BURHAN

Les nombres décimaux relatifs : multiplication, division et puissances

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/nombres-relatifs-multiplication-et-division/cours

Chapitre	Semestre
Les nombres décimaux relatifs : multiplication, division et puissances	Semestre 1

Quand le froid se multiplie

Il est minuit à Ifrane, une ville de montagne. Le thermomètre indique 0 degré, puis la température baisse de 3 degrés chaque heure.

Une baisse de 3 degrés, c'est un changement de -3. On dit aussi une variation de -3.

Devine : La température au petit matin

La baisse dure 5 heures, toujours au même rythme. Quelle température indique le thermomètre à la fin ?

A. -15 degrés

Juste.

Juste. Il y a 5 baisses de 3 degrés : $(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)=-15$.

B. 15 degrés

Faux.

Faux. La température baisse depuis 0 degré : elle passe en dessous de 0.

C. -8 degrés

Faux.

Faux. Tu as ajouté -3 et -5. Or 5 compte les heures : la baisse de 3 degrés se répète 5 fois.

D. 2 degrés

Faux.

Faux. Tu as calculé $5-3$. Mais la baisse de 3 degrés se répète chaque heure.

Correction

Chaque heure, la température change de -3. En 5 heures, elle change de $(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)=-15$.

On l'écrit aussi avec une multiplication :

$$5\times(-3)=-15$$

Le thermomètre indique -15 degrés.

Tu viens de multiplier un nombre positif par un nombre négatif. Dans ce chapitre, tu apprends à multiplier et à diviser tous les nombres relatifs.

Tu découvres aussi les puissances. Elles servent à écrire de très grands nombres, comme la distance de la Terre au Soleil.

Multiplier deux nombres relatifs

Observer une suite de produits

Rappel du chapitre sur l'ordre et l'addition : un nombre relatif non nul se compose d'un signe, $+$ ou $-$, et d'un nombre écrit sans son signe.

Ainsi, $-4{,}5$ a le signe $-$; écrit sans son signe, c'est $4{,}5$. Son opposé est $4{,}5$.

Devine : Continuer la suite

Dans $3 \times (-2) = -6$, les nombres 3 et -2 sont les **facteurs**. Le résultat -6 est leur **produit**.

Observe cette suite :

$$3 \times (-2) = -6$$
$$2 \times (-2) = -4$$
$$1 \times (-2) = -2$$
$$0 \times (-2) = 0$$

Le premier facteur diminue de 1 à chaque ligne. Le produit augmente alors de 2.

Que vaut $(-1) \times (-2)$ si la suite continue ?

A. -2
Faux.
Faux. Après 0, le produit doit encore augmenter de 2 : il passe au-dessus de 0.

B. 2
Juste.
Juste. Le produit augmente de 2 : $0 + 2 = 2$.

C. -3
Faux.
Faux. Tu as ajouté -1 et -2. Ici, on multiplie : regarde comment le produit change d'une ligne à l'autre.

D. 1
Faux.
Faux. Le produit augmente de 2 à chaque ligne, pas de 1.

Correction
D'une ligne à l'autre, le produit augmente de 2. Après $0 \times (-2) = 0$, on obtient donc :

$$(-1) \times (-2) = 0 + 2 = 2$$

Exemple : La suite continue

On continue la suite de la même façon :

$$(-1) \times (-2) = 2$$
$$(-2) \times (-2) = 4$$
$$(-3) \times (-2) = 6$$

Les deux facteurs sont négatifs, et le produit est positif.

Écrit sans son signe, le produit vaut 1×2, puis 2×2, puis 3×2.

La règle des signes

Propriété : Produit de deux nombres relatifs

Pour multiplier deux nombres décimaux relatifs non nuls :

- on multiplie les deux nombres écrits sans leur signe ;
- on donne au résultat le signe $+$ si les deux nombres ont **le même signe**, et le signe $-$ s'ils sont **de signes contraires**.

C'est la **règle des signes** : le produit de deux nombres de même signe est positif ; le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

Pour tout nombre relatif a : $a \times 0 = 0$, $a \times 1 = a$ et $a \times (-1) = -a$, l'opposé de a.

Remarque

Ce résultat est admis.

Tu l'as observé sur la suite de produits : la règle prolonge la multiplication que tu connais.

Exemple : Appliquer la règle

- $(-7) \times (-3) = 21$: même signe, le produit est positif.
- $(-0{,}8) \times 5 = -4$: signes contraires, le produit est négatif.
- $6 \times (-1) = -6$: multiplier par -1 donne l'opposé.
- $(-12{,}5) \times 0 = 0$: un produit par 0 vaut 0.

Vérifie : Quel signe ?

Sans calculer le produit, trouve son signe : $(-2{,}4) \times (-0{,}5)$.

A. Il est positif.

Juste.

Juste. Les deux facteurs sont négatifs : même signe, donc produit positif. Il vaut $1{,}2$.

B. Il est négatif.

Faux.

Faux. Deux signes $-$ ne donnent pas un produit négatif. Tu penses peut-être à la somme de deux négatifs.

C. On ne peut pas le savoir sans calculer.

Faux.

Faux. La règle des signes donne le signe avant tout calcul.

Correction

Les deux facteurs sont négatifs. Ils ont le même signe, donc le produit est positif.

Écrits sans leur signe, $2{,}4 \times 0{,}5 = 1{,}2$. Donc :

$$(-2{,}4) \times (-0{,}5) = 1{,}2$$

Calculer un produit

Méthode : multiplier deux nombres relatifs

1. **Le signe.** Même signe : le produit est positif. Signes contraires : il est négatif.
2. **Le calcul.** Multiplie les deux nombres écrits sans leur signe.
3. **Le résultat.** Écris ce produit précédé de son signe.

Exemple : Une plongée

Une plongeuse descend de $1{,}5$ mètre chaque minute. Prenons la surface de l'eau comme niveau 0 : cette descente est un changement de $-1{,}5$.

En 4 minutes, son niveau change de :

$$4 \times (-1{,}5) = -6$$

Le signe : signes contraires, le produit est négatif.

Le calcul : $4 \times 1{,}5 = 6$.

Son niveau a changé de -6 : elle est descendue de 6 mètres.

Exemple : Des dettes effacées

Marwa doit 2 dirhams à chacune de ses 3 amies. Sa situation est $3 \times (-2) = -6$ dirhams.

Les 3 amies effacent leur dette : on retire 3 fois le changement -2. Sa situation change de :

$$(-3) \times (-2) = 6$$

Elle revient à 0, car $-6 + 6 = 0$. Deux facteurs négatifs donnent bien un produit positif.

Vérifie : Un produit de deux négatifs

Combien vaut $(-1{,}2) \times (-5)$?

A. -6

Faux.

Faux. Les deux facteurs sont négatifs : même signe, donc produit positif.

