BURHAN

Opérations sur les nombres entiers et décimaux positifs

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/nombres-entiers-et-decimaux/cours

Chapitre	Semestre
Opérations sur les nombres entiers et décimaux positifs	Semestre 1

Une écriture, un seul résultat

Chez l'épicier du quartier, Salma achète 3 kilogrammes de tomates à $4{,}50$ dirhams le kilogramme. Elle prend aussi un pain à 2 dirhams.

L'épicier écrit sur un papier : $2 + 3 \times 4{,}50$. Le petit frère de Salma lit de gauche à droite et annonce $22{,}50$ dirhams. Salma, elle, trouve $15{,}50$ dirhams.

Devine

Qui a raison ? Pense à ce que Salma paie vraiment.

A. Le petit frère : $22{,}50$ dirhams.

Faux.

Faux. Il a ajouté le pain aux kilogrammes de tomates : $2 + 3 = 5$, puis $5 \times 4{,}50$. Mais le pain ne coûte pas $4{,}50$ dirhams le kilogramme.

B. Salma : $15{,}50$ dirhams.

Juste.

Juste. Les tomates coûtent $3 \times 4{,}50 = 13{,}50$ dirhams. On ajoute le pain : $13{,}50 + 2 = 15{,}50$ dirhams.

C. Les deux, selon la façon de lire.

Faux.

Faux. Salma paie un seul prix. Une écriture doit donc donner un seul résultat.

Indice 1

Calcule d'abord le prix des tomates seules.

Correction

Salma a raison.

Les tomates coûtent $3 \times 4{,}50 = 13{,}50$ dirhams. Avec le pain à 2 dirhams, le total est $15{,}50$ dirhams.

Pour lire $2 + 3 \times 4{,}50$ comme Salma, il faut une règle : la multiplication se calcule avant l'addition.

Une écriture mathématique doit avoir **un seul** résultat, quelle que soit la personne qui la lit. Dans ce chapitre, tu apprends les règles qui fixent l'ordre des calculs.

Tu utilises ce que tu sais déjà : additionner, soustraire, multiplier et diviser. Tu apprends aussi une règle très utile pour calculer de tête : la distributivité.

Expressions et priorités

Découvrir

Rappel du primaire : tu sais additionner, soustraire, multiplier et diviser des nombres entiers et des nombres décimaux. Le résultat d'une addition s'appelle une somme, celui d'une multiplication un produit.

Vérifie

Yassine achète 2 kilogrammes d'oranges à 7 dirhams le kilogramme, et 1 kilogramme de pommes à 12 dirhams. Quelle écriture donne le prix total ?

A. $2 \times 7 + 12$

Juste.
Juste. Les oranges coûtent $2 \times 7 = 14$ dirhams ; avec les pommes, le total est $14 + 12 = 26$ dirhams.

B. $2 + 7 + 12$

Faux.
Faux. Cette écriture ajoute la quantité d'oranges à leur prix. Elle vaut 21, ce qui n'est pas le prix payé.

C. $2 \times 7 \times 12$

Faux.
Faux. Cette écriture multiplie aussi par le prix des pommes. Elle vaut 168 : bien trop cher.

Indice 1
Qu'est-ce qui est acheté plusieurs fois ? Qu'est-ce qui est acheté une seule fois ?

Correction
Le prix total s'écrit $2 \times 7 + 12$. Les oranges coûtent $2 \times 7 = 14$ dirhams, donc Yassine paie $14 + 12 = 26$ dirhams.

Définition : Expression numérique

Une **expression numérique** est une écriture formée de nombres, de signes d'opérations ($+$, $-$, $\times$, $\div$), et parfois de parenthèses ou d'un trait de fraction. Un nombre seul est aussi une expression numérique.

Calculer une expression numérique, c'est effectuer ses opérations pour trouver le nombre qu'elle représente. Ce nombre est la **valeur** de l'expression.

Exemple

L'écriture $2 \times 7 + 12$ est une expression numérique.

On calcule d'abord le produit 2×7, puis on ajoute 12. On écrit une étape par ligne :

$$\begin{aligned} 2 \times 7 + 12 &= 14 + 12 \\ &= 26 \end{aligned}$$

Sa valeur est 26. Un nombre seul, comme $45{,}8$, est aussi une expression : sa valeur est $45{,}8$.

La règle des priorités

Devine

Calcule $10 + 2 \times 3$ dans ta tête. Quel résultat trouves-tu ?

A. 36

Faux.

Faux. Tu as calculé $10 + 2 = 12$, puis 12×3. La multiplication devait passer en premier.

B. 15

Faux.

Faux. Tu as additionné les trois nombres : $10 + 2 + 3$. Mais le signe entre 2 et 3 est une multiplication.

C. 16

Juste.

Juste. On calcule d'abord $2 \times 3 = 6$, puis $10 + 6 = 16$.

Indice 1

Une seule des deux opérations doit être faite en premier. Laquelle ?

