BURHAN

Résumé (Les nombres décimaux relatifs : multiplication, division et puissances)

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/nombres-relatifs-multiplication-et-division/resume

Chapitre	Semestre
Les nombres décimaux relatifs : multiplication, division et puissances	Semestre 1

Multiplier deux nombres relatifs

À retenir : Rappel : signe et nombre écrit sans son signe

Un nombre relatif non nul a un **signe**, $+$ ou $-$. Par exemple, $-3{,}7$ a le signe $-$; écrit sans son signe, c'est $3{,}7$.

Les nombres $-3{,}7$ et $3{,}7$ sont **opposés** : seul leur signe change.

Propriété : Produit de deux nombres relatifs

Pour multiplier deux nombres décimaux relatifs non nuls :

- on multiplie les deux nombres écrits sans leur signe ;
- on donne au résultat le signe $+$ si les deux nombres ont **le même signe**, et le signe $-$ s'ils sont **de signes contraires**.

C'est la **règle des signes** : le produit de deux nombres de même signe est positif ; le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

Pour tout nombre relatif a : $a \times 0 = 0$, $a \times 1 = a$ et $a \times (-1) = -a$, l'opposé de a.

Remarque : Une règle admise

La règle des signes du produit est admise : tu l'as observée sur des exemples, sans la démontrer.

Exemple : Deux produits

- $(-1{,}6) \times (-35)$: les deux facteurs sont négatifs, le produit est positif. On calcule $1{,}6 \times 35 = 56$, donc $(-1{,}6) \times (-35) = 56$.
- $2{,}4 \times (-15)$: les signes sont contraires, le produit est négatif. On calcule $2{,}4 \times 15 = 36$, donc $2{,}4 \times (-15) = -36$.

Méthode : Calculer un produit de deux nombres relatifs

1. **Le signe** : même signe, produit positif ; signes contraires, produit négatif.
2. **Les nombres sans signe** : effectue leur produit, comme pour deux nombres positifs.
3. **La réponse** : place devant ce produit le signe trouvé. Ainsi $(-0{,}3) \times 70 = -21$.

Attention : Somme ou produit : deux règles différentes

La règle des signes vaut pour les **produits** et les **quotients**. Elle ne vaut pas pour les sommes.

Ainsi $(-6) \times (-8) = 48$, mais $(-6) + (-8) = -14$.

Regarde toujours le signe de l'opération avant de calculer.

Plusieurs facteurs ; calculer une expression

Propriété : Produit de plusieurs nombres relatifs

On considère un produit de plusieurs nombres relatifs non nuls.

- Le produit est **positif** si le nombre de facteurs négatifs est **pair**.
- Le produit est **négatif** si le nombre de facteurs négatifs est **impair**.

Le produit écrit sans son signe est le produit des facteurs écrits sans leur signe.

Dans un produit, on peut changer l'ordre des facteurs et les regrouper comme on veut : le résultat ne change pas. Si l'un des facteurs est nul, le produit est nul.

Exemple : Compter les facteurs négatifs

On calcule $P = (-2{,}5) \times 7 \times (-4) \times (-3)$.

- Aucun facteur n'est nul. Il y a trois facteurs négatifs : trois est impair, donc P est négatif.
- On regroupe les nombres écrits sans leur signe : $2{,}5 \times 4 = 10$ et $7 \times 3 = 21$.
- Donc $P = -(10 \times 21) = -210$.

Remarque : Un facteur nul suffit

Si un facteur est nul, tout le produit est nul :

$$(-48{,}3) \times 0 \times 17 = 0$$

Dans ce cas, inutile de compter les signes.

Méthode : Calculer un produit de plusieurs nombres relatifs

1. **Un facteur nul ?** Si oui, le produit vaut 0.
2. **Le signe** : compte les facteurs négatifs. Pair, le produit est positif ; impair, il est négatif.
3. **Les regroupements** : associe les nombres écrits sans leur signe qui donnent un calcul simple, comme $5 \times 20 = 100$.
4. **Le résultat** : écris le produit avec son signe.

Méthode : Calculer une expression avec des nombres relatifs

1. **Les parenthèses** : calcule d'abord ce qu'elles contiennent.
2. **Les puissances**, puis **les produits et les quotients**, de gauche à droite.
3. **Les additions et les soustractions** à la fin, de gauche à droite.
4. **Une règle à la fois** : à chaque produit ou quotient, applique la règle des signes.

Exemple : Une expression pas à pas

On calcule $E = (-5) \times 9 - 28 : (-4)$.