B. $-6{,}2$

Faux.

Faux. Tu as additionné : $(-1{,}2) + (-5) = -6{,}2$. Ici, on multiplie.

C. 6

Juste.

Juste. Même signe, produit positif, et $1{,}2 \times 5 = 6$.

D. $0{,}6$

Faux.

Faux. Le signe est juste, mais $1{,}2 \times 5 = 6$: vérifie la place de la virgule.

Correction

Les deux facteurs sont négatifs : le produit est positif.

Écrits sans leur signe, $1{,}2 \times 5 = 6$. Donc :

$$(-1{,}2) \times (-5) = 6$$

Somme ou produit

Trouve l'erreur : Le calcul de Karim

Karim écrit : $(-6) + (-5) = 30$. Où est son erreur ?

A. Il fallait écrire -30 au lieu de 30.

Faux.

Faux. Ici, on additionne : aucun produit n'est en jeu. La somme vaut -11.

B. Le calcul est juste, il n'y a pas d'erreur.

Faux.

Faux. Le nombre 30 est le produit $(-6) \times (-5)$. Mais Karim devait additionner.

C. Il a utilisé la règle des produits.

Juste.

Juste. C'est une somme, pas un produit. On a $(-6) + (-5) = -11$.

Correction

Karim additionne, il ne multiplie pas.

Pour une somme de deux nombres négatifs, on additionne les nombres écrits sans leur signe et on garde le signe $-$:

$$(-6) + (-5) = -11$$

Le nombre 30 est le produit $(-6) \times (-5)$, et non la somme.

Attention : somme ou produit ?

La règle des signes sert pour les produits, pas pour les sommes.

- ✗ $(-8) + (-2) = 16$
- ✓ $(-8) + (-2) = -10$, alors que $(-8) \times (-2) = 16$.

Avant de calculer, regarde le signe de l'opération.

À toi : trois produits

Calcule $A = (-9) \times 4$, $B = (-2{,}5) \times (-1{,}2)$ et $C = 0{,}6 \times (-5)$.

Indice 1

Commence par le signe de chaque produit : compare les signes des deux facteurs.

Indice 2

Multiplie ensuite les nombres écrits sans leur signe : 9×4, $2{,}5 \times 1{,}2$ et $0{,}6 \times 5$.

Indice 3

Point délicat : dans B, les deux facteurs sont négatifs. Le produit est donc positif.

Réponse

- $A = -36$: signes contraires, et $9 \times 4 = 36$.
- $B = 3$: même signe, et $2{,}5 \times 1{,}2 = 3$.
- $C = -3$: signes contraires, et $0{,}6 \times 5 = 3$.

Plusieurs facteurs ; calculer une expression

Compter les facteurs négatifs

Devine : Le signe d'un long produit

Prédis le signe de $(-1) \times (-2) \times (-1) \times (-3)$. Ce produit compte quatre facteurs négatifs.

A. Il est négatif.

Faux.

Faux. Les signes $-$ ne s'accumulent pas : ils se compensent deux par deux.

B. Il dépend de l'ordre des facteurs.

Faux.

Faux. On peut changer l'ordre des facteurs : le produit ne change pas.

C. Il est positif.

Juste.

Juste. Les quatre facteurs négatifs se compensent deux par deux.

Correction

On calcule de gauche à droite :

$$\begin{aligned}(-1) \times (-2) &= 2\\ 2 \times (-1) &= -2\\ (-2) \times (-3) &= 6\end{aligned}$$

Le produit vaut 6 : il est positif.

Exemple : Grouper par paires

Dans $(-2) \times (-5) \times (-1) \times 3$, il y a trois facteurs négatifs.

$$\begin{aligned}&(-2) \times (-5) \times (-1) \times 3\\ &= 10 \times (-1) \times 3\\ &= -30\end{aligned}$$

La paire $(-2) \times (-5)$ donne un nombre positif, 10.

Il reste un seul facteur négatif : le produit est négatif.

Propriété : Produit de plusieurs nombres relatifs

On considère un produit de plusieurs nombres relatifs non nuls.

- Le produit est **positif** si le nombre de facteurs négatifs est **pair**.
- Le produit est **négatif** si le nombre de facteurs négatifs est **impair**.

Le produit écrit sans son signe est le produit des facteurs écrits sans leur signe. Dans un produit, on peut changer l'ordre des facteurs et les regrouper comme on veut : le résultat ne change pas. Si l'un des facteurs est nul, le produit est nul.

Démonstration

Idée de la preuve. On regroupe les facteurs négatifs deux par deux. D'après la règle des signes, le produit de deux nombres négatifs est positif : chaque paire donne donc un nombre positif. Si le nombre de facteurs négatifs est pair, il ne reste que des nombres positifs, et le produit est positif. S'il est impair, il reste un seul facteur négatif, multiplié par un nombre positif : le produit est négatif. À chaque étape, la règle des signes multiplie les nombres écrits sans leur signe ; et si un facteur vaut 0, le produit vaut 0, car $a \times 0 = 0$. On admet ici que changer l'ordre des facteurs ou les regrouper ne change pas le produit.

À retenir : Ce qu'il faut retenir

Deux facteurs négatifs, pris ensemble, donnent un nombre positif. On les associe donc deux par deux.

Si aucun facteur n'est nul, seul compte, pour le signe, le nombre de facteurs négatifs : pair ou impair.

S'il est pair, le produit est positif ; s'il est impair, il est négatif.

Vérifie : Cinq facteurs négatifs

Un produit compte 5 facteurs négatifs et aucun facteur nul. On associe les facteurs négatifs deux par deux. Que se passe-t-il ?

A. Deux paires et un facteur négatif seul : le produit est négatif.

Juste.

Juste. Les paires donnent des nombres positifs ; le facteur seul rend le produit négatif.

B. Deux paires et un facteur négatif seul : le produit est positif.

Faux.

Faux. Les paires donnent des nombres positifs, mais le facteur seul reste négatif. Un positif fois un négatif donne un négatif.

C. On forme cinq paires : le produit est positif.

Faux.

Faux. Une paire contient deux facteurs : avec cinq facteurs, on forme deux paires seulement.

Correction

Avec 5 facteurs négatifs, on forme 2 paires, et il en reste 1.

Chaque paire donne un nombre positif, d'après la règle des signes. Le facteur restant est négatif : le produit est négatif.

C'est le cas d'un nombre impair de facteurs négatifs.

Calculer un produit de plusieurs facteurs

Méthode : calculer un produit de plusieurs facteurs

1. **Un facteur nul ?** Si l'un des facteurs vaut 0, le produit vaut 0.
2. **Le signe.** Compte les facteurs négatifs. Un nombre pair donne un produit positif ; un nombre impair, un produit négatif.
3. **Les regroupements.** Multiplie les nombres écrits sans leur signe, dans l'ordre le plus commode.
4. **Le résultat.** Écris le produit avec son signe.

