+2) = 10$. On ajoute l'**opposé** du nombre soustrait, et l'opposé de -2 est $+2$.

Attention : l'ordre dans une différence

✗ $2 - 9 = 7$.

✓ $2 - 9 = 2 + (-9) = -7$. Dans une différence, on ne peut pas échanger les deux nombres : $9 - 2 = 7$, mais $2 - 9 = -7$.

La calculatrice, puis à toi

Méthode : la calculatrice et les nombres négatifs

1. **Repérer la touche du signe**, notée $(-)$. Elle est différente de la touche de la soustraction.
2. **Taper un nombre négatif** : la touche $(-)$, puis le nombre. Pour -4, tape $(-)$ puis 4.
3. **Mettre des parenthèses** autour d'un nombre négatif qui suit un signe d'opération.
4. **Contrôler le signe** du résultat par un calcul de tête.

Attention : la touche du signe

✗ Pour calculer $-4 + 9$, Nadia commence par la touche de la soustraction. La calculatrice peut afficher une erreur, ou retirer 4 du résultat précédent.

✓ Nadia tape $(-)$, puis 4, puis $+9$. L'écran affiche 5. De tête : signes contraires, $9 > 4$, donc le résultat est positif.

À toi : Quatre différences

Calcule, puis vérifie : a) $(-7) - (+5)$; b) $(+1{,}5) - (-2{,}5)$; c) $(-6) - (-6)$; d) $3 - 10$.

Indice 1
Transforme chaque soustraction en addition de l'opposé du nombre soustrait.
Indice 2
En a), l'opposé de $+5$ est -5 : $(-7) - (+5) = (-7) + (-5)$.
Indice 3
Point délicat : en d), $3 - 10$ n'est pas $10 - 3$. Écris $3 + (-10)$.

Réponse

- a) $(-7) - (+5) = (-7) + (-5) = -12$. Vérification : $(+5) + (-12) = -7$.
- b) $(+1{,}5) - (-2{,}5) = (+1{,}5) + (+2{,}5) = 4$. Vérification : $(-2{,}5) + 4 = 1{,}5$.
- c) $(-6) - (-6) = (-6) + (+6) = 0$. Vérification : $(-6) + 0 = -6$.
- d) $3 - 10 = 3 + (-10) = -7$. Vérification : $10 + (-7) = 3$.

Sommes algébriques et parenthèses

Le compte de l'épicerie

Devine : Le compte de la semaine

Le compte de l'épicerie du quartier est à 0 dirham dimanche soir.

Lundi, l'épicier reçoit 120 dirhams. Mardi, il paie une facture de 75 dirhams.

Mercredi, il reçoit 40 dirhams. Jeudi, il paie 90 dirhams. Où en est le compte jeudi soir ?

A. À $+5$ dirhams

Faux.

Le signe ne va pas : l'épicier a payé 165 dirhams et n'en a reçu que 160.

B. À 325 dirhams

Faux.

Tu as ajouté toutes les sommes. Mais une facture payée fait baisser le compte.

C. À -5 dirhams

Juste.

Reçu : $120 + 40 = 160$. Payé : $75 + 90 = 165$. Il manque 5 dirhams : le compte est à -5.

Correction

Le compte est à -5 dirhams jeudi soir. L'épicier a reçu 160 dirhams et payé 165 dirhams.

On écrit chaque mouvement du compte avec son signe : $(+120) + (-75) + (+40) + (-90)$.

C'est une suite d'additions de nombres relatifs. On peut l'écrire plus simplement : $120 - 75 + 40 - 90$.

Écrire simplement

Définition : Somme algébrique

Une **somme algébrique** est une suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs, comme $(-5) + (+3) - (-2)$.

Pour l'**écrire simplement**, on transforme chaque soustraction en addition de l'opposé, puis on supprime les signes d'addition et les parenthèses : chaque nombre garde son signe. Ainsi $(-5) + (+3) - (-2) = (-5) + (+3) + (+2)$ s'écrit $-5 + 3 + 2$.

Les nombres -5, 3 et 2 sont les **termes** de la somme algébrique.