Correction

On trouve 16 : on calcule d'abord le produit $2 \times 3 = 6$, puis la somme $10 + 6 = 16$. Tout le monde lit ainsi cette écriture, grâce à la règle qui suit.

Définition : Priorités des opérations sans parenthèses

Dans une expression **sans parenthèses** :

- on effectue d'abord les **multiplications** et les **divisions** ;
- on effectue ensuite les **additions** et les **soustractions**.

On dit que la multiplication et la division sont **prioritaires** sur l'addition et la soustraction.

Lorsque plusieurs opérations ont la même priorité, on les effectue **de gauche à droite**.

En clair : tu fais d'abord toutes les multiplications et toutes les divisions. Il ne reste alors que des additions et des soustractions. Tu les fais dans l'ordre de lecture, de gauche à droite.

Exemple

On donne un nom à l'expression pour s'y retrouver :

$$A = 25 - 3 \times 4 + 6 \div 2$$

On commence par le produit et le quotient : $3 \times 4 = 12$ et $6 \div 2 = 3$.

Il reste une soustraction et une addition. On les fait de gauche à droite :

$$\begin{aligned} A &= 25 - 12 + 3 \\ &= 13 + 3 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Deux pièges

Attention : le produit d'abord

✗ $6 + 4 \times 2 = 10 \times 2 = 20$

✓ $6 + 4 \times 2 = 6 + 8 = 14$

La multiplication passe avant l'addition, même si elle est écrite après.

Trouve l'erreur

Nadia calcule $18 - 6 + 2$. Elle écrit : $18 - 6 + 2 = 18 - 8 = 10$. Où est l'erreur ?

A. Le résultat est juste, seule la rédaction est fausse.
Faux.
Faux. Le résultat 10 est faux : la bonne valeur est 14.

B. Elle a calculé $6 + 2$ d'abord : il faut aller de gauche à droite.
Juste.
Juste. On calcule $18 - 6 = 12$, puis $12 + 2 = 14$.

C. Il n'y a pas d'erreur : l'addition passe avant la soustraction.
Faux.
Faux. L'addition et la soustraction ont la même priorité : on les fait de gauche à droite.

Indice 1
Relis la règle des priorités : que dit-elle de deux opérations de même priorité ?

Correction

L'addition et la soustraction ont la même priorité. On les fait de gauche à droite : $18 - 6 + 2 = 12 + 2 = 14$. Nadia a calculé $6 + 2$ trop tôt.

Attention : de gauche à droite

✗ $40 \div 4 \times 2 = 40 \div 8 = 5$

✓ $40 \div 4 \times 2 = 10 \times 2 = 20$

La division et la multiplication ont la même priorité : on les fait de gauche à droite.

Méthode

Méthode : calculer une expression sans parenthèses

1. **Repérer** les multiplications et les divisions.
2. **Les effectuer** de gauche à droite, en recopiant le reste de l'expression.
3. **Effectuer** les additions et les soustractions, de gauche à droite.
4. **Vérifier** qu'il ne reste qu'un nombre : c'est la valeur de l'expression.

Exemple

Calculons $B = 7{,}5 + 2{,}5 \times 4 - 1{,}2$.

Le seul produit est $2{,}5 \times 4 = 10$. On le remplace, puis on va de gauche à droite :

$$\begin{aligned} B &= 7{,}5 + 10 - 1{,}2 \\ &= 17{,}5 - 1{,}2 \\ &= 16{,}3 \end{aligned}$$

Vérifie

Quelle est la valeur de $9 + 12 \div 3 \times 2$?

A. 17

Juste.

Juste. $12 \div 3 = 4$, puis $4 \times 2 = 8$, et enfin $9 + 8 = 17$.

B. 14

Faux.

Faux. Tu as commencé par $9 + 12$. La division et la multiplication passent avant l'addition.

C. 11

Faux.

Faux. Tu as calculé 3×2 avant la division. À priorité égale, on va de gauche à droite : $12 \div 3$ d'abord.

Indice 1
Commence par la division, car elle est la plus à gauche des deux opérations prioritaires.

Correction
On calcule $12 \div 3 = 4$, puis $4 \times 2 = 8$. Il reste $9 + 8 = 17$.

À toi

Calcule $C = 30 - 4 \times 5 + 12 \div 3$ et $D = 3{,}2 \times 5 - 6 \div 4$.

Indice 1
Repère d'abord les multiplications et les divisions.
Indice 2
Pour D aussi : calcule le produit et le quotient avant la soustraction.
Indice 3
Point délicat : dans C, après les produits, il reste une soustraction et une addition. On les fait de gauche à droite.

