BURHAN

Les nombres décimaux relatifs : multiplication, division et puissances : exercices, application

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/nombres-relatifs-multiplication-et-division/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Les nombres décimaux relatifs : multiplication, division et puissances	Application	8

Exercice 1

Produits de deux nombres relatifs

Dans chaque calcul, trouve d'abord le signe du produit, puis calcule.

1.

Calcule : $(-8) \times 7$; $(-1{,}2) \times (-30)$; $0{,}25 \times (-48)$; $(-0{,}9) \times (-0{,}6)$.

INDICE

Outil : la règle des signes. **Début :** pour $(-8) \times 7$, les signes sont contraires.

CORRIGÉ

Pour chaque produit, on lit d'abord le signe avec la règle des signes. On multiplie ensuite les nombres écrits sans leur signe.

- $(-8) \times 7$: signes contraires, produit négatif. $8 \times 7 = 56$, donc $(-8) \times 7 = -56$.
- $(-1{,}2) \times (-30)$: même signe, produit positif. $1{,}2 \times 30 = 36$, donc $(-1{,}2) \times (-30) = 36$.
- $0{,}25 \times (-48)$: signes contraires, produit négatif. $0{,}25 \times 48 = 12$, donc $0{,}25 \times (-48) = -12$.
- $(-0{,}9) \times (-0{,}6)$: même signe, produit positif. $0{,}9 \times 0{,}6 = 0{,}54$, donc $(-0{,}9) \times (-0{,}6) = 0{,}54$.

Conclusion. Les quatre produits valent -56, 36, -12 et $0{,}54$.

2.

Dans une chambre froide, la température baisse de $1{,}5$ °C chaque heure : chaque heure, elle change de $-1{,}5$. Ce changement s'appelle aussi une variation. Calcule la variation de température en 6 heures.

INDICE

Outil : une variation répétée 6 fois se calcule par un produit. **Point délicat :** après le signe $\times$, le nombre $-1{,}5$ s'écrit entre parenthèses.

CORRIGÉ

La température change de $-1{,}5$ °C par heure, et cela se répète 6 fois. La variation en 6 heures est donc le produit $6 \times (-1{,}5)$.

Les facteurs 6 et $-1{,}5$ sont de signes contraires : le produit est négatif.

Sans les signes, $6 \times 1{,}5 = 9$. Donc $6 \times (-1{,}5) = -9$.

Conclusion. En 6 heures, la variation de température est de -9 °C : la température a baissé de 9 °C.

Exercice 2

Le signe d'un produit de plusieurs facteurs

On donne $P = (-3) \times 5 \times (-2) \times (-7) \times 4$, $Q = (-1) \times (-6) \times (-2{,}5) \times (-8)$ et $R = (-19) \times 0 \times (-4)$.

1.

Sans calculer, donne le signe de P et de Q, puis la valeur de R.

INDICE

Outil : compte les facteurs négatifs. **Point délicat :** regarde d'abord si un facteur est nul.

CORRIGÉ

Pour le signe d'un produit, on cherche d'abord un facteur nul. S'il n'y en a pas, on compte les facteurs négatifs.

- P : aucun facteur n'est égal à 0. Il y a trois facteurs négatifs : -3, -2 et -7. Trois est un nombre impair, donc P est négatif.
- Q : aucun facteur n'est égal à 0. Il y a quatre facteurs négatifs. Quatre est un nombre pair, donc Q est positif.
- R : le facteur 0 apparaît, donc le produit est nul : $R = 0$.

Conclusion. Le nombre P est négatif, le nombre Q est positif et $R = 0$.

2.

Calcule P et Q.

INDICE

Outil : multiplie les nombres écrits sans leur signe, puis place le signe trouvé. **Début :** pour Q, regroupe $2{,}5$ et 8.

CORRIGÉ

On multiplie les nombres écrits sans leur signe, puis on place devant le résultat le signe trouvé à la question 1.

Calcul de P. Sans les signes :

$$3 \times 5 \times 2 \times 7 \times 4 = 840$$

Le produit P est négatif, donc $P = -840$.

Calcul de Q. On groupe d'abord $2{,}5$ et 8, car $2{,}5 \times 8 = 20$. Ensuite, $1 \times 6 \times 20 = 120$. Le produit Q est positif, donc $Q = 120$.

Conclusion. On obtient $P = -840$ et $Q = 120$.

Exercice 3

Inverses et quotients

Un inverse et un quotient se calculent avec la même règle des signes que le produit.