Exemple : écriture simplifiée

On a $(+8) - (+3) + (-6) = (+8) + (-3) + (-6)$, qui s'écrit simplement $8 - 3 - 6$. Ses termes sont 8, -3 et -6.

De même, $(-1{,}5)+(+4)-(-2)=(-1{,}5)+(+4)+(+2)$, qui s'écrit $-1{,}5+4+2$.

Vérifie : La bonne écriture

Quelle est l'écriture simplifiée de $(-4)-(-7)+(-1)$?

A. $-4-7-1$

Faux.
Tu as oublié de prendre l'opposé de -7 : soustraire -7, c'est ajouter $+7$.

B. $-4+7-1$

Juste.
On écrit $(-4)+(+7)+(-1)$, puis on garde chaque signe : $-4+7-1$.

C. $4+7-1$

Faux.
Le premier terme est -4 : son signe $-$ doit rester.

D. $-4-7+1$

Faux.
Seul le nombre soustrait, -7, change de signe. Le terme -1 garde le sien.

Correction
On a $(-4)-(-7)+(-1)=(-4)+(+7)+(-1)$, qui s'écrit simplement $-4+7-1$. Cette somme vaut 2.

Calculer en regroupant

Méthode : calculer une somme algébrique

1. **Écrire simplement** : transforme chaque soustraction en addition de l'opposé, puis efface les parenthèses et les signes d'addition. Chaque nombre garde son signe.
2. **Regrouper** : tu peux changer les nombres de place, mais chaque nombre garde son signe quand il change de place. Mets les positifs ensemble, puis les négatifs.
3. **Rayer** deux termes opposés : leur somme vaut 0.
4. **Additionner** les positifs, puis les négatifs, puis les deux résultats.

Exemple : regrouper les termes

Calcule $A=150-60+35-80$.

- Les positifs : $150+35=185$.

- Les négatifs : $-60 - 80 = -140$.

Donc $A = 185 - 140 = 45$.

Exemple : rayer des opposés

Calcule $B = -3{,}5 + 7 + 3{,}5 - 2 - 7$.

On raye $-3{,}5$ et $3{,}5$, qui sont opposés. On raye aussi 7 et -7.

Il reste $B = -2$.

Des parenthèses

Devine : Sans la parenthèse

Tu sais déjà qu'on calcule d'abord ce qui est entre parenthèses : $10 - (3 + 2) = 10 - 5 = 5$.

Quelle écriture sans parenthèses donne aussi 5 ?

A. $10 - 3 - 2$
Juste.
On a $10 - 3 - 2 = 7 - 2 = 5$: c'est le bon résultat. On retire 3, puis on retire 2.

B. $10 - 3 + 2$
Faux.
On a $10 - 3 + 2 = 9$: on a retiré 3, mais ajouté 2 au lieu de le retirer.

C. $10 + 3 + 2$
Faux.
On a $10 + 3 + 2 = 15$: on a ajouté ce qu'il fallait retirer.

Correction
On a $10 - 3 - 2 = 5$. Retirer $3 + 2$, c'est retirer 3, puis retirer 2.

Exemple : une parenthèse avec un terme négatif

Calcule $10 - (6 - 2)$. D'abord la parenthèse : $6 - 2 = 4$, donc $10 - 4 = 6$.

Maintenant, retire la parenthèse. Si tu écris $10 - 6 - 2 = 2$, tu ne trouves pas 6. Avec $10 - 6 + 2 = 6$, tu retrouves le bon résultat.

Le signe de 2 a donc changé.

Propriété : Supprimer des parenthèses

- Des parenthèses précédées du signe $+$ peuvent être supprimées **sans changer** les signes des termes qu'elles contiennent :

$$7 + (-2 + 5) = 7 - 2 + 5.$$

- Des parenthèses précédées du signe $-$ peuvent être supprimées en **changeant le signe de chaque terme** qu'elles contiennent :

$$7 - (-2 + 5) = 7 + 2 - 5.$$

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. Tu l'as observé sur deux exemples où la parenthèse est précédée du signe $-$: on trouve le même résultat avec ou sans elle. Le cas du signe $+$ se contrôle sur l'exemple qui suit.