Réponse
Calcul de C. Le produit et le quotient passent d'abord : $4 \times 5 = 20$ et $12 \div 3 = 4$. Ensuite, on va de gauche à droite :

$$\begin{aligned} C &= 30 - 20 + 4 \\ &= 10 + 4 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Calcul de D. On a $3{,}2 \times 5 = 16$ et $6 \div 4 = 1{,}5$. Il reste la soustraction :

$$\begin{aligned} D &= 16 - 1{,}5 \\ &= 14{,}5 \end{aligned}$$

Conclusion. $C = 14$ et $D = 14{,}5$.

Parenthèses et trait de fraction

Découvrir

Devine

Au souk, Hamid achète 2 kilogrammes de dattes à 35 dirhams le kilogramme et 1 kilogramme d'amandes à 90 dirhams. Il paie avec un billet de 200 dirhams. Quelle écriture donne la monnaie rendue ?

A. $200 - 2 \times 35 + 90$

Faux.
Faux. Cette écriture ajoute le prix des amandes au lieu de le retirer. Elle vaut 220 dirhams : plus que le billet.

B. $(200 - 2) \times 35 + 90$
Faux.
Faux. Cette écriture retire 2 kilogrammes d'un billet de 200 dirhams, puis multiplie par 35. Elle ne décrit pas l'achat.

C. $200 - (2 \times 35 + 90)$
Juste.
Juste. On retire du billet tout ce que Hamid paie, regroupé entre parenthèses.

Indice 1
Hamid paie les dattes **et** les amandes : il faut retirer les deux prix.

Correction
La monnaie s'écrit $200 - (2 \times 35 + 90)$: les parenthèses regroupent tout ce que Hamid paie, et on le retire du billet.

Sans parenthèses, $200 - 2 \times 35 + 90$ vaut 220 : plus que le billet. Les parenthèses disent « calcule ceci d'abord ». Elles regroupent ici tout ce que Hamid paie.

Définition : Parenthèses et trait de fraction

Dans une expression **avec parenthèses**, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses. S'il y a des parenthèses à l'intérieur d'autres parenthèses, on commence par les plus intérieures. Entre parenthèses, on respecte les priorités des opérations.

Un **trait de fraction** joue le rôle de parenthèses : on calcule d'abord le numérateur et le dénominateur, puis on effectue la division. Ainsi, pour des nombres a, b, c et d, avec un dénominateur non nul (différent de 0) :

$$\frac{a+b}{c} = (a+b) \div c \quad \text{et} \quad \frac{a+b}{c+d} = (a+b) \div (c+d).$$

Exemple

Calculons la monnaie de Hamid :

$$E = 200 - (2 \times 35 + 90)$$

La parenthèse passe en premier. À l'intérieur, le produit se fait avant l'addition : $2 \times 35 = 70$.

$$\begin{aligned} E &= 200 - (70 + 90) \\ &= 200 - 160 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Hamid reçoit 40 dirhams.

Parenthèses emboîtées et trait de fraction

Exemple

Des parenthèses sont **emboîtées** quand l'une est à l'intérieur de l'autre. Prenons $F = 3 \times (20 - (4 + 6) \times 1{,}5)$.

La parenthèse la plus intérieure est $(4 + 6)$: elle vaut 10. Dans la grande parenthèse, le produit passe ensuite avant la soustraction.

$$\begin{aligned} F &= 3 \times (20 - 10 \times 1{,}5) \\ &= 3 \times (20 - 15) \\ &= 3 \times 5 = 15 \end{aligned}$$

Rappel du primaire : dans une fraction, le nombre du haut est le **numérateur** et le nombre du bas est le **dénominateur**.

Vérifie

Combien vaut $\dfrac{18 + 12}{6}$?

A. 20

Faux.

Faux. Tu as calculé $18 + 12 \div 6$. Le trait de fraction regroupe tout le numérateur : on calcule $18 + 12$ d'abord.

B. 5

Juste.

Juste. Le numérateur vaut $18 + 12 = 30$, et $30 \div 6 = 5$.

C. 15

Faux.

Faux. Tu as divisé seulement 18 par 6, puis ajouté 12. Le trait de fraction joue le rôle de parenthèses.

Indice 1

Que faut-il calculer en entier avant de diviser ?

Correction

On calcule d'abord le numérateur : $18 + 12 = 30$. Puis on divise : $30 \div 6 = 5$.

Exemple

Prenons $G = \dfrac{4{,}5 \times 2 + 7}{6 - 2}$.

Au numérateur, le produit passe d'abord : $4{,}5 \times 2 = 9$. Au dénominateur, $6 - 2 = 4$. On divise en dernier :

$$\begin{aligned} G &= \frac{9 + 7}{4} \\ &= \frac{16}{4} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Méthode : calculer une expression

1. **Parenthèses d'abord** : calcule le contenu de chaque parenthèse, en commençant par la plus intérieure.
2. **Trait de fraction** : calcule le numérateur et le dénominateur, puis divise.
3. **Multiplications et divisions** : de gauche à droite.
4. **Additions et soustractions** : de gauche à droite.

