BURHAN

Les nombres décimaux relatifs : multiplication, division et puissances : exercices, niveau examen

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/nombres-relatifs-multiplication-et-division/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Les nombres décimaux relatifs : multiplication, division et puissances	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un jeu de questions

Dans un jeu de 20 questions, une bonne réponse rapporte 4 points et une mauvaise réponse fait perdre 3 points. Une question sans réponse donne 0 point. On note -3 une perte de 3 points.

1. 1,5 pts

Salma a donné 7 bonnes réponses et 9 mauvaises ; les autres questions sont restées sans réponse. Calcule son score S en écrivant une seule expression.

INDICE

Outil : un produit pour chaque sorte de réponse, puis une somme. **Point délicat :** après le signe $\times$, écris -3 entre parenthèses.

CORRIGÉ

Chacune des 7 bonnes réponses rapporte 4 points, chacune des 9 mauvaises réponses vaut -3 points. Les questions sans réponse donnent 0 point. Le score s'écrit :

$$S = 7 \times 4 + 9 \times (-3)$$

Produits. On a $7 \times 4 = 28$, et $9 \times (-3) = -27$ car les signes sont contraires.

Somme.

$$S = 28 + (-27) = 1$$

Conclusion. Le score de Salma est de 1 point.

2. 1,5 pts

Yassine a donné 5 bonnes réponses et 8 mauvaises. Calcule son score Y.

INDICE

Début : écris la même expression qu'à la question 1, avec ses nombres.

CORRIGÉ

On reprend l'expression de la question 1 avec les réponses de Yassine :

$$Y = 5 \times 4 + 8 \times (-3)$$

On a $5 \times 4 = 20$ et, par la règle des signes, $8 \times (-3) = -24$. Donc :

$$Y = 20 + (-24) = -4$$

Conclusion. Le score de Yassine est de -4 points : il a perdu 4 points.

3. 2 pts

Le score moyen par question est le quotient du score par 20. En déduire le score moyen par question de Yassine, puis celui de Salma, en écriture décimale.

INDICE

Outil : la règle des signes du quotient. **Point délicat :** diviser par 20, c'est multiplier par l'inverse de 20 : cherche le nombre qui, multiplié par 20, donne 1.

CORRIGÉ

Yassine. Son score moyen par question est $\frac{-4}{20}$. Le numérateur et le dénominateur sont de signes contraires, donc le quotient est négatif. Sans les signes, $4 : 20 = 0{,}2$. Donc $\frac{-4}{20} = -0{,}2$.

Salma. Son score moyen par question est $\frac{1}{20}$, c'est-à-dire l'inverse de 20. Comme $20 \times 0{,}05 = 1$, on a $\frac{1}{20} = 0{,}05$.

Conclusion. Le score moyen par question est de $-0{,}2$ point pour Yassine et de $0{,}05$ point pour Salma.

Exercice 2 — 5 pts

Le congélateur

On branche un congélateur. Sa température passe de 6 °C à -18 °C en 7 heures. On suppose que la baisse est régulière.

1. — 1 pts

Calcule la variation de température en 7 heures.

INDICE

Outil : la variation est la température finale moins la température de départ.

CORRIGÉ

La variation est la température finale moins la température de départ. Soustraire 6 revient à ajouter son opposé -6 :

$$-18 - 6 = -18 + (-6) = -24$$

Conclusion. En 7 heures, la variation de température est de -24 °C : la température a baissé de 24 °C.

2. — 1,5 pts

La variation par heure est $v = \dfrac{-24}{7}$. Sans calculatrice, donne le signe de v, puis pose la division de 24 par 7 jusqu'aux centièmes.

INDICE

Outil : la règle des signes du quotient. **Début :** $24 = 7 \times 3 + 3$.

CORRIGÉ

Signe. Les nombres -24 et 7 sont de signes contraires, donc v est négatif.

Division posée. On a $24 = 7 \times 3 + 3$. Après la virgule, on abaisse un 0 : $30 = 7 \times 4 + 2$, puis $20 = 7 \times 2 + 6$. Le quotient de 24 par 7 s'écrit donc $3{,}42\ldots$

Conclusion. Le nombre v est négatif, et $v = -3{,}42\ldots$

3. 1,5 pts

En déduire l'encadrement de v à l'unité près, puis au dixième près. Pour chacun, dis quelle borne est la valeur par défaut et quelle borne est la valeur par excès.

INDICE

Point délicat : v est négatif : sa valeur par défaut est la plus loin de 0, à gauche de v sur une droite graduée.

CORRIGÉ

D'après la question 2, $v = -3{,}42\ldots$ Comme v est négatif, sa valeur par défaut est la borne la plus éloignée de 0.

- À l'unité près : $-4 \leq v < -3$. La valeur approchée par défaut à l'unité près est -4 ; la valeur par excès est -3.
- Au dixième près : $-3{,}5 \leq v < -3{,}4$. La valeur approchée par défaut au dixième près est $-3{,}5$; la valeur par excès est $-3{,}4$.