Exemple : supprimer des parenthèses

- Signe $+$ devant : on recopie. $4 + (-6 + 1) = 4 - 6 + 1 = -1$.
- Signe $-$ devant : on change chaque signe. $4 - (-6 + 1) = 4 + 6 - 1 = 9$.
- Contrôle par la parenthèse : $-6 + 1 = -5$, puis $4 + (-5) = -1$ et $4 - (-5) = 9$.

La parenthèse peut aussi se trouver au début, précédée du signe $-$: $-(4 - 11) + 2 = -4 + 11 + 2 = 9$.

Contrôle : $4 - 11 = -7$, son opposé est 7, et $7 + 2 = 9$.

La méthode et le piège

Méthode : supprimer des parenthèses

1. **Lire le signe** placé juste devant la parenthèse.
2. **Recopier** les termes tels quels si ce signe est $+$.
3. **Changer tous les signes** des termes si ce signe est $-$, du premier au dernier.
4. **Calculer** la somme algébrique obtenue.

Attention : un signe oublié

✗ $9 - (5 - 2) = 9 - 5 - 2$.

✓ $9 - (5 - 2) = 9 - 5 + 2 = 6$. Le signe $-$ devant la parenthèse change le signe de **chaque** terme, le dernier aussi.

Contrôle : $5 - 2 = 3$ et $9 - 3 = 6$.

À toi, puis en devoir

À toi : Une somme avec parenthèse

Calcule $D = -7 + 4{,}5 - (2 - 9) - 4{,}5$.

Indice 1
Commence par supprimer la parenthèse : quel signe la précède ?
Indice 2
La parenthèse est précédée du signe $-$: $-(2 - 9)$ devient $-2 + 9$.
Indice 3
Point délicat : le signe de -9 change aussi, il devient $+9$. Ensuite, raye deux termes opposés.

Réponse
La parenthèse est précédée du signe $-$: chacun de ses termes change de signe.

$$\begin{aligned} D = &-7 + 4{,}5 - 2 \\ &+ 9 - 4{,}5 \end{aligned}$$

On raye $4{,}5$ et $-4{,}5$, qui sont opposés : $D = -7 - 2 + 9$.

Donc $D = -9 + 9 = 0$.

Remarque : Coin devoir : calculer une somme algébrique

En devoir, chaque ligne fait une seule transformation, et on dit laquelle. Voici le calcul de $C = 6 - (8 - 3{,}5) + (-2)$.

1. On supprime la parenthèse précédée du signe $-$.
2. On écrit simplement le dernier terme : $+(-2)$ devient -2.
3. On regroupe les positifs, puis les négatifs.

$$\begin{aligned} C &= 6 - 8 + 3{,}5 + (-2) \\ &= 6 - 8 + 3{,}5 - 2 \\ &= 6 + 3{,}5 - 8 - 2 \end{aligned}$$

La copie se termine par le résultat : « Donc $C = 9{,}5 - 10 = -0{,}5$. »

Égalités, addition et soustraction

La balance

Devine : Un poids de chaque côté

Au souk, une balance est en équilibre : un melon d'un côté, des poids de 2 kg en tout de l'autre. Le marchand pose un poids de $0{,}5$ kg sur chaque plateau. Que fait la balance ?

A. Elle reste en équilibre

Juste.
On a ajouté la même masse des deux côtés : chaque plateau porte maintenant $2{,}5$ kg.

B. Elle penche du côté du melon

Faux.
Le melon reçoit $0{,}5$ kg, mais l'autre plateau aussi : rien ne change entre les deux côtés.

C. Elle penche du côté des poids

Faux.
Les poids reçoivent $0{,}5$ kg, mais le melon aussi : l'équilibre reste.

Correction
La balance reste en équilibre. Le melon pèse 2 kg, et chaque plateau porte maintenant $2 + 0{,}5 = 2{,}5$ kg.

Une égalité ressemble à une balance en équilibre. Ses deux **membres** sont de part et d'autre du signe $=$.

Dans l'égalité $3 + 2 = 5$, le membre de gauche est $3 + 2$, et le membre de droite est 5.