Exemple : Un regroupement commode

Calculons $Q = (-4) \times 2{,}7 \times (-5) \times (-2)$.

- **Un facteur nul ?** Non.
- **Le signe** : trois facteurs négatifs, le produit est négatif.
- **Les regroupements** : $4 \times 5 \times 2 = 40$, puis $40 \times 2{,}7 = 108$.

Donc :

$$Q = -108$$

Vérifie : Un produit de quatre facteurs

Combien vaut $(-3{,}7) \times 12 \times 0 \times (-5)$?

A. 222

Faux.

Faux. Tu as oublié le facteur 0.

B. -222

Faux.

Faux. Tu as oublié le facteur 0, et le signe : deux facteurs négatifs donnent un produit positif.

C. $3{,}3$

Faux.

Faux. Tu as additionné les facteurs. Ici, on les multiplie.

D. 0

Juste.

Juste. L'un des facteurs vaut 0 : le produit vaut 0.

Correction

L'un des facteurs vaut 0. Le produit vaut donc 0, quels que soient les autres facteurs.

> Inutile de compter les facteurs négatifs.

Calculer une expression

Rappel des priorités : on calcule d'abord ce qui est entre parenthèses. Puis viennent les produits et les quotients, de gauche à droite, enfin les sommes et les différences.

Ces priorités restent les mêmes avec les nombres relatifs.

Méthode : calculer une expression avec des relatifs

1. **Les parenthèses.** Calcule d'abord ce qu'elles contiennent.
2. **Les produits et les quotients.** Effectue-les ensuite, de gauche à droite, avec la règle des signes.
3. **Les sommes et les différences.** Termine par elles, de gauche à droite.
4. **Une étape par ligne.** Récris l'expression après chaque calcul.

Exemple : Un carnet d'épargne

Omar note ses opérations sur son carnet d'épargne : 50 pour un dépôt de 50 dirhams, -15 pour un retrait de 15 dirhams.

Ce mois-ci, il fait 2 dépôts et 4 retraits. Les produits se calculent avant la somme :

$$\begin{aligned} E &= 2 \times 50 + 4 \times (-15) \\ &= 100 + (-60) \\ &= 40 \end{aligned}$$

Son épargne a augmenté de 40 dirhams.

À toi : une expression

Calcule $F = 7 - 3 \times (-4) + (-2) \times (-1) \times (-5)$.

Indice 1
Repère les produits : ils passent avant la somme et la différence.
Indice 2
Calcule $3 \times (-4)$, puis le produit des trois facteurs $(-2) \times (-1) \times (-5)$.
Indice 3
Point délicat : soustraire -12, c'est ajouter son opposé, 12.

Réponse
Les produits passent en premier. On a $3 \times (-4) = -12$.

Le produit $(-2) \times (-1) \times (-5)$ a trois facteurs négatifs : il est négatif et vaut -10.

On remplace chaque produit par sa valeur, puis on calcule de gauche à droite :

$$\begin{aligned} F &= 7 - (-12) + (-10) \\ &= 7 + 12 + (-10) \\ &= 9 \end{aligned}$$

Remarque : Coin devoir : calculer une expression

En devoir, on te demande : « Calcule $G = (-3) \times 5 - 2 \times (-6)$. »

Rédaction modèle : « On calcule d'abord les produits : $(-3) \times 5 = -15$ et $2 \times (-6) = -12$. Donc $G = -15 - (-12) = -15 + 12 = -3$. »

Écris une étape par ligne. Chaque produit montre la règle des signes utilisée.

Inverse et quotient

L'inverse d'un nombre

Devine : Le nombre qui donne 1

Par quel nombre faut-il multiplier -4 pour obtenir 1 ?

A. 4

Faux.

Faux. On a $(-4) \times 4 = -16$.

B. $-0{,}25$

Juste.

Juste. $(-4) \times (-0{,}25) = 1$: même signe, et $4 \times 0{,}25 = 1$.

C. $0{,}25$

Faux.

Faux. $(-4) \times 0{,}25 = -1$: signes contraires, le produit est négatif.

D. -4

Faux.

Faux. On a $(-4) \times (-4) = 16$.

Correction

On cherche un nombre qui, multiplié par -4, donne 1.

Le produit 1 est positif : ce nombre a le même signe que -4. Comme $4 \times 0{,}25 = 1$, ce nombre est $-0{,}25$:

$$(-4) \times (-0{,}25) = 1$$

Exemple : Des produits égaux à 1

On a $2 \times 0{,}5 = 1$, $(-5) \times (-0{,}2) = 1$ et $8 \times 0{,}125 = 1$. Chaque fois, deux nombres donnent 1 quand on les multiplie.

Définition : Inverse d'un nombre non nul

Soit a un nombre relatif non nul. L'**inverse** de a est le nombre qui, multiplié par a, donne 1. On le note $\frac{1}{a}$:

$$a \times \frac{1}{a} = 1.$$

Le nombre 0 n'a pas d'inverse : multiplié par n'importe quel nombre, il donne 0, jamais 1.

Exemple : Trouver un inverse

- L'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$, c'est-à-dire $0{,}2$.
- L'inverse de -2 est $-0{,}5$, car $(-2) \times (-0{,}5) = 1$.
- Un nombre et son inverse ont le même signe : leur produit, 1, est positif.

Le quotient

Rappel de l'écriture fractionnaire : $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, en divisant le haut et le bas par 4.

Rappel du primaire : $12 : 8 = 1{,}5$, car $8 \times 1{,}5 = 12$.

Devine : Partager une dette

Quatre amis doivent ensemble 60 dirhams. Cette dette s'écrit -60.

Ils la partagent à parts égales. Quel nombre décrit la part de chacun ?

A. -15

Juste.
Juste. Chacun doit 15 dirhams : $4 \times (-15) = -60$.

B. 15

Faux.
Faux. Chacun doit de l'argent : sa part est une dette, donc un nombre négatif.

C. -240

Faux.
Faux. Tu as multiplié par 4. Or on partage : chaque part est plus petite que la dette entière.

D. -56

Faux.

Faux. Tu as ajouté 4 à -60. Partager, c'est diviser.

Correction

La part de chacun est le nombre qui, multiplié par 4, donne -60.

On a $4 \times 15 = 60$, et ce produit doit être négatif. Chaque part vaut donc -15 :

$$4 \times (-15) = -60$$

Définition : Quotient de deux nombres relatifs

Soit a et b deux nombres relatifs, avec b non nul. Le **quotient** de a par b est le nombre q tel que $b \times q = a$. On le note $\frac{a}{b}$ ou $a : b$.

Dans l'écriture $\frac{a}{b}$, le nombre a est le **numérateur** et le nombre b est le **dénominateur**. On ne divise jamais par 0.