Contrôler un résultat

Un **ordre de grandeur** est un résultat approché, trouvé de tête avec des **nombres ronds** comme 5, 10, 20, 50 ou 100. Le signe $\approx$ se lit « est environ égal à ».

Méthode : contrôler un résultat

1. **Estimer** : remplace chaque nombre par un nombre rond proche, et calcule de tête un ordre de grandeur.
2. **Saisir** l'expression telle qu'elle est écrite ; vérifie d'abord ta calculatrice avec $2 + 3 \times 4$, qui doit afficher 14.
3. **Pour un trait de fraction**, ajoute des parenthèses autour du numérateur et du dénominateur.
4. **Comparer** l'affichage et ton estimation.

Exemple

Contrôlons $H = 19{,}8 \times 5{,}1 + 3$.

Ordre de grandeur : $19{,}8$ est proche de 20 et $5{,}1$ est proche de 5, donc :

$$H \approx 20 \times 5 + 3 = 103$$

La calculatrice affiche $103{,}98$, car $19{,}8 \times 5{,}1 = 100{,}98$. Ce résultat est proche de l'estimation : il est vraisemblable.

Vérifie

Quel est un bon ordre de grandeur de $4{,}9 \times 10{,}2$?

A. 10

Faux.

Faux. Tu as seulement gardé $10{,}2$ arrondi. Il faut aussi arrondir $4{,}9$ et multiplier.

B. 15

Faux.

Faux. Tu as additionné $5 + 10$ au lieu de multiplier.

C. 50

Juste.

Juste. $4{,}9$ est proche de 5 et $10{,}2$ est proche de 10, donc le produit est environ $5 \times 10 = 50$.

Indice 1

Arrondis chacun des deux nombres à un nombre rond, puis garde l'opération écrite.

Correction

On arrondit $4{,}9$ à 5 et $10{,}2$ à 10 : $4{,}9 \times 10{,}2 \approx 5 \times 10 = 50$. Le produit exact, $49{,}98$, est bien proche de 50.

Attention : le trait de fraction à la calculatrice

Pour calculer $\dfrac{24 + 8}{4}$ à la calculatrice :

✗ saisir $24 + 8 \div 4$ affiche 26 ;

✓ saisir $(24 + 8) \div 4$ affiche 8.

Si ta calculatrice affiche 20 pour $2 + 3 \times 4$, elle calcule dans l'ordre de saisie : tape alors chaque calcul prioritaire à part.

À toi

À toi

Calcule $K = 50 - (3{,}5 + 1{,}5) \times 6$ et $L = \dfrac{7 \times 4 - 3}{2 + 3}$.

Indice 1

Commence par la parenthèse de K, et par le numérateur et le dénominateur de L.

Indice 2

Pour K : $3{,}5 + 1{,}5 = 5$, donc $K = 50 - 5 \times 6$. Pour L : dans le numérateur, le produit passe avant la soustraction.

Indice 3

Point délicat : dans K, on ne calcule pas $50 - 5$ d'abord ; le produit 5×6 passe avant la soustraction.

Réponse

Calcul de K. La parenthèse vaut $3{,}5 + 1{,}5 = 5$. Le produit passe ensuite avant la soustraction :

$$\begin{aligned} K &= 50 - 5 \times 6 \\ &= 50 - 30 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Calcul de L. Au numérateur, $7 \times 4 = 28$, puis $28 - 3 = 25$. Le dénominateur vaut $2 + 3 = 5$. On divise :

$$L = 25 \div 5 = 5$$

Conclusion. $K = 20$ et $L = 5$.

Remarque : Coin devoir : rédiger un calcul

En devoir, écris une ligne par étape et nomme la règle employée. Pour $M = 12 - (2 + 1) \times 3$:

« D'après la règle des parenthèses, on calcule d'abord $2 + 1$: $M = 12 - 3 \times 3$. D'après la règle des priorités, on calcule ensuite le produit : $M = 12 - 9$. Donc $M = 3$. »

Nommer et écrire une expression

Nommer une expression

Devine

Dans $5 + 3 \times 2$, quelle opération fais-tu en dernier ?

A. L'addition.

Juste.

Juste. On calcule d'abord $3 \times 2 = 6$, puis on termine par $5 + 6$.

B. La multiplication.

Faux.

Faux. La multiplication est prioritaire : elle se fait en premier, pas en dernier.

C. Aucune : les deux à la fois.

Faux.

Faux. On fait toujours un calcul après l'autre, selon les priorités.

Indice 1

Applique la règle des priorités, puis regarde le dernier calcul.

Correction
On calcule d'abord le produit $3 \times 2 = 6$. La dernière opération est l'addition $5 + 6 = 11$.

La dernière opération donne son nom à l'expression. C'est elle qui fabrique le résultat final. Dans $5 + 3 \times 2$, on termine par une addition : cette expression est une somme.

