BURHAN

Opérations sur les nombres entiers et décimaux positifs : Résumé

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/nombres-entiers-et-decimaux/resume

Chapitre	Semestre
Opérations sur les nombres entiers et décimaux positifs	Semestre 1

Expressions et priorités

> **À retenir**
>
> Une même écriture doit donner le même résultat pour tous : les priorités fixent l'ordre des calculs.

Définition : Expression numérique

Une **expression numérique** est une écriture formée de nombres, de signes d'opérations ($+$, $-$, $\times$, $\div$), et parfois de parenthèses ou d'un trait de fraction. Un nombre seul est aussi une expression numérique.

Calculer une expression numérique, c'est effectuer ses opérations pour trouver le nombre qu'elle représente. Ce nombre est la **valeur** de l'expression.

Définition : Priorités des opérations sans parenthèses

Dans une expression **sans parenthèses** :

- on effectue d'abord les **multiplications** et les **divisions** ;
- on effectue ensuite les **additions** et les **soustractions**.

On dit que la multiplication et la division sont **prioritaires** sur l'addition et la soustraction.

Lorsque plusieurs opérations ont la même priorité, on les effectue **de gauche à droite**.

Exemple

On calcule le produit et le quotient, puis on va de gauche à droite :

$$\begin{aligned} & 14 - 2 \times 5 + 8 \div 4 \\ & = 14 - 10 + 2 \\ & = 4 + 2 = 6 \end{aligned}$$

Attention : Le produit avant la somme

✗ $9 + 5 \times 3 = 14 \times 3 = 42$

✓ $9 + 5 \times 3 = 9 + 15 = 24$

Le produit se calcule avant la somme.

Attention : Même priorité : de gauche à droite

✗ $30 - 12 - 8 = 30 - 4 = 26$

✓ $30 - 12 - 8 = 18 - 8 = 10$

De même, $48 \div 8 \times 2 = 6 \times 2 = 12$, pas 3.

Parenthèses et trait de fraction

À retenir

Les parenthèses et le trait de fraction passent avant tout le reste.

Définition : Parenthèses et trait de fraction

Dans une expression **avec parenthèses**, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses. S'il y a des parenthèses à l'intérieur d'autres parenthèses, on commence par les plus intérieures. Entre parenthèses, on respecte les priorités des opérations.

Un **trait de fraction** joue le rôle de parenthèses : on calcule d'abord le numérateur et le dénominateur, puis on effectue la division. Ainsi, pour des nombres a, b, c et d, avec un dénominateur non nul (différent de 0) :

$$\frac{a+b}{c} = (a+b) \div c$$

et

$$\frac{a+b}{c+d} = (a+b) \div (c+d).$$

Méthode : Calculer une expression

1. **Contenu des parenthèses**, de la plus intérieure vers l'extérieur ; numérateur et dénominateur d'un trait de fraction.
2. **Produits et quotients**, en lisant de gauche à droite.
3. **Sommes et différences**, en lisant de gauche à droite.
4. **Une ligne par étape**, le reste recopié tel quel.

Exemple

La parenthèse intérieure d'abord, puis la grande parenthèse :

$$\begin{aligned} &5 \times (11 - (2 + 3)) \\ &= 5 \times (11 - 5) \\ &= 5 \times 6 = 30 \end{aligned}$$

Le numérateur et le dénominateur d'abord, puis la division :

$$\frac{35 - 5}{3 \times 2} = \frac{30}{6} = 5$$

Nommer et traduire

> **À retenir**
>
> La dernière opération effectuée donne le nom de l'expression.

Définition : Somme, différence, produit, quotient

On nomme une expression d'après la **dernière opération** effectuée quand on la calcule en respectant les priorités :

- si c'est une addition, l'expression est une **somme** ; ce que l'on additionne, un nombre ou une expression, s'appelle ses **termes** ;
- si c'est une soustraction, l'expression est une **différence** ; ce qui est avant et ce qui est après le signe $-$ s'appelle aussi ses **termes** ;
- si c'est une multiplication, l'expression est un **produit** ; ce que l'on multiplie, un nombre ou une expression, s'appelle ses **facteurs** ;
- si c'est une division, l'expression est un **quotient** ; dans $a \div b$, avec b différent de 0, a est le **dividende** et b le **diviseur**.

Exemple

$(7 + 8) \div 5$ est un quotient, de valeur 3. Sans parenthèses, $7 + 8 \div 5$ est une somme, de valeur $8{,}6$.

Méthode : Traduire une phrase

1. **Chercher le dernier calcul** de la phrase : il fixe la nature de l'expression.
2. **Placer des parenthèses** autour de toute somme ou différence à multiplier, à diviser, à soustraire, ou par laquelle on divise.
3. **Recalculer** l'écriture obtenue avec les priorités pour vérifier qu'elle suit la phrase.