Le produit et le quotient passent avant la différence : $(-5) \times 9 = -45$ et $28 : (-4) = -7$. Donc :

$$\begin{aligned} E &= -45 - (-7) \\ &= -45 + 7 \\ &= -38 \end{aligned}$$

Avec une parenthèse, on calcule d'abord ce qu'elle contient :

$$\begin{aligned} &(3 - 11) \times (-0{,}75) \\ &= (-8) \times (-0{,}75) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Inverse et quotient

Définition : Inverse d'un nombre non nul

Soit a un nombre relatif non nul. L'**inverse** de a est le nombre qui, multiplié par a, donne 1. On le note $\frac{1}{a}$:

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

Le nombre 0 n'a pas d'inverse : multiplié par n'importe quel nombre, il donne 0, jamais 1.

Exemple : Trouver un inverse

- L'inverse de -8 est $-\frac{1}{8}$, c'est-à-dire $-0{,}125$: en effet, $(-8) \times (-0{,}125) = 1$.

- L'inverse de $0{,}4$ est $2{,}5$, car $0{,}4 \times 2{,}5 = 1$.

Un nombre non nul et son inverse ont toujours le même signe, car leur produit 1 est positif.

Définition : Quotient de deux nombres relatifs

Soit a et b deux nombres relatifs, avec b non nul. Le **quotient** de a par b est le nombre q tel que $b \times q = a$. On le note $\frac{a}{b}$ ou $a : b$.

Dans l'écriture $\frac{a}{b}$, le nombre a est le **numérateur** et le nombre b est le **dénominateur**. On ne divise jamais par 0.

Propriété : Quotient, inverse et règle des signes

Soit a et b deux nombres relatifs, avec b non nul.

- Diviser par b, c'est multiplier par l'inverse de b :

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

- Si a est non nul, le quotient $\frac{a}{b}$ suit la règle des signes du produit : il est **positif** si a et b ont le même signe, **négatif** s'ils sont de signes contraires.
- On peut donc déplacer un signe $-$: $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.

Remarque : Une seconde règle admise

La règle des signes du quotient est admise elle aussi.

Exemple : Trois quotients

- $\frac{-63}{-9} = 7$: même signe, quotient positif, et $63 : 9 = 7$.
- $(-5{,}6) : 0{,}7 = -8$: signes contraires, quotient négatif, et $5{,}6 : 0{,}7 = 8$.
- $\frac{20}{-35} = -\frac{20}{35} = -\frac{4}{7}$: le signe $-$ passe devant, puis on simplifie par 5.

Méthode : Calculer un quotient de deux nombres relatifs

1. **Le dénominateur** : il ne doit pas valoir 0 ; sinon, le quotient n'existe pas.
2. **Le signe** : on l'obtient comme pour un produit.
3. **La valeur** : sans tenir compte des signes, effectue la division ou simplifie l'écriture fractionnaire.

4. **Le résultat** : écris-le avec son signe ; un quotient négatif s'écrit de préférence $-\frac{a}{b}$.

Attention : On ne divise jamais par zéro

Le quotient $\frac{0}{-3}$ existe : il vaut 0, car $(-3) \times 0 = 0$.

Le quotient $\frac{-3}{0}$ n'existe pas : aucun nombre multiplié par 0 ne donne -3.

Le nombre 0 n'a donc pas d'inverse.

Valeurs approchées d'un quotient

Définition : Valeurs approchées d'un quotient

Soit q un quotient de deux nombres relatifs, de dénominateur non nul.

- La **valeur approchée par défaut** de q **à l'unité près** est le nombre entier relatif d tel que $d \leq q < d + 1$. Le nombre $d + 1$ est la **valeur approchée par excès** de q à l'unité près.
- De même, **au dixième près**, la valeur approchée par défaut est le nombre d à un chiffre après la virgule tel que $d \leq q < d + 0{,}1$; la valeur approchée par excès est $d + 0{,}1$.
- **Au centième près**, on remplace $0{,}1$ par $0{,}01$, avec d à deux chiffres après la virgule.

L'écriture $d \leq q < d + 0{,}1$ est un **encadrement** de q.

Exemple : Encadrer un quotient positif

La division posée de 29 par 7 donne $4{,}142\ldots$

- À l'unité près : $4 \leq \frac{29}{7} < 5$. Valeur par défaut 4, valeur par excès 5.
- Au dixième près : $4{,}1 \leq \frac{29}{7} < 4{,}2$.
- Au centième près : $4{,}14 \leq \frac{29}{7} < 4{,}15$.