Exemple : Un quotient se vérifie par un produit

En clair : $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, redonne a.

- $\frac{-60}{4} = -15$, car $4 \times (-15) = -60$.
- $\frac{-21}{-3} = 7$, car $(-3) \times 7 = -21$.
- Dans $\frac{-21}{-3}$, le numérateur est -21 et le dénominateur est -3.

Diviser, c'est multiplier par l'inverse

Devine : Deux calculs à la calculatrice

Nadia tape $(-6) : 0{,}5$ sur sa calculatrice, puis $(-6) \times 2$. Que remarque-t-elle ?

A. Les deux résultats sont égaux à -3.

Faux.

Faux. -3 est la moitié de -6. Or diviser par $0{,}5$ ne donne pas la moitié.

B. Le premier vaut 12, le second -12.

Faux.

Faux. Les deux calculs ont un nombre négatif et un nombre positif : les deux résultats sont négatifs.

C. Les deux résultats sont égaux à -12.

Juste.

Juste. Diviser par $0{,}5$ ou multiplier par 2 donne le même résultat.

Correction
On a $(-6) : 0{,}5 = -12$, car $0{,}5 \times (-12) = -6$. Et $(-6) \times 2 = -12$.

Or 2 est l'inverse de $0{,}5$: diviser par $0{,}5$ revient à multiplier par 2.

Propriété : Quotient, inverse et règle des signes

Soit a et b deux nombres relatifs, avec b non nul.

- Diviser par b, c'est multiplier par l'inverse de b :

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

- Si a est non nul, le quotient $\frac{a}{b}$ suit la règle des signes du produit : il est **positif** si a et b ont le même signe, **négatif** s'ils sont de signes contraires.
- On peut donc déplacer un signe $-$: $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.

Remarque

Ce résultat est admis.

Tu l'as observé à la calculatrice : diviser par un nombre donne le même résultat que multiplier par son inverse.

Exemple : Le signe d'un quotient

- $\frac{-18}{6} = -3$: signes contraires, quotient négatif.
- $\frac{-4{,}2}{-0{,}7} = 6$: même signe, quotient positif.
- $\frac{9}{-12} = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}$: on place le signe $-$ devant la fraction, puis on simplifie par 3.

Exemple : Multiplier par l'inverse

Diviser par $0{,}25$, c'est multiplier par 4, l'inverse de $0{,}25$:

$$\frac{-3}{0{,}25} = (-3) \times 4 = -12$$

De même, l'inverse de $-0{,}5$ est -2 :

$$\frac{7}{-0{,}5} = 7 \times (-2) = -14$$

Calculer un quotient

Méthode : calculer un quotient de deux relatifs

1. **Le dénominateur.** Vérifie qu'il n'est pas nul : on ne divise jamais par 0.
2. **Le signe.** Même signe : quotient positif. Signes contraires : quotient négatif.
3. **Le calcul.** Divise les nombres écrits sans leur signe, ou simplifie la fraction.
4. **Le résultat.** Écris-le avec son signe, par exemple $-\frac{5}{3}$.

Attention : jamais de division par zéro

- ✗ $\frac{-7}{0}$ n'existe pas : aucun nombre multiplié par 0 ne donne -7.
- ✓ $\frac{0}{-7} = 0$, car $(-7) \times 0 = 0$.

Le nombre 0 n'a donc pas d'inverse.

À toi : inverse et quotients

1. Donne l'inverse de $-0{,}5$.
2. Calcule $\frac{-35}{-5}$ et $\frac{4{,}8}{-1{,}2}$.
3. Simplifie $\frac{-14}{21}$.

Indice 1

Pour l'inverse, cherche le nombre qui, multiplié par $-0{,}5$, donne 1.

Indice 2

Pour chaque quotient, trouve d'abord le signe. Divise ensuite : $35 : 5$ et $4{,}8 : 1{,}2$.

Indice 3

Point délicat : pour $\frac{-14}{21}$, cherche un nombre qui divise 14 et 21. Place ensuite le signe $-$ devant la fraction.

Réponse

1. L'inverse de $-0{,}5$ est -2, car $(-0{,}5) \times (-2) = 1$.
2. $\frac{-35}{-5} = 7$: même signe. $\frac{4{,}8}{-1{,}2} = -4$: signes contraires.
3. $\frac{-14}{21} = -\frac{14}{21} = -\frac{2}{3}$, car $14 = 7 \times 2$ et $21 = 7 \times 3$.

Valeurs approchées d'un quotient

Un quotient qui ne tombe pas juste

Devine : Une baisse heure par heure

Une nuit d'hiver, la température baisse de 10 degrés en 3 heures, toujours au même rythme. Le changement par heure est le quotient $\frac{-10}{3}$. Entre quels nombres entiers se trouve-t-il ?

A. Entre -3 et -2

Faux.

Faux. Écrit sans son signe, le quotient dépasse 3, car $3 \times 3 = 9$. Il est donc plus petit que -3.

B. Entre -4 et -3

Juste.

Juste. Sans son signe, le quotient est entre 3 et 4. Avec son signe $-$, il est entre -4 et -3.

C. Entre 3 et 4

Faux.

Faux. Le quotient d'un nombre négatif par un nombre positif est négatif.

Correction

On a $3 \times 3 = 9$ et $3 \times 4 = 12$: le quotient $\frac{10}{3}$ est entre 3 et 4.

Le quotient $\frac{-10}{3}$ est négatif : il est entre -4 et -3.

Rappel du primaire : la division posée de 10 par 3 ne s'arrête jamais. On obtient $3{,}3$, puis $3{,}33$, puis $3{,}333$: le chiffre 3 se répète sans fin.

Définition : Valeurs approchées d'un quotient

Soit q un quotient de deux nombres relatifs, de dénominateur non nul.

- La **valeur approchée par défaut** de q **à l'unité près** est le nombre entier relatif d tel que $d \leq q < d + 1$. Le nombre $d + 1$ est la **valeur approchée par excès** de q à l'unité près.
- De même, **au dixième près**, la valeur approchée par défaut est le nombre d à un chiffre après la virgule tel que $d \leq q < d + 0{,}1$; la valeur approchée par excès est $d + 0{,}1$.
- **Au centième près**, on remplace $0{,}1$ par $0{,}01$, avec d à deux chiffres après la virgule.

L'écriture $d \leq q < d + 0{,}1$ est un **encadrement** de q.

Exemple : Encadrer un quotient négatif

En clair : on cherche deux nombres qui encadrent q et qui sont séparés d'une unité, d'un dixième ou d'un centième. Le plus petit est la valeur par défaut, le plus grand la valeur par excès.

Pour $q = \dfrac{-10}{3}$:

- **À l'unité près** : $-4 \leq q < -3$. La valeur par défaut est -4, la valeur par excès est -3.
- **Au dixième près** : $-3{,}4 \leq q < -3{,}3$. Par défaut $-3{,}4$, par excès $-3{,}3$.