Attention : Ne pas oublier les parenthèses

« Retire 4 de 13, puis multiplie par 2 » :

✓ $(13 - 4) \times 2 = 18$;

✗ $13 - 4 \times 2$, qui vaut 5, dit autre chose.

La distributivité

À retenir

Un facteur devant une parenthèse multiplie chacun des termes qu'elle contient.

Propriété : Distributivité de la multiplication

Soit k, a et b des nombres entiers ou décimaux positifs. Les lettres désignent des nombres. On a :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b,$$

et, lorsque a est supérieur ou égal à b :

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b.$$

On dit que la multiplication est **distributive** sur l'addition et sur la soustraction. Les égalités restent vraies avec le facteur k placé à droite :

$$(a + b) \times k = a \times k + b \times k.$$

Devant une parenthèse ou devant une lettre, on peut ne pas écrire le signe $\times$: $k \times (a + b)$ s'écrit aussi $k(a + b)$, et $3 \times (2 + 5)$ s'écrit $3(2 + 5)$. Ainsi $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$.

Remarque

Cette règle est admise dans ce chapitre : on la reconnaît et on l'utilise, sans la démontrer.

Somme	Différence, avec a supérieur ou égal à b
$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$	$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$
Facteur à droite	**Signe omis**
$(a + b) \times k = a \times k + b \times k$	$k(a + b) = ka + kb$

Exemple

Le 9 multiplie chacun des deux termes :

$$\begin{aligned} & 9 \times (6 + 0{,}5) \\ & = 9 \times 6 + 9 \times 0{,}5 \\ & = 54 + 4{,}5 = 58{,}5 \end{aligned}$$

Attention : Multiplier chaque terme

✗ $6 \times (7 + 4) = 42 + 4$

✓ $6 \times (7 + 4) = 42 + 24 = 66$

Chaque terme est multiplié.

Développer et factoriser

À retenir

La même égalité se lit dans deux sens : de gauche à droite on développe, de droite à gauche on factorise.

Définition : Développer, factoriser

Développer un produit dont un facteur est une somme ou une différence, c'est l'écrire sous la forme d'une somme ou d'une différence. On emploie la distributivité de gauche à droite :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b,$$

et, lorsque a est supérieur ou égal à b :

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b.$$

Factoriser une somme ou une différence, c'est l'écrire sous la forme d'un produit. On emploie la distributivité de droite à gauche :

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b).$$

Le nombre k, présent dans chacun des deux termes, est le **facteur commun**.

Méthode : Développer pour calculer de tête

1. **Écrire un facteur** comme un nombre rond plus ou moins un petit nombre.
2. **Multiplier** l'autre facteur par chacun des deux nombres.
3. **Finir** par l'addition ou la soustraction des deux produits.

Exemple

On écrit $21 = 20 + 1$, puis on développe :

$$\begin{aligned} 14 \times 21 &= 14 \times (20 + 1) \\ &= 280 + 14 \\ &= 294 \end{aligned}$$

Méthode : Factoriser pour simplifier

1. **Trouver** le nombre présent dans les deux produits.
2. **Le sortir** devant une parenthèse où restent les deux autres nombres, avec le même signe.
3. **Calculer** cette parenthèse, puis le produit.

Exemple

Le facteur commun est $3{,}6$:

$$\begin{aligned} &3{,}6 \times 8 + 3{,}6 \times 2 \\ &= 3{,}6 \times (8 + 2) \\ &= 3{,}6 \times 10 = 36 \end{aligned}$$

Contrôler et retenir

Méthode : Contrôler un résultat

1. **Arrondir** chaque nombre à un nombre rond et calculer de tête un ordre de grandeur.
2. **Taper** l'expression comme elle est écrite, avec des parenthèses autour d'un numérateur ou d'un dénominateur.
3. **Confronter** l'affichage à l'estimation : un grand écart signale une erreur.

Exemple

Pour $41{,}2 \times 9{,}8$, on estime $40 \times 10 = 400$. Le produit exact, $403{,}76$, est proche : il est vraisemblable.

Attention : Trait de fraction et calculatrice

On a $\dfrac{45 + 15}{5} = 12$.

✗ Taper $45 + 15 \div 5$ donne 48.

✓ Taper $(45 + 15) \div 5$ donne 12.

Méthode : Quelle règle pour quel calcul ?

1. **Sans parenthèses** : $\times$ et $\div$, puis $+$ et $-$, de gauche à droite.
2. **Parenthèses ou trait de fraction** : leur contenu en premier.
3. **Nommer une expression** : regarder la dernière opération.
4. **Produit par un nombre presque rond** : développer.
5. **Deux produits avec un facteur commun** : factoriser.
6. **Résultat douteux** : ordre de grandeur et calculatrice.

Ces règles servent dans tous les calculs de l'année : relis-les avant chaque devoir.