Définition : Somme, différence, produit, quotient

On nomme une expression d'après la **dernière opération** effectuée quand on la calcule en respectant les priorités :

- si c'est une addition, l'expression est une **somme** ; ce que l'on additionne, un nombre ou une expression, s'appelle ses **termes** ;
- si c'est une soustraction, l'expression est une **différence** ; ce qui est avant et ce qui est après le signe $-$ s'appelle aussi ses **termes** ;
- si c'est une multiplication, l'expression est un **produit** ; ce que l'on multiplie, un nombre ou une expression, s'appelle ses **facteurs** ;
- si c'est une division, l'expression est un **quotient** ; dans $a \div b$, avec b différent de 0, a est le **dividende** et b le **diviseur**.

Exemple

- $5 + 3 \times 2$ est une **somme** : ses termes sont 5 et 3×2.
- $(5 + 3) \times 2$ est un **produit** : ses facteurs sont $5 + 3$ et 2.
- $20 - 4 \div 2$ est une **différence** : on termine par la soustraction.
- $\dfrac{20 - 4}{2}$ est un **quotient** : on termine par la division.

Le mot somme désigne à la fois l'expression $5 + 3 \times 2$ et sa valeur 11.

Vérifie

Quelle est la nature de l'expression $(9 - 4) \times 3 + 1$?

A. Un produit.
Faux.
Faux. Il y a bien un signe $\times$, mais ce n'est pas la dernière opération : on ajoute 1 après.

B. Une différence.
Faux.

Faux. La soustraction est dans la parenthèse : elle se fait en premier.

C. Une somme.

Juste.

Juste. On calcule $9 - 4 = 5$, puis $5 \times 3 = 15$, et on termine par $15 + 1$.

Indice 1

Calcule l'expression étape par étape et note la dernière opération.

Correction

On calcule $9 - 4 = 5$, puis $5 \times 3 = 15$, et enfin $15 + 1 = 16$. La dernière opération est une addition : c'est une somme.

Traduire une phrase

Exemple

Un **programme de calcul** est une suite d'instructions, par exemple : « Choisis un nombre, ajoute 4, puis multiplie le résultat par 3. »

Avec le nombre 6, on écrit $(6 + 4) \times 3$. Sa valeur est $10 \times 3 = 30$. Les parenthèses sont nécessaires, car on ajoute 4 avant de multiplier.

Méthode **: traduire une phrase par une expression**

1. **Repérer la dernière opération** : elle donne la nature de l'expression.
2. **Écrire** chaque terme ou chaque facteur.
3. **Placer des parenthèses** autour d'une somme ou d'une différence qui doit être multipliée, divisée, soustraite, ou par laquelle on divise.
4. **Relire** en calculant selon les priorités : tu dois retrouver l'ordre de la phrase.

Exemple

« Le produit de 8 par la somme de $2{,}5$ et $1{,}5$ » : la dernière opération est le produit. On écrit donc $8 \times (2{,}5 + 1{,}5)$, qui vaut $8 \times 4 = 32$.

Attention **: les parenthèses oubliées**

« Ajoute 7 à 5, puis divise le résultat par 4 » :

✗ $5 + 7 \div 4$, qui vaut $6{,}75$;

✓ $(5 + 7) \div 4$, qui vaut 3.

Sans parenthèses, la division passe avant l'addition : on ne traduit plus la même phrase.

Vérifie : Exemple à compléter

Complète l'écriture de la phrase « multiplie 4 par la différence entre 10 et $2{,}5$ » : $4 \times (\ldots)$. Puis calcule.

Indice 1
« La différence entre » deux nombres : lequel s'écrit en premier ?

Réponse
On écrit $4 \times (10 - 2{,}5)$. On calcule la parenthèse : $10 - 2{,}5 = 7{,}5$, puis $4 \times 7{,}5 = 30$.

À toi

À toi

Écris chaque phrase en une seule expression, puis calcule-la.

1. La différence entre 50 et le produit de 6 par 7.
2. « Choisis $3{,}5$, multiplie par 2, ajoute 13, puis divise le résultat par 4. »

Indice 1
Pour chaque phrase, cherche d'abord la dernière opération.
Indice 2
Phrase 1 : la dernière opération est une soustraction, donc l'expression commence par $50 - \ldots$
Indice 3
Point délicat : dans la phrase 2, quel calcul faut-il finir avant de diviser par 4 ?

Réponse
1. On écrit $50 - 6 \times 7$. On calcule le produit d'abord : $50 - 42 = 8$.
2. On écrit $(3{,}5 \times 2 + 13) \div 4$. Dans la parenthèse : $7 + 13 = 20$. Puis $20 \div 4 = 5$.