La valeur par défaut d'un quotient négatif est la plus éloignée de 0.

Encadrer à la main ou à la calculatrice

Méthode : encadrer un quotient

1. **Le quotient sans son signe.** Calcule-le par une division posée ou à la calculatrice.
2. **La précision.** Repère si on demande l'unité, le dixième ou le centième.
3. **Les chiffres.** Garde les chiffres jusqu'à cette précision, sans arrondir : appelle ce nombre n.
4. **Le nombre suivant.** Ajoute à n la précision : 1, $0{,}1$ ou $0{,}01$: appelle-le m.
5. **Le signe.** Quotient positif : valeur par défaut n, valeur par excès m. Quotient négatif : valeur par défaut $-m$, valeur par excès $-n$.
6. **L'encadrement.** Écris : valeur par défaut $\leq q <$ valeur par excès.

Cas particulier : si un quotient négatif tombe juste à cette précision, il est égal à $-n$: $-n$ est alors sa valeur par défaut, et sa valeur par excès est $-n$ plus la précision ($-n + 1$, $-n + 0{,}1$ ou $-n + 0{,}01$).

Exemple : Une division posée

La division posée de 17 par 6 donne $2{,}83$, puis le chiffre 3 se répète.

Au centième près :

- $2{,}83 \leq \dfrac{17}{6} < 2{,}84$;
- $-2{,}84 \leq \dfrac{-17}{6} < -2{,}83$.

Pour le quotient négatif, la valeur par défaut est $-2{,}84$.

Exemple : Avec la calculatrice

Pour $(-47) : 6$, l'écran affiche $-7{,}833333333$.

Au centième près, on garde $7{,}83$. Le quotient est négatif : la valeur par excès est $-7{,}83$ et la valeur par défaut est $-7{,}84$.

$$-7{,}84 \leq \frac{-47}{6} < -7{,}83$$

Trouve l'erreur : La réponse de Lina

Lina écrit : « Au dixième près, la valeur par défaut de $\frac{-8}{3}$ est $-2{,}6$. » A-t-elle raison ?

A. Elle a raison.

Faux.

Faux. Le nombre $-2{,}6$ est plus grand que le quotient : c'est la valeur par excès.

B. La bonne valeur est $-2{,}5$.

Faux.

Faux. Le nombre $-2{,}5$ est plus grand que le quotient, et à plus d'un dixième de lui.

C. La bonne valeur est $-2{,}7$.

Juste.

Juste. On a $-2{,}7 \leq \frac{-8}{3} < -2{,}6$.

D. La bonne valeur est -3.

Faux.

Faux. C'est la valeur par défaut à l'unité près, pas au dixième près.

Correction

La division posée de 8 par 3 donne $2{,}66$, et le chiffre 6 se répète. Donc :

$$-2{,}7 \leq \frac{-8}{3} < -2{,}6$$

La valeur par défaut est $-2{,}7$; Lina a donné la valeur par excès.

Bien écrire une valeur approchée

Attention : l'écran de la calculatrice

Pour $(-5) : 7$, l'écran affiche $-0{,}7142857143$. Ce nombre n'est pas égal au quotient : la calculatrice a arrondi le dernier chiffre.

- ✗ $\frac{-5}{7} = -0{,}7142857143$
- ✓ $\frac{-5}{7} \approx -0{,}7142857143$, ou mieux, un encadrement : $-0{,}72 \leq \frac{-5}{7} < -0{,}71$.

Le signe $\approx$ se lit « est environ égal à ».

Vérifie : Ce que dit l'écran

Pour $(-8) : 7$, l'écran affiche $-1{,}142857143$. Quelle écriture est juste ?

A. $\dfrac{-8}{7} = -1{,}142857143$

Faux.

Faux. L'écran montre une valeur approchée : les chiffres du quotient exact ne s'arrêtent jamais.

B. $-1{,}15 \leq \dfrac{-8}{7} < -1{,}14$

Juste.

Juste. On garde $1{,}14$; le quotient est négatif, donc $-1{,}14$ est la valeur par excès.

C. $-1{,}14 \leq \dfrac{-8}{7} < -1{,}13$

Faux.

Faux. Le quotient est plus petit que $-1{,}14$: cet encadrement ne le contient pas.

Correction

L'écran donne une valeur approchée, pas le quotient exact.

Au centième près, on garde $1{,}14$. Le quotient est négatif :

$$-1{,}15 \leq \frac{-8}{7} < -1{,}14$$

À toi : encadrer

Un plongeur descend de 25 mètres en 7 minutes, au même rythme. Prenons la surface de l'eau comme niveau 0 : son changement de niveau par minute est $q = \dfrac{-25}{7}$. Donne les valeurs approchées de q par défaut et par excès au dixième près, puis l'encadrement.

Indice 1

Commence par la division posée de 25 par 7, sans le signe.

Indice 2

Continue la division jusqu'au dixième. Garde un seul chiffre après la virgule, sans arrondir.

Indice 3

Point délicat : le quotient est négatif. La valeur par défaut est la plus éloignée de 0.

Réponse

La division posée donne $3{,}57$ et d'autres chiffres. Au dixième près :

$$3{,}5 \leq \frac{25}{7} < 3{,}6$$

Le quotient q est négatif, donc :

$$-3{,}6 \leq q < -3{,}5$$

La valeur par défaut est $-3{,}6$, la valeur par excès est $-3{,}5$.

Remarque : Coin devoir : encadrer un quotient

En devoir, on te demande : « Encadre $\dfrac{-23}{9}$ à l'unité près, puis au dixième près. »

Rédaction modèle : « La division posée de 23 par 9 donne $2{,}5$, puis $2{,}55$: le chiffre 5 se répète. Le quotient est négatif. À l'unité près : $-3 \leq \dfrac{-23}{9} < -2$. Au dixième près : $-2{,}6 \leq \dfrac{-23}{9} < -2{,}5$. »

Écris toujours le signe du quotient avant d'encadrer.

Puissances d'un nombre relatif

Un produit de facteurs égaux

Devine : Cinq facteurs égaux

Le produit $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ compte 5 facteurs égaux à 2. Combien vaut-il ?

A. 10

Faux.

Faux. $10 = 2 \times 5$: tu as multiplié 2 par le nombre de facteurs.

B. 32

Juste.

Juste. $2 \times 2 = 4$, puis 8, puis 16, puis 32.

C. 25

Faux.

Faux. $25 = 5 \times 5$: tu as échangé le facteur et le nombre de facteurs.

D. 16

Faux.

Faux. 16 est le produit de quatre facteurs égaux à 2 seulement.