Ajouter le même nombre

Exemple : ajouter aux deux membres

Pars de l'égalité $-4 + 6 = 2$. Ajoute -3 à chaque membre.

À gauche : $-4 + 6 + (-3) = -1$. À droite : $2 + (-3) = -1$. Les deux membres restent égaux.

Propriété : Égalité, addition et soustraction

Soit a, b et c des nombres relatifs. Si $a = b$, alors :

$$a + c = b + c \quad \text{et} \quad a - c = b - c.$$

On peut donc ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une égalité : on obtient encore une égalité.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. Tu l'as observé avec la balance, puis sur l'égalité $-4 + 6 = 2$: ajouter le même nombre aux deux membres garde l'égalité. Soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé : le cas de la soustraction revient au même.

Exemple : le nombre manquant

Les points ... remplacent le nombre qu'on cherche. Quel nombre faut-il ajouter à -3 pour obtenir 5 ? On écrit $-3 + \ldots = 5$.

On ajoute 3 aux deux membres : $-3 + \ldots + 3 = 5 + 3$.

À gauche, -3 et 3 s'annulent, car leur somme vaut 0. Il reste le nombre cherché : $\ldots = 8$.

Vérification : $-3 + 8 = 5$.

Exemple : le bus

Dans le bus de la ligne 12, à Rabat, 5 voyageurs descendent à un arrêt. Il en reste alors 23.

Combien y en avait-il avant l'arrêt ? On écrit $\ldots - 5 = 23$. On ajoute 5 aux deux membres : $\ldots = 23 + 5 = 28$.

Il y avait 28 voyageurs avant l'arrêt.

À toi

Vérifie : Le nombre caché

Complète l'égalité $\ldots + 6{,}5 = 2$. Quel nombre manque ?

A. $4{,}5$

Faux.

Avec $4{,}5$, on obtient $4{,}5 + 6{,}5 = 11$, et non 2.

B. $8{,}5$

Faux.

Avec $8{,}5$, on obtient $8{,}5 + 6{,}5 = 15$. Il fallait retirer $6{,}5$ aux deux membres, pas l'ajouter.

C. $-8{,}5$

Faux.

Avec $-8{,}5$, on obtient $(-8{,}5) + 6{,}5 = -2$, et non 2.

D. $-4{,}5$

Juste.

On retire $6{,}5$ aux deux membres : $2 - 6{,}5 = -4{,}5$. Vérification : $(-4{,}5) + 6{,}5 = 2$.

Correction

Le nombre caché est $-4{,}5$. On soustrait $6{,}5$ aux deux membres : $2 - 6{,}5 = 2 + (-6{,}5) = -4{,}5$.

À toi : Trois égalités à compléter

Complète chaque égalité, puis vérifie : a) $\ldots + (-4) = -10$; b) $\ldots - 2{,}5 = 1$; c) $7 + \ldots = -1$.

Indice 1
Pour faire disparaître un terme d'un membre, ajoute son opposé aux deux membres.
Indice 2
En a), ajoute $+4$ aux deux membres : $-10 + 4 = -6$.
Indice 3
Point délicat : en b), on retire $2{,}5$. Pour le faire disparaître, ajoute $2{,}5$ aux deux membres.

Réponse
- a) $\ldots = -10 + 4 = -6$. Vérification : $(-6) + (-4) = -10$.
- b) $\ldots = 1 + 2{,}5 = 3{,}5$. Vérification : $3{,}5 - 2{,}5 = 1$.
- c) On ajoute -7 aux deux membres : $\ldots = -1 + (-7)$, donc $\ldots = -8$. Vérification : $7 + (-8) = -1$.

Ce que tu sais faire

La carte du chapitre.

- **Comparer** : un négatif est inférieur à un positif. Entre deux négatifs, le plus petit a le plus grand nombre sans signe : $-9{,}5 < -9$.
- **Additionner, même signe** : $(-2) + (-4{,}5) = -6{,}5$.
- **Additionner, signes contraires** : $(+3) + (-8) = -5$.
- **Soustraire** : $(-1) - (-6) = (-1) + (+6) = 5$.
- **Parenthèses** : $2 - (4 - 7) = 2 - 4 + 7 = 5$.
- **Égalité** : si $\ldots + 2 = -3$, alors $\ldots = -5$.