Conclusion. À l'unité près, v est encadré par -4 et -3 ; au dixième près, par $-3{,}5$ et $-3{,}4$.

4. 1 pts

Vérifie ton encadrement au dixième : calcule $7 \times (-3{,}5)$ et $7 \times (-3{,}4)$, puis compare chaque résultat à -24.

INDICE

Outil : la règle des signes pour chaque produit. **Ensuite :** range les trois nombres négatifs dans l'ordre croissant.

CORRIGÉ

Produits. Dans chaque produit, les facteurs sont de signes contraires, donc le produit est négatif : $7 \times (-3{,}5) = -24{,}5$ et $7 \times (-3{,}4) = -23{,}8$.

Comparaison. On range les trois nombres dans l'ordre croissant :

$$-24{,}5 < -24 < -23{,}8$$

Or $7 \times v = -24$. Le nombre v est donc bien compris entre $-3{,}5$ et $-3{,}4$.

Conclusion. Les deux produits encadrent -24 : l'encadrement $-3{,}5 \leq v < -3{,}4$ est juste.

Exercice 3 — 5 pts

Puissances et grands nombres

On donne $A = (-7)^4 \times (-7)^5$ et $B = 4^3 \times 25^3$.

1. — 1,5 pts

Écris A sous la forme d'une seule puissance de -7, puis donne le signe de A.

INDICE

Outil : même base, on additionne les exposants. **Ensuite :** regarde la parité du nouvel exposant.

CORRIGÉ

Le produit A réunit deux puissances de base -7. D'après le produit de puissances de même base, on additionne les exposants :

$$A = (-7)^{4+5} = (-7)^9$$

Comme la base est négative et que l'exposant 9 est impair, A est négatif.

Conclusion. On a $A = (-7)^9$, et A est négatif.

2. — 1,5 pts

Écris B sous la forme $(4 \times 25)^3$, puis calcule 4×25.

INDICE

Outil : la puissance d'un produit, lue dans l'autre sens.

CORRIGÉ

Les deux puissances ont le même exposant 3. On lit la puissance d'un produit de droite à gauche :

$$B = 4^3 \times 25^3 = (4 \times 25)^3$$

Or $4 \times 25 = 100$.

Conclusion. On a $B = (4 \times 25)^3$, donc $B = 100^3$.

3. — 1 pts

En déduire B en écriture décimale, puis sous la forme d'une puissance de 10.

INDICE

Début : $100^3 = 100 \times 100 \times 100$.

CORRIGÉ

D'après la question 2, $B = 100^3$: c'est le produit de trois facteurs égaux à 100.

$$\begin{aligned} B &= 100 \times 100 \times 100 \\ &= 1\,000\,000 \end{aligned}$$

Ce nombre s'écrit avec le chiffre 1 suivi de six zéros.

Conclusion. En écriture décimale, $B = 1\,000\,000$; sous forme de puissance de 10, $B = 10^6$.

4. 1 pts

Écris le nombre $C = 3\,400 \times B$ en écriture scientifique.

INDICE

Début : écris d'abord $3\,400$ en écriture scientifique. **Ensuite :** utilise le produit de puissances de 10.

CORRIGÉ

Écriture scientifique de $3\,400$. La virgule recule de trois rangs : $3\,400 = 3{,}4 \times 10^{3}$.

Produit. D'après la question 3, $B = 10^{6}$. Donc $C = 3{,}4 \times 10^{3} \times 10^{6}$.

Puissances de 10. On additionne les exposants : $10^{3} \times 10^{6} = 10^{9}$.

Conclusion. En écriture scientifique, $C = 3{,}4 \times 10^{9}$.

Exercice 4 5 pts

Un programme de calcul

Voici un programme de calcul.

- Choisis un nombre.
- Multiplie-le par -4.
- Ajoute 6 au résultat.
- Calcule le cube du nombre obtenu, c'est-à-dire sa puissance d'exposant 3.

1. 1,5 pts

Applique le programme au nombre 3. Écris le résultat de chaque étape.

INDICE

Outil : la règle des signes pour le produit. **Ensuite :** le cube d'un nombre est le produit de trois facteurs égaux à ce nombre.

CORRIGÉ

Étape 1. On multiplie 3 par -4 : signes contraires, produit négatif. On obtient $3 \times (-4) = -12$.

Étape 2. On ajoute 6 : $-12 + 6 = -6$.

Étape 3. On calcule le cube de -6 :

$$\begin{aligned}&(-6)^3\\&= (-6) \times (-6) \times (-6)\\&= -216\end{aligned}$$

Il y a trois facteurs négatifs, un nombre impair : le cube est négatif.

Conclusion. Appliqué au nombre 3, le programme donne -216.

2. 1,5 pts

Applique le programme au nombre $-0{,}5$.

INDICE

Point délicat : $-0{,}5$ et -4 ont le même signe.

CORRIGÉ

Étape 1. Les nombres $-0{,}5$ et -4 sont tous les deux négatifs : même signe, produit positif. Comme $0{,}5 \times 4 = 2$, on obtient $(-0{,}5) \times (-4) = 2$.