Correction

On multiplie un facteur à la fois : $2 \times 2 = 4$, $4 \times 2 = 8$, $8 \times 2 = 16$, $16 \times 2 = 32$.

Le produit vaut 32.

Exemple : Une écriture courte

On écrit :

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

C'est une **puissance** de 2. On lit « 2 exposant 5 » : le petit nombre 5 s'appelle l'**exposant**, le nombre 2 s'appelle la **base**.

De même, $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = (-3)^4$.

Définition : Puissance d'un nombre relatif

Soit a un nombre relatif et n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. La **puissance** a^n est le produit de n facteurs tous égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

On lit « a exposant n ». Le nombre a est la **base** et le nombre n est l'**exposant**. On lit a^2 « a au carré » et a^3 « a au cube ».

Par convention, $a^1 = a$ et, si a est non nul, $a^0 = 1$.

Exemple : Calculer des puissances

En clair : a^n est le produit de n facteurs égaux à a.

- $5^2 = 5 \times 5 = 25$: « 5 au carré ».
- $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$: « -2 au cube ».
- $0{,}3^2 = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$.
- $(-7)^1 = -7$ et $(-7)^0 = 1$, par convention : on convient que $a^1 = a$, et que $a^0 = 1$ si a n'est pas nul.

Le signe d'une puissance

Devine : Pair ou impair

On a $(-1)^2 = 1$, $(-1)^3 = -1$ et $(-1)^4 = 1$. Que vaut $(-1)^7$?

A. 1

Faux.

Faux. Le résultat vaut 1 seulement pour un exposant pair. Or 7 est impair.

B. -1

Juste.

Juste. Sept facteurs négatifs : un nombre impair, donc un résultat négatif.

C. -7

Faux.

Faux. Tu as multiplié -1 par l'exposant. Or $(-1)^7$ est un produit de sept facteurs égaux à -1.

Correction

$(-1)^7$ est le produit de 7 facteurs égaux à -1.

Ce produit compte 7 facteurs négatifs, un nombre impair : il est négatif. Écrit sans son signe, il vaut 1. Donc :

$$(-1)^7 = -1$$

Propriété : Signe d'une puissance

Soit a un nombre relatif non nul et n un entier naturel non nul.

- Si a est positif, alors a^n est positif.
- Si a est négatif, alors a^n est **positif** quand l'exposant n est **pair**, et **négatif** quand n est **impair**.

Démonstration

Idée de la preuve. Si n vaut au moins 2, la puissance a^n est un produit de n facteurs égaux à a. Si a est positif, tous les facteurs sont positifs, donc le produit est positif. Si a est négatif, ce produit compte exactement n facteurs négatifs : d'après la règle du produit de plusieurs nombres relatifs, il est positif si n est pair, négatif si n est impair. Pour $n = 1$, on a $a^1 = a$, qui a le signe de a ; et 1 est impair.

À retenir : Ce qu'il faut retenir

Une puissance d'un nombre négatif (exposant au moins égal à 2) est un produit dont tous les facteurs sont négatifs. Le nombre de ces facteurs est l'exposant.

La règle du produit de plusieurs facteurs donne donc le signe : exposant pair, résultat positif ; exposant impair, résultat négatif.

Exemple : Trouver le signe d'abord

- $(-2)^6$: exposant pair, résultat positif. On a $(-2)^6 = 64$.
- $(-0{,}5)^3$: exposant impair, résultat négatif. On a $(-0{,}5)^3 = -0{,}125$.
- $4^3 = 64$: la base est positive, le résultat aussi.

Calculer sans tomber dans les pièges

Méthode : calculer une puissance

1. **La base et l'exposant.** Repère la base, et regarde si elle est entre parenthèses.
2. **Le signe.** Base négative : exposant pair, résultat positif ; exposant impair, résultat négatif.
3. **Le calcul.** Multiplie la base écrite sans son signe par elle-même, un facteur à la fois.
4. **Le résultat.** Écris le nombre obtenu avec son signe.

Attention : les parenthèses changent tout

L'exposant porte seulement sur ce qui est juste avant lui.

- ✗ $-3^2 = 9$
- ✓ $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$, alors que $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$.

Un nombre négatif élevé à une puissance s'écrit toujours entre parenthèses.

Trouve l'erreur : Le calcul de Rania

Rania écrit : $4^3 = 12$. Quelle est son erreur ?

A. Elle a multiplié la base par l'exposant.

Juste.

Juste. $4 \times 3 = 12$, mais $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

B. Elle aurait dû trouver un nombre négatif.

Faux.

Faux. La base 4 est positive : la puissance est positive.

C. Son calcul est juste, il n'y a pas d'erreur.

Faux.

Faux. 4^3 est un produit de trois facteurs égaux à 4, pas 4×3.

Correction

Une puissance est un produit de facteurs égaux :

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

Rania a calculé $4 \times 3 = 12$: elle a pris l'exposant pour un facteur.

Exemple : Une puissance dans une expression

Nouvelle priorité. On calcule d'abord ce qui est entre parenthèses, puis les puissances, puis les produits et les quotients, enfin les sommes et les différences.

Dans $E = 2 \times (-3)^2 - 5$, la puissance se calcule en premier : $(-3)^2 = 9$. Viennent ensuite le produit, puis la différence :

$$\begin{aligned} E &= 2 \times 9 - 5 \\ &= 18 - 5 \\ &= 13 \end{aligned}$$

À toi : puissances et signes

Calcule $A = (-2)^5$, $B = -2^4$, $C = (-1{,}5)^2$ et $D = (-10)^0$.

Indice 1
Pour chaque puissance, repère la base : est-elle entre parenthèses ?
Indice 2
Trouve le signe avec l'exposant, pair ou impair. Calcule ensuite 2^5, 2^4 et $1{,}5 \times 1{,}5$.
Indice 3
Point délicat : dans B, la base est 2, et non -2. Pour D, regarde l'exposant et relis la convention vue dans les exemples.

Réponse
- $A = -32$: la base -2 est négative et l'exposant 5 est impair.
- $B = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$: l'exposant ne porte que sur 2.
- $C = 2{,}25$: exposant pair, et $1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$.
- $D = 1$, par convention.

Produit de puissances

Compter les facteurs

Devine : Deux puissances de 3

On écrit $3^2 \times 3^4$ avec tous ses facteurs : $(3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$. Quelle puissance de 3 obtiens-tu ?

A. 3^6

Juste.
Juste. Il y a $2 + 4 = 6$ facteurs égaux à 3.

B. 3^8

Faux.
Faux. Tu as multiplié les exposants. Compte plutôt les facteurs : 2, puis 4.

C. 9^6

Faux.
Faux. La base reste 3 : chaque facteur est un 3.

Correction
Il y a 2 facteurs, puis 4 facteurs, tous égaux à 3 : en tout $2 + 4 = 6$ facteurs.