Remarque : Coin devoir : nommer une expression

En devoir, justifie la nature d'une expression par sa dernière opération :

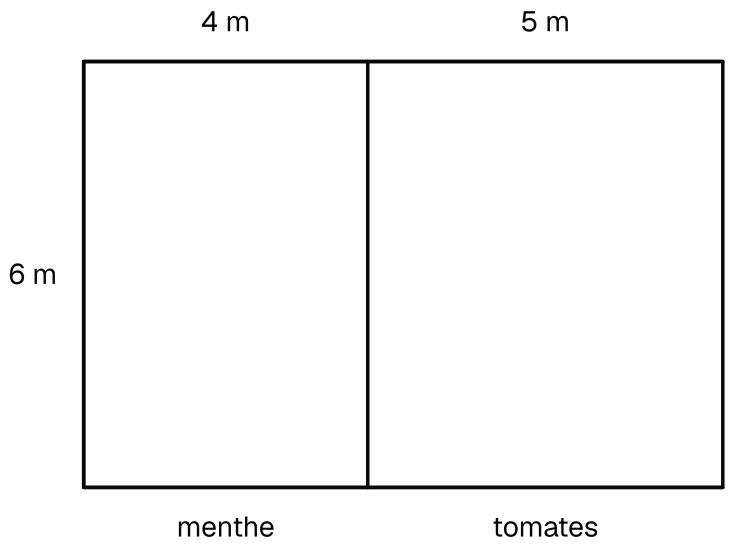
« D'après la règle des priorités, dans $4 \times 6 - 10$, on calcule d'abord le produit 4×6, puis on soustrait 10. La dernière opération est une soustraction, donc cette expression est une différence. »

La distributivité

Découvrir avec un jardin

Rappel du primaire : l'aire d'un rectangle est le produit de sa longueur par sa largeur.

Un jardin rectangulaire mesure 6 mètres de large et 9 mètres de long. Il est partagé en deux parcelles de même largeur : la menthe occupe 4 mètres de long et les tomates 5 mètres. Dessine ce jardin sur ton cahier.



Le jardin de 6 m sur 9 m, coupé en deux parcelles de même largeur : 4 m de menthe, puis 5 m de tomates.

Devine

L'aire totale du jardin s'écrit $6 \times (4 + 5)$. Quelle autre écriture donne aussi cette aire ?

A. $6 \times 4 + 5 \times 1$

Faux.

Faux. 5×1 est l'aire d'une bande de 1 mètre de large, pas celle des tomates, qui vaut 6×5.

B. $6 \times 4 + 6 \times 5$

Juste.

Juste. C'est l'aire de la menthe plus l'aire des tomates.

C. $6 + 4 \times 5$

Faux.

Faux. Cette écriture multiplie la longueur de la menthe par celle des tomates, puis ajoute la largeur : elle vaut 26 et ne mesure aucune aire du jardin.

Indice 1

Combien de rectangles couvrent le jardin ? Quelle est la largeur de chacun ?

Correction
L'aire totale est la somme des aires des deux parcelles : $6 \times 4 + 6 \times 5$.

Exemple

Calculons l'aire du jardin de deux façons.

Avec le jardin entier, de longueur $4 + 5 = 9$ mètres :

$$6 \times (4 + 5) = 6 \times 9 = 54$$

Parcelle par parcelle, on ajoute l'aire de la menthe et celle des tomates :

$$\begin{aligned} 6 \times 4 + 6 \times 5 &= 24 + 30 \\ &= 54 \end{aligned}$$

Les deux calculs donnent 54 mètres carrés.

En clair : pour multiplier une somme par un nombre, tu multiplies chaque terme par ce nombre, puis tu additionnes. Pour une différence, tu multiplies chaque terme, puis tu soustrais.

La règle

Propriété : Distributivité de la multiplication

Soit k, a et b des nombres entiers ou décimaux positifs. Les lettres désignent des nombres. On a :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b,$$

et, lorsque a est supérieur ou égal à b :

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b.$$

On dit que la multiplication est **distributive** sur l'addition et sur la soustraction. Les égalités restent vraies avec le facteur k placé à droite : $(a + b) \times k = a \times k + b \times k$.

Devant une parenthèse ou devant une lettre, on peut ne pas écrire le signe $\times$: $k \times (a + b)$ s'écrit aussi $k(a + b)$, et $3 \times (2 + 5)$ s'écrit $3(2 + 5)$. Ainsi $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. **Admis** veut dire que nous acceptons cette règle sans la démontrer. Le jardin l'illustre sur un exemple, mais un exemple ne suffit pas à le prouver pour tous les nombres.

Exemple

Avec une différence. La parenthèse d'abord : $7 \times (10 - 3) = 7 \times 7 = 49$.

En distribuant le 7 sur les deux termes :

$$\begin{aligned} 7 \times 10 - 7 \times 3 &= 70 - 21 \\ &= 49 \end{aligned}$$

Avec le facteur à droite. Le 4 multiplie chacun des deux termes :

$$\begin{aligned} &(2 + 0{,}5) \times 4 \\ &= 2 \times 4 + 0{,}5 \times 4 \\ &= 8 + 2 = 10 \end{aligned}$$

Sans le signe $\times$. L'écriture $3(5 + 2)$ veut dire $3 \times (5 + 2)$, qui vaut $3 \times 5 + 3 \times 2 = 21$.