Défi final. Voici les températures relevées à 6 h, une semaine de janvier, à l'Oukaïmeden.

Lundi $-3{,}5$ °C ; mardi -6 °C ; mercredi -1 °C ; jeudi 2 °C ; vendredi $-0{,}5$ °C ; samedi $-6{,}5$ °C ; dimanche $1{,}5$ °C.

Vérifie : Le jour le plus froid

Quel jour a-t-il fait le plus froid ?

A. Le mardi, à -6 °C
Faux.
-6 est négatif, mais $-6{,}5 < -6$: samedi a été plus froid.

B. Le samedi, à $-6{,}5$ °C
Juste.

Parmi les négatifs, $6{,}5$ est le plus grand nombre sans signe : $-6{,}5$ est la plus basse température.

C. Le lundi, à $-3{,}5$ °C

Faux.
Mardi et samedi ont été plus froids : $-6 < -3{,}5$.

D. Le dimanche, à $1{,}5$ °C

Faux.
$1{,}5$ est positif : il a fait plus doux que tous les jours négatifs.

Correction
Samedi, à $-6{,}5$ °C. Les deux plus basses températures sont -6 et $-6{,}5$; comme $6{,}5 > 6$, on a $-6{,}5 < -6$.

Vérifie : Ranger et calculer l'écart

Range les sept températures dans l'ordre croissant. Puis calcule l'écart entre la plus haute et la plus basse.

Indice 1
Trie d'abord : cinq températures négatives, puis deux positives.
Indice 2
L'écart est la différence entre la plus haute et la plus basse : $2 - (-6{,}5)$.

Réponse
$-6{,}5 < -6 < -3{,}5 < -1 < -0{,}5 < 1{,}5 < 2$.

L'écart vaut $2 - (-6{,}5) = 2 + 6{,}5 = 8{,}5$.

Entre le matin le plus froid et le plus doux, il y a $8{,}5$ degrés.

Vérifie : La hausse de lundi

Lundi, la température passe de $-3{,}5$ °C à 6 h à $+4$ °C à midi. De combien a-t-elle monté ?

A. De $0{,}5$ degré

Faux.
Tu as calculé $4 - 3{,}5$ sans regarder le signe de $-3{,}5$.

B. De $-7{,}5$ degrés

Faux.
La température a monté : la hausse ne s'écrit pas avec un nombre négatif.

C. De $7{,}5$ degrés

Juste.
La hausse est $4 - (-3{,}5) = 4 + 3{,}5 = 7{,}5$.

D. De 4 degrés

Faux.

C'est seulement la montée de 0 à $+4$. Il faut ajouter les $3{,}5$ degrés entre $-3{,}5$ et 0.

Correction

La température a monté de $7{,}5$ degrés : $4 - (-3{,}5) = 4 + (+3{,}5) = 7{,}5$.

Remarque : Coin devoir : répondre par une phrase

En devoir, un problème se résout en trois temps : on écrit le calcul avec des nombres relatifs, on calcule, puis on répond par une phrase.

Exemple : une plongeuse est à l'altitude $-14{,}5$ m. Elle remonte de 6 m.

« Nouvelle altitude : $(-14{,}5) + (+6) = -8{,}5$. La plongeuse est à $8{,}5$ m sous la surface de la mer. »

Fais le point. Relis la liste et coche ce que tu sais faire.

- Écrire un nombre relatif, son signe et son opposé.
- Placer des nombres sur une droite graduée.
- Comparer et ranger des nombres relatifs.
- Additionner et soustraire deux nombres relatifs.
- Écrire simplement une somme algébrique et supprimer des parenthèses.
- Compléter une égalité en ajoutant le même nombre aux deux membres.

Tu sais maintenant calculer avec des nombres au-dessous de zéro. Si une règle t'échappe, reviens au thermomètre ou à la droite graduée : ils montrent chaque calcul.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Les nombres décimaux relatifs : ordre, addition et soustraction » (1ac · general · mathematiques)