Donc $3^2 \times 3^4 = 3^6$, c'est-à-dire 729.

Exemple : Avec une base négative

Le produit $(-2)^3 \times (-2)^2$ compte $3 + 2 = 5$ facteurs égaux à -2. Donc :

$$(-2)^3 \times (-2)^2 = (-2)^5 = -32$$

On vérifie : $(-8) \times 4 = -32$.

Propriété : Produit de puissances

Soit a et b deux nombres relatifs, et n et m deux entiers naturels non nuls.

- **Même base** : $a^n \times a^m = a^{n+m}$. On garde la base et on additionne les exposants.
- **Puissance d'un produit** : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$.

Démonstration

Idée de la preuve. On compte les facteurs. Le produit $a^n \times a^m$ s'écrit avec n facteurs égaux à a, suivis de m facteurs égaux à a : il y a en tout $n + m$ facteurs égaux à a, c'est donc a^{n+m}. Le produit $(a \times b)^n$ compte n fois le facteur $a \times b$; en changeant l'ordre des facteurs, on regroupe les n facteurs a et les n facteurs b, ce qui donne $a^n \times b^n$. Les cas où un exposant vaut 1 se traitent de même, avec $a^1 = a$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir

- **Même base** : on compte les facteurs, on garde la base et on additionne les exposants.
- **Puissance d'un produit** : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$. Chaque facteur reçoit l'exposant ; on le voit en changeant l'ordre des facteurs.

Vérifie : Puissance d'un produit

On écrit $(2 \times 5)^3 = (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$. Comment obtient-on ensuite $2^3 \times 5^3$?

A. On additionne les deux exposants 3.

Faux.

Faux. On additionne les exposants pour des puissances de même base. Ici, les bases 2 et 5 sont différentes.

B. On multiplie l'exposant par 2, puis par 5.

Faux.

Faux. L'exposant n'est pas un facteur : il compte les facteurs.

C. On change l'ordre des facteurs pour grouper les 2 et les 5.

Juste.

Juste. On range les trois facteurs 2 ensemble, puis les trois facteurs 5.

Correction

Le produit compte trois facteurs 2 et trois facteurs 5. On peut changer l'ordre des facteurs :

$$\begin{aligned} & 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \\ &= 2^3 \times 5^3 \end{aligned}$$

On vérifie : $10^3 = 1\,000$ et $8 \times 125 = 1\,000$.

Utiliser les deux règles

Exemple : Réduire une écriture

- $5^3 \times 5^4 = 5^7$.
- $(-4)^2 \times (-4)^3 = (-4)^5$.
- $(3 \times 2)^4 = 3^4 \times 2^4 = 81 \times 16 = 1\,296$. On retrouve $6^4 = 1\,296$.
- $2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 = 1\,000$: la règle se lit aussi à l'envers, pour regrouper deux puissances de même exposant.

Exemple : Un produit avec un facteur négatif

On applique la puissance d'un produit :

$$\begin{aligned} (-2 \times 3)^2 &= (-2)^2 \times 3^2 \\ &= 4 \times 9 \\ &= 36 \end{aligned}$$

On vérifie : $-2 \times 3 = -6$ et $(-6)^2 = 36$.

Vérifie : Une seule puissance

Quelle écriture est égale à $(-5)^2 \times (-5)^3 \times (-5)$?

A. $(-5)^5$

Faux.

Faux. Le dernier facteur -5 compte aussi : c'est $(-5)^1$.

B. $(-5)^6$

Juste.

Juste. Il y a $2 + 3 + 1 = 6$ facteurs égaux à -5.

C. -5^6

Faux.

Faux. -5^6 est négatif, car l'exposant ne porte que sur 5. Or $(-5)^6$ est positif.

Correction

Le facteur -5 s'écrit $(-5)^1$. On additionne les exposants : $2 + 3 + 1 = 6$.

Le produit est $(-5)^6$. C'est un nombre positif, car l'exposant est pair.

Éviter le piège de l'exposant

Attention : l'exposant n'est pas un facteur

- ✗ $2^3 \times 2^4 = 2^{12}$ et ✗ $5^2 = 10$
- ✓ $2^3 \times 2^4 = 2^7 = 128$ et ✓ $5^2 = 5 \times 5 = 25$

On additionne les exposants d'une même base ; on ne les multiplie pas.

À toi : réduire

Écris sous la forme d'une seule puissance : $A = 7^2 \times 7^5$ et $B = (-3)^4 \times (-3)$. Calcule ensuite $C = (0{,}5 \times 4)^3$ de deux façons.

Indice 1
Pour A et B, la base est la même : compte les facteurs.
Indice 2
Dans B, le facteur -3 s'écrit $(-3)^1$: il y a $4 + 1$ facteurs.
Indice 3
Point délicat : pour C, calcule d'abord $0{,}5 \times 4 = 2$. Vérifie ensuite avec $0{,}5^3 \times 4^3$.

Réponse
- $A = 7^7$.
- $B = (-3)^5$, qui est négatif : $B = -243$.
- $C = 2^3 = 8$, et aussi $0{,}5^3 \times 4^3 = 0{,}125 \times 64 = 8$.

Puissances de 10 et écriture scientifique

Les puissances de 10

Devine : Des zéros à compter

On a $10^2 = 100$ et $10^3 = 1\,000$. Combien de zéros compte l'écriture de 10^6 ?

A. 6
Juste.
Juste. Six facteurs 10, donc six zéros.

B. 7
Faux.
Faux. $10^1 = 10$ a un seul zéro : l'exposant donne le nombre de zéros.

C. 60

Faux.

Faux. Tu as multiplié l'exposant par 10. Or l'exposant compte les facteurs 10.

Correction

10^6 est le produit de 6 facteurs égaux à 10. Chaque facteur ajoute un zéro :

$$10^6 = 1\,000\,000$$

Cette écriture compte 6 zéros.

Rappel du primaire : multiplier un nombre décimal par 10, c'est déplacer sa virgule d'un rang vers la droite. Ainsi, $4{,}7 \times 10 = 47$ et $0{,}52 \times 10 = 5{,}2$.

Propriété : Puissances de 10

Soit n un entier naturel non nul.

- Le nombre 10^n s'écrit avec le chiffre 1 suivi de n zéros. Par exemple, $10^3 = 1\,000$.
- Multiplier un nombre décimal par 10^n, c'est déplacer sa virgule de n rangs vers la droite, en ajoutant des zéros si nécessaire.

Démonstration

Idée de la preuve. La puissance 10^n est le produit de n facteurs égaux à 10. Multiplier par 10 déplace la virgule d'un rang vers la droite, comme on l'a appris à l'école primaire. Partir de 1 et multiplier n fois par 10 ajoute donc n zéros après le chiffre 1. De même, multiplier un nombre décimal par 10^n, c'est le multiplier n fois de suite par 10 (on regroupe les facteurs, ce qui est admis) : sa virgule avance de n rangs.