1.

Donne l'inverse de 10, de $-1{,}25$ et de $-0{,}1$, en écriture décimale. Vérifie chaque réponse par un produit.

INDICE

Outil : l'inverse de a est le nombre qui, multiplié par a, donne 1. **Point délicat :** le produit doit être positif, donc les deux nombres ont le même signe.

CORRIGÉ

L'inverse d'un nombre a non nul est le nombre qui, multiplié par a, donne 1. Comme 1 est positif, un nombre et son inverse ont le même signe.

- L'inverse de 10 est $\dfrac{1}{10} = 0{,}1$. Vérification : $10 \times 0{,}1 = 1$.
- L'inverse de $-1{,}25$ est $-0{,}8$. Vérification : $(-1{,}25) \times (-0{,}8) = 1$, car $1{,}25 \times 0{,}8 = 1$ et deux facteurs de même signe donnent un produit positif.
- L'inverse de $-0{,}1$ est -10. Vérification : $(-0{,}1) \times (-10) = 1$.

Conclusion. Les inverses de 10, de $-1{,}25$ et de $-0{,}1$ sont $0{,}1$, $-0{,}8$ et -10.

2.

Calcule : $\dfrac{-72}{8}$; $(-4{,}5) : (-1{,}5)$; $\dfrac{42}{-6}$; $\dfrac{0}{-11}$.

INDICE

Outil : le signe d'un quotient suit la règle des signes. **Point délicat :** observe le numérateur du dernier quotient.

CORRIGÉ

Le signe d'un quotient se trouve comme celui d'un produit. On le lit d'abord, puis on divise les nombres écrits sans leur signe.

- $\dfrac{-72}{8}$: signes contraires, quotient négatif. $72 : 8 = 9$, donc $\dfrac{-72}{8} = -9$.
- $(-4{,}5) : (-1{,}5)$: même signe, quotient positif. $4{,}5 : 1{,}5 = 3$, donc $(-4{,}5) : (-1{,}5) = 3$.
- $\dfrac{42}{-6}$: signes contraires, quotient négatif. $42 : 6 = 7$, donc $\dfrac{42}{-6} = -7$.
- $\dfrac{0}{-11}$: le dénominateur n'est pas nul, donc ce quotient existe. Comme $(-11) \times 0 = 0$, on a $\dfrac{0}{-11} = 0$.

Conclusion. Les quatre quotients valent -9, 3, -7 et 0.

Exercice 4

Valeurs approchées d'un quotient

Le quotient étudié est $q = \dfrac{38}{7}$.

1.

Pose la division de 38 par 7 jusqu'aux millièmes. Entre quels nombres entiers consécutifs se trouve q ? Lequel est sa valeur approchée par défaut à l'unité près, lequel est sa valeur par excès ?

INDICE

Outil : la division posée. **Début :** combien de fois 7 est-il contenu dans 38 ?

CORRIGÉ

Division posée. Dans 38, on trouve 5 fois 7 et il reste 3 : $38 = 7 \times 5 + 3$.

Après la virgule, on abaisse un 0 à chaque fois : $30 = 7 \times 4 + 2$, puis $20 = 7 \times 2 + 6$, puis $60 = 7 \times 8 + 4$. On obtient $q = 5{,}428\ldots$

Encadrement. Le quotient est au moins égal à 5 et plus petit que 6 :

$$5 \leq q < 6$$

Conclusion. Le quotient q se trouve entre les entiers consécutifs 5 et 6. Sa valeur approchée par défaut à l'unité près est 5 ; sa valeur approchée par excès est 6.

2.

Recommence avec une précision d'un dixième, puis d'un centième : écris chaque encadrement de q et nomme ses deux bornes.

INDICE

Outil : au dixième, la valeur par défaut d vérifie $d \leq q < d + 0{,}1$. **Point délicat :** on n'arrondit pas : on garde les chiffres sans les modifier, même si le chiffre suivant est grand.

CORRIGÉ

On part de $q = 5{,}428\ldots$ et on garde les chiffres jusqu'au rang demandé, sans les changer.

- Au dixième près : $5{,}4 \leq q < 5{,}5$. La valeur par défaut est $5{,}4$, la valeur par excès est $5{,}5$.
- Au centième près : $5{,}42 \leq q < 5{,}43$. La valeur par défaut est $5{,}42$, la valeur par excès est $5{,}43$.

Le chiffre suivant, 8, est grand, mais il ne modifie pas la valeur par défaut : on n'arrondit pas.