Étape 2. On ajoute 6 : $2 + 6 = 8$.

Étape 3. On calcule le cube de 8 : $8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$.

Conclusion. Appliqué au nombre $-0{,}5$, le programme donne 512.

3. 1 pts

Applique les deux premières étapes au nombre 5. En déduire le signe du résultat du programme, sans calculer la puissance.

INDICE

Outil : le signe d'une puissance dépend du signe de la base et de la parité de l'exposant.

CORRIGÉ

Étape 1. Les signes sont contraires, donc $5 \times (-4) = -20$.

Étape 2. On ajoute 6 : $-20 + 6 = -14$.

Signe du cube. Il reste à calculer $(-14)^3$. La base -14 est négative et l'exposant 3 est impair, donc ce cube est négatif.

Conclusion. Appliqué au nombre 5, le programme donne un résultat négatif.

4. 1 pts

Mehdi choisit le nombre $1{,}5$ et annonce que le programme donne 0. A-t-il raison ? Explique.

INDICE

Début : applique le programme à $1{,}5$, étape par étape.

CORRIGÉ

On applique le programme au nombre $1{,}5$.

Étape 1. $1{,}5 \times (-4) = -6$.

Étape 2. $-6 + 6 = 0$.

Étape 3. $0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$, car un produit qui a un facteur nul est nul.

Conclusion. Mehdi a raison : appliqué à $1{,}5$, le programme donne bien 0.

Exercice 5 — 5 pts

Une fraction avec des puissances

On donne $A = \dfrac{(-2)^3 \times 15}{(-3)^2}$.

1. — 1,5 pts

Donne le signe de $(-2)^3$ et celui de $(-3)^2$, puis calcule ces deux puissances.

INDICE

Outil : base négative, regarde si l'exposant est pair ou impair.

CORRIGÉ

Les deux bases sont négatives : le signe dépend de la parité de l'exposant.

- $(-2)^3$: la base est négative et l'exposant 3 est impair, donc $(-2)^3$ est négatif. $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$.
- $(-3)^2$: la base est négative et l'exposant 2 est pair, donc $(-3)^2$ est positif. $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$.

Conclusion. On a $(-2)^3 = -8$, nombre négatif, et $(-3)^2 = 9$, nombre positif.

2. — 1,5 pts

En déduire le signe de A, puis écris A en écriture fractionnaire simplifiée, le signe devant la fraction.

INDICE

Début : calcule d'abord le numérateur $(-8) \times 15$. **Ensuite :** cherche un diviseur commun au numérateur et au dénominateur.

CORRIGÉ

Numérateur et dénominateur. D'après la question 1, le numérateur vaut $(-8) \times 15 = -120$ et le dénominateur vaut 9. Donc $A = \dfrac{-120}{9}$.

Signe. Le numérateur et le dénominateur sont de signes contraires, donc A est négatif. On écrit le signe devant la fraction.

Simplification. On simplifie par 3, car $120 = 3 \times 40$ et $9 = 3 \times 3$:

$$A = -\frac{120}{9} = -\frac{40}{3}$$

Conclusion. Le nombre A est négatif, et sa forme simplifiée est $A = -\dfrac{40}{3}$.

3. 1 pts

Ilyas recopie A en oubliant les parenthèses : $B = \dfrac{-2^3 \times 15}{-3^2}$. Calcule B en écriture fractionnaire simplifiée. Les nombres A et B sont-ils égaux ?

INDICE

Point délicat : sans parenthèses, l'exposant porte seulement sur le nombre, puis on prend l'opposé : -3^2 n'est pas $(-3)^2$.

CORRIGÉ

Puissances sans parenthèses. L'exposant porte seulement sur le nombre, puis on prend l'opposé : $-2^3 = -(2 \times 2 \times 2) = -8$ et $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$.

Calcul de B. Le numérateur vaut $(-8) \times 15 = -120$, donc $B = \dfrac{-120}{-9}$. Le numérateur et le dénominateur ont le même signe : B est positif. On simplifie par 3 :

$$B = \frac{120}{9} = \frac{40}{3}$$

Comparaison. D'après la question 2, $A = -\dfrac{40}{3}$ est négatif, alors que B est positif.

Conclusion. Les nombres A et B ne sont pas égaux : B est l'opposé de A.

4. 1 pts

Vérifie que $-0{,}075$ est l'inverse de A.

INDICE

Outil : l'inverse de A est le nombre qui, multiplié par A, donne 1. **Début :** commence par le signe du produit.

CORRIGÉ

On calcule le produit $A \times (-0{,}075)$.

Signe. Les deux facteurs sont négatifs, donc le produit est positif.

Produit sans les signes. Comme $40 \times 0{,}075 = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{40}{3} \times 0{,}075 &= \frac{40 \times 0{,}075}{3} \\ &= \frac{3}{3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Conclusion. On a $A \times (-0{,}075) = 1$: le nombre $-0{,}075$ est bien l'inverse de A.