Contrôle : $7 \times 4{,}14 = 28{,}98$ et $7 \times 4{,}15 = 29{,}05$ encadrent bien 29.

Exemple : Encadrer un quotient négatif

Le quotient $-\frac{38}{9}$ vaut $-4{,}22\ldots$

Au dixième près, sa valeur par défaut est $-4{,}3$ et sa valeur par excès est $-4{,}2$:

$$-4{,}3 \leq -\frac{38}{9} < -4{,}2$$

La valeur par défaut est la plus petite des deux. Pour un nombre négatif, c'est donc celle qui est la plus loin de 0.

Méthode : Encadrer un quotient par des valeurs approchées

1. **Le quotient** : obtiens ses premiers chiffres avec une division posée, ou lis-les sur l'écran de ta calculatrice.
2. **La précision** : unité, dixième ou centième.
3. **Par défaut, puis par excès** : la valeur par défaut d est la plus grande valeur à cette précision qui ne dépasse pas le quotient. On ajoute la précision pour obtenir la valeur par excès.
4. **L'encadrement** : à l'unité, écris $d \leq q < d+1$; au dixième, $d \leq q < d+0{,}1$; au centième, $d \leq q < d+0{,}01$.

Attention : La calculatrice affiche une valeur approchée

Pour $5 : 6$, l'écran affiche $0{,}8333333333$. Ce nombre n'est pas égal à $\frac{5}{6}$: c'est une valeur approchée.

On écrit $\frac{5}{6} \approx 0{,}83$, ou mieux, l'encadrement :

$$0{,}83 \leq \frac{5}{6} < 0{,}84$$

Puissances d'un nombre relatif

Définition : Puissance d'un nombre relatif

Soit a un nombre relatif et n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. La **puissance** a^n est le produit de n facteurs tous égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

On lit « a exposant n ». Le nombre a est la **base** et le nombre n est l'**exposant**.

On lit a^2 « a au carré » et a^3 « a au cube ».

Par convention, $a^1 = a$ et, si a est non nul, $a^0 = 1$.

Exemple : Calculer des puissances

- $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$.
- $(-1{,}5)^2 = (-1{,}5) \times (-1{,}5) = 2{,}25$.
- $(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$.
- Par convention, $9^1 = 9$ et $(-11)^0 = 1$.

Propriété : Signe d'une puissance

Soit a un nombre relatif non nul et n un entier naturel non nul.

- Si a est positif, alors a^n est positif.
- Si a est négatif, alors a^n est **positif** quand l'exposant n est **pair**, et **négatif** quand n est **impair**.

Méthode : Calculer une puissance

1. **Base et exposant** : repère-les ; une base négative est entre parenthèses.
2. **Le signe** : base positive, résultat positif. Base négative : résultat positif si l'exposant est pair, négatif s'il est impair.
3. **La valeur** : sans tenir compte du signe, multiplie entre eux autant de facteurs égaux à la base que l'indique l'exposant.
4. **Le résultat** : écris-le avec son signe.

Attention : Parenthèses et puissance

Un exposant ne s'applique qu'au nombre, ou à la parenthèse, écrit à sa gauche.

Ainsi $(-7)^2 = (-7) \times (-7) = 49$, mais $-7^2 = -(7 \times 7) = -49$.

Pour élever un nombre négatif à une puissance, écris-le entre parenthèses.

Attention : L'exposant n'est pas un facteur

La puissance 6^2 n'est pas 6×2. On a $6^2 = 6 \times 6 = 36$, alors que $6 \times 2 = 12$.

De même, $a^4 \times a^2 = a^6$, et non a^8 : on additionne les exposants, on ne les multiplie pas.

Produit de puissances

Propriété : Produit de puissances

Soit a et b deux nombres relatifs, et n et m deux entiers naturels non nuls.

- **Même base** : $a^n \times a^m = a^{n+m}$. On garde la base et on additionne les exposants.
- **Puissance d'un produit** : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$.

Exemple : Même base

- $(-2)^3 \times (-2)^4 = (-2)^{3+4} = (-2)^7$. L'exposant 7 est impair, donc $(-2)^7 = -128$.
- $11^2 \times 11 = 11^2 \times 11^1 = 11^3 = 1\,331$.

Exemple : Puissance d'un produit

On applique la puissance d'un produit :

$$\begin{aligned}(-5 \times 4)^2 &= (-5)^2 \times 4^2 \\ &= 25 \times 16 \\ &= 400\end{aligned}$$

Contrôle : $-5 \times 4 = -20$ et $(-20)^2 = 400$.