Piège et entraînement

Attention : distribuer à chaque terme

✗ $3 \times (10 + 2) = 30 + 2 = 32$

✓ $3 \times (10 + 2) = 30 + 6 = 36$

Le facteur 3 multiplie **chaque** terme de la parenthèse, donc aussi le 2.

Vérifie

Que vaut $4(2{,}5 + 1)$?

A. $7{,}5$

Faux.

Faux. Tu as ajouté 4 à la parenthèse. Devant une parenthèse, le signe $\times$ est sous-entendu.

B. 11

Faux.

Faux. Tu as multiplié seulement $2{,}5$ par 4. Le 4 multiplie aussi le 1.

C. 14

Juste.

Juste. $4(2{,}5 + 1) = 4 \times 3{,}5 = 14$, ou bien $4 \times 2{,}5 + 4 \times 1 = 10 + 4 = 14$.

Indice 1

L'écriture $4(2{,}5 + 1)$ veut dire $4 \times (2{,}5 + 1)$.

Correction

L'écriture $4(2{,}5 + 1)$ signifie $4 \times (2{,}5 + 1)$. On trouve $4 \times 3{,}5 = 14$.

À toi

Contrôle la distributivité sur l'exemple $8 \times (12{,}5 - 2{,}5)$: calcule-le de deux façons.

Indice 1
Première façon : calcule d'abord la parenthèse.
Indice 2
Seconde façon : distribue le 8, c'est-à-dire calcule $8 \times 12{,}5 - 8 \times 2{,}5$.
Indice 3
Point délicat : le signe $-$ reste entre les deux produits ; on soustrait le second produit du premier.

Réponse
Première façon. On calcule d'abord la parenthèse :

$$\begin{aligned} & 8 \times (12{,}5 - 2{,}5) \\ & = 8 \times 10 \\ & = 80 \end{aligned}$$

Seconde façon. On distribue le 8 sur les deux termes, puis on soustrait :

$$\begin{aligned} & 8 \times 12{,}5 - 8 \times 2{,}5 \\ & = 100 - 20 \\ & = 80 \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux façons donnent 80 : la distributivité est bien vérifiée sur cet exemple.

Développer, factoriser, calculer mentalement

Découvrir

Devine

Au souk, 7 boîtes de thé coûtent 101 dirhams chacune. Calcule de tête le prix total, 7×101.

A. 707

Juste.
Juste. $101 = 100 + 1$, donc $7 \times 101 = 700 + 7 = 707$.

B. 701

Faux.
Faux. Tu as calculé $7 \times 100 + 1$: le 7 doit aussi multiplier le 1.

C. 7007

Faux.
Faux. Ce nombre est 7×1001. Ici, on multiplie 7 par 101.

Indice 1
Écris 101 comme une somme avec un nombre rond.

Correction
On écrit $101 = 100 + 1$. D'après la distributivité, le 7 multiplie le 100 et le 1 :

$$\begin{aligned} 7 \times 101 &= 7 \times (100 + 1) \\ &= 7 \times 100 + 7 \times 1 \\ &= 700 + 7 = 707 \end{aligned}$$

Le thé coûte 707 dirhams.

Définition : Développer, factoriser

Développer un produit dont un facteur est une somme ou une différence, c'est l'écrire sous la forme d'une somme ou d'une différence. On emploie la distributivité de gauche à droite :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b,$$

et, lorsque a est supérieur ou égal à b, $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$.

Factoriser une somme ou une différence, c'est l'écrire sous la forme d'un produit. On emploie la distributivité de droite à gauche :

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b).$$

Le nombre k, présent dans chacun des deux termes, est le **facteur commun**.

En clair : développer, c'est « ouvrir » la parenthèse ; factoriser, c'est la reconstruire autour du nombre qui se répète. C'est la même règle, lue dans un sens puis dans l'autre.

Développer pour calculer de tête

Exemple

Neuf sacs de semoule coûtent 98 dirhams chacun. Pour calculer 9×98 de tête, on écrit $98 = 100 - 2$.

On développe : le 9 multiplie le 100, puis le 2, et on soustrait.

$$\begin{aligned} 9 \times 98 &= 9 \times (100 - 2) \\ &= 9 \times 100 - 9 \times 2 \\ &= 900 - 18 = 882 \end{aligned}$$

Méthode : développer pour calculer de tête

1. **Décomposer** un facteur avec un nombre rond, par exemple $99 = 100 - 1$ ou $1001 = 1000 + 1$.
2. **Distribuer** : multiplie l'autre facteur par chaque terme.
3. **Calculer** les produits, puis la somme ou la différence.

Exemple

Deux autres calculs de tête.