Conclusion. Au dixième près, q est encadré par $5{,}4$ et $5{,}5$; au centième près, il est encadré par $5{,}42$ et $5{,}43$.

3.

Contrôle l'encadrement au centième par deux produits.

INDICE

Outil : multiplie chaque valeur approchée par 7 et compare le résultat à 38.

CORRIGÉ

On multiplie chaque borne par 7, puis on compare le produit à 38.

$$7 \times 5{,}42 = 37{,}94$$

Ce produit est plus petit que 38.

$$7 \times 5{,}43 = 38{,}01$$

Ce produit est plus grand que 38.

Conclusion. Comme $37{,}94 < 38 < 38{,}01$, le quotient $q = \dfrac{38}{7}$ est bien compris entre $5{,}42$ et $5{,}43$: l'encadrement au centième est juste.

Exercice 5

Calculer une puissance

Une puissance est un produit de facteurs tous égaux.

1.

Calcule : 3^4 ; $2{,}5^2$; 13^1 ; 8^0.

INDICE

Outil : la définition de a^n, et les conventions pour les exposants 1 et 0. **Début :** $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

CORRIGÉ

Pour un exposant au moins égal à 2, la puissance a^n est le produit de n facteurs égaux à a. Les exposants 1 et 0 suivent une convention.

- $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$: quatre facteurs égaux à 3.
- $2{,}5^2 = 2{,}5 \times 2{,}5 = 6{,}25$: deux facteurs égaux à $2{,}5$.
- $13^1 = 13$: par convention, la puissance d'exposant 1 est égale à la base.
- $8^0 = 1$: par convention, la puissance d'exposant 0 d'un nombre non nul vaut 1, et 8 n'est pas nul.

Conclusion. Les quatre puissances valent 81, $6{,}25$, 13 et 1.

2.

Écris sous la forme d'une puissance : $6 \times 6 \times 6 \times 6$; $(-9) \times (-9) \times (-9)$. Pour chacune, donne la base et l'exposant.

INDICE

Outil : compte les facteurs égaux. **Point délicat :** une base négative s'écrit entre parenthèses.

CORRIGÉ

Le facteur répété est la base ; le nombre de facteurs est l'exposant.

- $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$: la base est 6, l'exposant est 4.
- $(-9) \times (-9) \times (-9) = (-9)^3$: la base est -9, l'exposant est 3. Comme la base est négative, on l'écrit entre parenthèses.

Conclusion. Les deux produits s'écrivent 6^4 et $(-9)^3$.

Exercice 6

Signe d'une puissance et parenthèses

Attention aux parenthèses autour d'une base négative.

1.

Sans calculer, donne le signe de $(-4)^3$, de $(-1)^{10}$ et de $(-1)^9$.

INDICE

Outil : le signe d'une puissance d'un nombre négatif dépend de la parité de l'exposant.

CORRIGÉ

Dans les trois cas, la base est négative. Le signe dépend alors de l'exposant : avec un exposant pair, le résultat est positif ; avec un exposant impair, il est négatif.

- $(-4)^3$: l'exposant 3 est impair, donc le résultat est négatif.
- $(-1)^{10}$: l'exposant 10 est pair, donc le résultat est positif. On a même $(-1)^{10} = 1$.
- $(-1)^9$: l'exposant 9 est impair, donc le résultat est négatif. On a même $(-1)^9 = -1$.

Conclusion. Les nombres $(-4)^3$ et $(-1)^9$ sont négatifs ; le nombre $(-1)^{10}$ est positif.

2.

Calcule $(-4)^3$, puis $(-3)^4$ et -3^4.

INDICE

Point délicat : dans -3^4, l'exposant ne porte que sur 3.

CORRIGÉ

Calcul de $(-4)^3$. C'est le produit de trois facteurs égaux à -4 :

$$\begin{aligned}&(-4)^3\\&= (-4) \times (-4) \times (-4)\\&= -64\end{aligned}$$

Trois facteurs négatifs, c'est un nombre impair : le résultat est négatif.

Calcul de $(-3)^4$. C'est le produit de quatre facteurs égaux à -3 :

$$\begin{aligned}&(-3)^4\\&= (-3) \times (-3)\\&\quad \times (-3) \times (-3)\\&= 81\end{aligned}$$

Quatre facteurs négatifs, c'est un nombre pair : le résultat est positif.