Puissances de 10 et écriture scientifique

Propriété : Puissances de 10

Soit n un entier naturel non nul.

- Le nombre 10^n s'écrit avec le chiffre 1 suivi de n zéros. Par exemple, $10^3 = 1\,000$.
- Multiplier un nombre décimal par 10^n, c'est déplacer sa virgule de n rangs vers la droite, en ajoutant des zéros si nécessaire.

Exemple : Avec des puissances de 10

- $10^6 = 1\,000\,000$: le chiffre 1 suivi de six zéros.
- $4{,}07 \times 10^3 = 4\,070$: la virgule avance de trois rangs, et on ajoute un zéro.
- $10^2 \times 10^5 = 10^7$, par le produit de puissances.

Définition : Écriture scientifique

Un nombre décimal relatif non nul est écrit en **écriture scientifique** lorsqu'il est écrit sous la forme $a \times 10^n$, où :

- a est un nombre décimal relatif qui, écrit sans son signe, a **un seul chiffre non nul avant la virgule** : il est au moins égal à 1 et strictement inférieur à 10 ;
- n est un entier naturel.

Dans ce chapitre, l'exposant n est un entier naturel : on n'écrit ainsi que des nombres qui, écrits sans leur signe, sont au moins égaux à 1.

Exemple : Écrire en écriture scientifique

- $528\,000 = 5{,}28 \times 10^{5}$: la virgule se déplace de cinq rangs vers la gauche.
- $-91\,300 = -9{,}13 \times 10^{4}$: on garde le signe $-$.
- $63{,}4 = 6{,}34 \times 10^{1}$: un seul rang.

Méthode : Écrire un nombre en écriture scientifique

1. **Le départ** : ici, le nombre écrit sans son signe vaut au moins 1 ; s'il est plus petit que 10, la virgule ne bouge pas et $n = 0$. Un nombre entier a une virgule cachée, à droite de son chiffre des unités : $528\,000$ s'écrit aussi $528\,000{,}0$.
2. **La virgule** : dans le nombre écrit sans son signe, repère le premier chiffre qui n'est pas 0, et mets la virgule à sa droite. Tu obtiens le nombre a.
3. **L'exposant** : c'est le nombre n de rangs dont la virgule a reculé vers la gauche.
4. **L'écriture** : $a \times 10^{n}$, avec le signe du nombre de départ.
5. **Le contrôle** : déplace la virgule de a de n rangs vers la droite ; tu dois retrouver le nombre de départ.

Attention : Avant la virgule : un seul chiffre, et pas 0

L'écriture 48×10^{2} est juste, mais elle n'est pas scientifique : 48 a deux chiffres avant la virgule. L'écriture scientifique de $4\,800$ est $4{,}8 \times 10^{3}$.

De même, $0{,}9 \times 10^{4}$ n'est pas scientifique, car le chiffre avant la virgule est 0 : on écrit 9×10^{3}.

Ce qu'il faut savoir faire

Méthode : Quelle technique pour quelle question ?

- **Calculer un produit de deux nombres** : le signe par la règle des signes, puis le produit des nombres écrits sans leur signe.
- **Trouver le signe d'un produit de plusieurs facteurs** : un facteur nul donne 0 ; sinon, compte les facteurs négatifs, pair ou impair.
- **Calculer une expression** : les priorités, une règle à la fois.
- **Trouver un inverse** : le nombre qui, multiplié par le nombre donné, donne 1 ; 0 n'en a pas.
- **Calculer un quotient** : dénominateur non nul, signe, puis division ou simplification.
- **Donner des valeurs approchées d'un quotient** : la précision, la valeur par défaut, la valeur par excès, puis l'encadrement.
- **Calculer une puissance** : base, exposant, parenthèses, signe selon la parité de l'exposant.

- **Réduire un produit de puissances** : même base, on additionne les exposants ; puissance d'un produit, chaque facteur reçoit l'exposant.
- **Écrire en écriture scientifique** : $a \times 10^n$; devant la virgule de a, il reste un chiffre et un seul, autre que 0 ; n compte les rangs de recul de la virgule.

Deux facteurs négatifs

$$(-a) \times (-b) = a \times b$$

Signes contraires

$$(-a) \times b = -(a \times b)$$

Inverse d'un nombre non nul

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

Quotient, dénominateur non nul

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Signe devant la fraction

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Même base

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

Puissance d'un produit

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Conventions, la seconde pour a non nul

$$a^1 = a \qquad a^0 = 1$$