À retenir : Ce qu'il faut retenir

Multiplier par 10^n, c'est multiplier par 10, puis encore par 10, en tout n fois. Chaque multiplication par 10 fait avancer la virgule d'un rang.

Exemple : Déplacer la virgule

- $3{,}82 \times 10^2 = 382$: la virgule avance de 2 rangs.
- $0{,}6 \times 10^4 = 6\,000$: on ajoute des zéros.
- $(-1{,}25) \times 10^3 = -1\,250$: le signe reste le même.

L'écriture scientifique

Devine : La distance de la Terre au Soleil

La Terre est à environ $150\,000\,000$ kilomètres du Soleil. Laquelle de ces écritures est égale à ce nombre ?

A. $1{,}5 \times 10^{7}$

Faux.

Faux. $1{,}5 \times 10^{7} = 15\,000\,000$: il manque un zéro.

B. 15×10^{8}

Faux.

Faux. $15 \times 10^{8} = 1\,500\,000\,000$: c'est dix fois trop.

C. $1{,}5 \times 10^{8}$

Juste.

Juste. La virgule de $1{,}5$ avance de 8 rangs : on obtient $150\,000\,000$.

Correction

On a $1{,}5 \times 10^{8} = 150\,000\,000$: la virgule de $1{,}5$ avance de 8 rangs.

Cette écriture a un seul chiffre non nul avant la virgule ($1{,}5$ est entre 1 et 10) : c'est une écriture scientifique.

Définition : Écriture scientifique

Un nombre décimal relatif non nul est écrit en **écriture scientifique** lorsqu'il est écrit sous la forme $a \times 10^{n}$, où :

- a est un nombre décimal relatif qui, écrit sans son signe, a **un seul chiffre non nul avant la virgule** : il est au moins égal à 1 et strictement inférieur à 10 ;
- n est un entier naturel.

Dans ce chapitre, l'exposant n est un entier naturel : on n'écrit ainsi que des nombres qui, écrits sans leur signe, sont au moins égaux à 1.

Exemple : Reconnaître une écriture scientifique

En clair : c'est l'écriture $a \times 10^{n}$, avec a écrit sans son signe entre 1 et 10, 10 exclu.

- La Lune est à environ $384\,000$ kilomètres de la Terre, soit $3{,}84 \times 10^{5}$ kilomètres. C'est une écriture scientifique : $3{,}84$ a un seul chiffre non nul avant la virgule.
- $-7{,}2 \times 10^{3}$ en est une aussi : écrit sans son signe, $7{,}2$ est entre 1 et 10.
- $38{,}4 \times 10^{4}$ n'en est pas une : $38{,}4$ a deux chiffres avant la virgule.

Méthode : écrire un nombre en écriture scientifique

1. **Le nombre.** Écrit sans son signe, il est au moins égal à 1. S'il est entier, sa virgule est cachée tout à droite : $52\,600$ s'écrit aussi $52\,600{,}0$.
2. **La virgule.** Place-la juste après le premier chiffre non nul du nombre écrit sans son signe : tu obtiens a.
3. **L'exposant.** Compte de combien de rangs la virgule a reculé vers la gauche : c'est n.
4. **L'écriture.** Écris $a \times 10^{n}$, avec le signe du nombre de départ.
5. **Le contrôle.** Avance la virgule de a de n rangs vers la droite : tu dois retrouver le nombre.

Écrire et contrôler

Exemple : Pas à pas

Écrivons $-52\,600$ en écriture scientifique.

- **Le nombre** : sans son signe, c'est $52\,600$, un entier ; sa virgule est tout à droite.
- **La virgule** : on la place après le 5 et on obtient $5{,}26$.
- **L'exposant** : la virgule a reculé de 4 rangs vers la gauche, donc $n = 4$.
- **L'écriture** : $-52\,600 = -5{,}26 \times 10^{4}$.
- **Le contrôle** : $5{,}26 \times 10^{4} = 52\,600$.

Attention : un seul chiffre non nul avant la virgule

- ✗ 47×10^{3} n'est pas une écriture scientifique : 47 a deux chiffres avant la virgule.
- ✗ $0{,}9 \times 10^{2}$ non plus : $0{,}9$ est plus petit que 1.
- ✓ $47\,000 = 4{,}7 \times 10^{4}$ et $0{,}9 \times 10^{2} = 9 \times 10^{1}$.

L'égalité $47\,000 = 47 \times 10^{3}$ est juste, mais cette écriture n'est pas scientifique.

À toi : écriture scientifique

Écris en écriture scientifique : $A = 8\,300$, $B = -406\,000$, $C = 25 \times 10^{3}$ et $D = 7$.

Indice 1
Place la virgule après le premier chiffre non nul, puis compte les rangs.
Indice 2
Pour C, écris d'abord le nombre en entier : $25 \times 10^{3} = 25\,000$.

Indice 3

Point délicat : pour D, la virgule ne bouge pas. Quel exposant de 10 faut-il alors écrire ? Pense à la convention $a^0 = 1$.

Réponse

- $A = 8{,}3 \times 10^3$.
- $B = -4{,}06 \times 10^5$: le signe reste devant.
- $C = 2{,}5 \times 10^4$.
- $D = 7 \times 10^0$, car $10^0 = 1$.

Remarque : Coin devoir : un produit en écriture scientifique

En devoir, on te demande : « Calcule $A = 4 \times 10^3 \times 6 \times 10^2$ et donne le résultat en écriture scientifique. »

Rédaction modèle : « On change l'ordre des facteurs : $A = (4 \times 6) \times (10^3 \times 10^2) = 24 \times 10^5$. Or $24 = 2{,}4 \times 10^1$, donc $A = 2{,}4 \times 10^1 \times 10^5 = 2{,}4 \times 10^6$. »

Termine par un contrôle : $2{,}4 \times 10^6 = 2\,400\,000$.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : Ce qu'il faut savoir faire

- Calculer le produit de deux nombres relatifs avec la règle des signes.
- Trouver le signe d'un produit de plusieurs facteurs en comptant les facteurs négatifs.
- Calculer une expression avec des relatifs en respectant les priorités.
- Trouver l'inverse d'un nombre non nul et calculer un quotient de deux relatifs.
- Encadrer un quotient par ses valeurs approchées par défaut et par excès.
- Calculer une puissance et trouver son signe.
- Écrire un produit de puissances de même base sous la forme d'une seule puissance.
- Calculer avec les puissances de 10 et écrire un nombre en écriture scientifique.

Tu sais maintenant multiplier, diviser et élever à une puissance un nombre relatif. Garde un réflexe : le signe d'abord, le calcul ensuite.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Les nombres décimaux relatifs : multiplication, division et puissances » (1ac · general · mathematiques)