On écrit $1001 = 1000 + 1$, puis on distribue le 12 :

$$\begin{aligned} & 12 \times (1000 + 1) \\ &= 12 \times 1000 + 12 \times 1 \\ &= 12\,012 \end{aligned}$$

On écrit $99 = 100 - 1$. Le produit $4{,}5 \times 100$ vaut 450, et on retire $4{,}5 \times 1$:

$$\begin{aligned} 4{,}5 \times 99 &= 4{,}5 \times (100 - 1) \\ &= 450 - 4{,}5 \\ &= 445{,}5 \end{aligned}$$

Factoriser pour simplifier

Exemple

L'épicier vend 17 sacs de 6 kilogrammes et 17 sacs de 4 kilogrammes de farine.

Dans $17 \times 6 + 17 \times 4$, le nombre 17 est dans les deux termes : c'est le **facteur commun**. On l'écrit une seule fois, devant la parenthèse :

$$\begin{aligned} & 17 \times 6 + 17 \times 4 \\ &= 17 \times (6 + 4) \\ &= 17 \times 10 = 170 \end{aligned}$$

Il vend 170 kilogrammes de farine.

Méthode : factoriser pour simplifier un calcul

1. **Repérer** le facteur commun aux deux termes.
2. **L'écrire** devant une parenthèse qui contient la somme ou la différence des autres facteurs.
3. **Calculer** la parenthèse d'abord, puis le produit.

Exemple

Avec une différence et un décimal. Le facteur commun est $2{,}5$:

$$\begin{aligned} & 2{,}5 \times 37 - 2{,}5 \times 33 \\ &= 2{,}5 \times (37 - 33) \\ &= 2{,}5 \times 4 = 10 \end{aligned}$$

Choisir et rédiger

Vérifie

Pour calculer de tête $0{,}8 \times 46 + 0{,}8 \times 54$, que fais-tu ?

A. J'additionne $46 + 54$, puis j'ajoute $0{,}8$.

Faux.

Faux. On a oublié de multiplier par $0{,}8$: ce calcul donne $100{,}8$, pas la valeur de l'expression.

B. Je factorise par $0{,}8$: $0{,}8 \times (46 + 54) = 80$.

Juste.

Juste. $46 + 54 = 100$, et $0{,}8 \times 100 = 80$.

C. Je multiplie tout : $0{,}8 \times 46 \times 54$.

Faux.

Faux. Cette écriture n'a pas la même valeur : elle remplace l'addition par une multiplication.

Indice 1

Cherche un facteur présent dans les deux termes.

Correction

Le facteur commun est $0{,}8$. On factorise, puis on calcule la parenthèse : $46 + 54 = 100$.

$$\begin{aligned} &0{,}8 \times 46 + 0{,}8 \times 54 \\ &= 0{,}8 \times (46 + 54) \\ &= 0{,}8 \times 100 = 80 \end{aligned}$$

À toi

Calcule de tête $P = 15 \times 99$ et $Q = 6{,}4 \times 7 + 6{,}4 \times 3$.

Indice 1

Regarde les nombres : y en a-t-il un presque rond ? un présent deux fois ?

Indice 2

Pour P : $99 = 100 - 1$; pour Q : quel nombre est dans les deux produits ?

Indice 3

Point délicat : dans P, tu retires 15×1, c'est-à-dire 15, et non 1.

Réponse

Calcul de P. Le nombre 99 est presque rond : $99 = 100 - 1$. On développe : $15 \times 100 = 1500$, et on retire $15 \times 1 = 15$.

$$\begin{aligned} P &= 15 \times (100 - 1) \\ &= 1500 - 15 \\ &= 1485 \end{aligned}$$

Calcul de Q. Le nombre $6{,}4$ est dans les deux produits : on factorise.

$$\begin{aligned} Q &= 6{,}4 \times (7 + 3) \\ &= 6{,}4 \times 10 = 64 \end{aligned}$$

Conclusion. $P = 1485$ et $Q = 64$.

Remarque : Coin devoir : calculer avec la distributivité

En devoir, montre la règle que tu emploies. Écris par exemple : « D'après la distributivité, on a : »

$$\begin{aligned} 25 \times 102 &= 25 \times (100 + 2) \\ &= 2500 + 50 \\ &= 2550 \end{aligned}$$

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : Quelle règle pour quel calcul ?

- Sans parenthèses : d'abord $\times$ et $\div$, puis $+$ et $-$, de gauche à droite.
- Avec des parenthèses ou un trait de fraction : leur contenu d'abord.
- Le nom d'une expression : sa dernière opération.
- Un produit par un nombre proche d'un nombre rond : développe.
- Deux produits avec un facteur commun : factorise.
- Un résultat douteux : estime un ordre de grandeur, puis contrôle à la calculatrice.

Le mot du prof : une écriture mathématique a un seul résultat. Avec ces règles, tout le monde lit le même calcul. Tu t'en serviras dans tous les chapitres de l'année.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Opérations sur les nombres entiers et décimaux positifs » (1ac · general · mathematiques)