Calcul de -3^4. Sans parenthèses, l'exposant porte seulement sur 3 ; on prend ensuite l'opposé :

$$\begin{aligned}-3^4 &= -(3 \times 3 \times 3 \times 3)\\&= -81\end{aligned}$$

Conclusion. On obtient $(-4)^3 = -64$, $(-3)^4 = 81$ et $-3^4 = -81$: les parenthèses changent le résultat.

Exercice 7

Produit de puissances

Pour multiplier deux puissances de même base, on garde la base et on additionne les exposants.

1.

Écris sous la forme d'une seule puissance : $9^2 \times 9^5$; $(-3)^2 \times (-3)^5$; 7×7^4.

INDICE

Outil : $a^n \times a^m = a^{n+m}$. **Point délicat :** $7 = 7^1$.

CORRIGÉ

Dans chaque produit, les deux facteurs ont la même base. D'après le produit de puissances de même base, on garde la base et on additionne les exposants.

Base 9.

$$9^2 \times 9^5 = 9^{2+5} = 9^7$$

Base -3.

$$\begin{aligned}(-3)^2 \times (-3)^5 &= (-3)^{2+5} \\ &= (-3)^7\end{aligned}$$

Base 7. Le facteur 7 s'écrit aussi 7^1 :

$$\begin{aligned}7 \times 7^4 &= 7^1 \times 7^4 \\ &= 7^{1+4} \\ &= 7^5\end{aligned}$$

Conclusion. Les trois produits s'écrivent 9^7, $(-3)^7$ et 7^5.

2.

Calcule $(2 \times 5)^5$ de deux façons : d'abord avec $2 \times 5 = 10$, puis avec la puissance d'un produit.

INDICE

Outil : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$. **Début :** $2^5 = 32$.

CORRIGÉ

Première façon. On calcule d'abord la parenthèse : $2 \times 5 = 10$. Donc :

$$(2 \times 5)^5 = 10^5 = 100\,000$$

Deuxième façon. D'après la puissance d'un produit, chaque facteur reçoit l'exposant 5 :

$$\begin{aligned}(2 \times 5)^5 &= 2^5 \times 5^5 \\ &= 32 \times 3\,125 \\ &= 100\,000\end{aligned}$$

Conclusion. Les deux façons donnent le même résultat : $(2 \times 5)^5 = 100\,000$.

Exercice 8

Puissances de 10 et écriture scientifique

Les puissances de 10 servent à écrire les grands nombres.

1.

Écris en écriture décimale : 10^5 ; $3{,}6 \times 10^4$. Écris $10^2 \times 10^6$ sous la forme d'une puissance de 10.

INDICE

Outil : 10^n s'écrit avec 1 suivi de n zéros ; multiplier par 10^n déplace la virgule de n rangs vers la droite.

CORRIGÉ

- $10^5 = 100\,000$: on écrit le chiffre 1 suivi de cinq zéros.
- $3{,}6 \times 10^4 = 36\,000$: la virgule avance de quatre rangs vers la droite, il faut donc ajouter trois zéros.
- $10^2 \times 10^6 = 10^{2+6} = 10^8$: les deux puissances ont la même base 10, on additionne les exposants.

Conclusion. En écriture décimale, $10^5 = 100\,000$ et $3{,}6 \times 10^4 = 36\,000$; sous forme de puissance de 10, le produit vaut 10^8.

2.

Donne l'écriture scientifique de $72\,500$, de $-6\,040\,000$ et de 813.

INDICE

Outil : la virgule d'un nombre entier est cachée à sa droite ; recule-la jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un chiffre devant elle, autre que 0. **Point délicat :** garde le signe du nombre de départ.

CORRIGÉ

Pour chaque nombre, on cherche une écriture $a \times 10^n$. Devant la virgule de a, il ne doit rester qu'un chiffre, différent de 0 ; le signe de a est celui du nombre.

- $72\,500 = 7{,}25 \times 10^4$: la virgule, cachée à droite de $72\,500$, recule de quatre rangs.
- $-6\,040\,000 = -6{,}04 \times 10^6$: la virgule recule de six rangs, et on garde le signe $-$.
- $813 = 8{,}13 \times 10^2$: la virgule recule de deux rangs.

Vérification. On a bien $7{,}25 \times 10^4 = 72\,500$: multiplier par 10^4 fait revenir la virgule de quatre rangs vers la droite.

Conclusion. Les écritures scientifiques sont $7{,}25 \times 10^4$, $-6{,}04 \times 10^6$ et $8{,}13 \times 10^2$.