BURHAN

Résumé : Les nombres en écriture fractionnaire

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/nombres-en-ecriture-fractionnaire/resume

Chapitre	Semestre
Les nombres en écriture fractionnaire	Semestre 1

Écriture fractionnaire d'un quotient

Définition : Écriture fractionnaire d'un quotient

Soit a et b deux nombres entiers ou décimaux positifs, avec b non nul. Le **quotient** de a par b est le nombre qui, multiplié par b, donne a. On le note $\frac{a}{b}$: c'est une **écriture fractionnaire** de ce nombre.

- a est le **numérateur** et b est le **dénominateur** ;
- on a toujours $b \times \frac{a}{b} = a$;
- lorsque a et b sont des nombres entiers, on dit que $\frac{a}{b}$ est une **fraction**.

Le dénominateur n'est jamais nul. Tout nombre a s'écrit aussi $\frac{a}{1}$.

Exemple : écrire un quotient

En clair : $\frac{a}{b}$ est le nombre qui donne a quand on le multiplie par b.

Le quotient de 7 par 9 s'écrit $\frac{7}{9}$. Son numérateur est 7. Son dénominateur est 9. Pour vérifier, on multiplie par le dénominateur : $9 \times \frac{7}{9} = 7$.

Exemple : un entier, un décimal

Un décimal s'écrit avec un dénominateur 10, 100, $1\,000$, etc. Ainsi, $4{,}3 = \frac{43}{10}$.

Rappel du primaire : « 35 pour cent » signifie « 35 sur 100 », c'est-à-dire $\frac{35}{100}$. Un entier s'écrit avec le dénominateur 1. Ainsi, $5 = \frac{5}{1}$.

Des écritures égales

Propriété : Égalité de deux écritures fractionnaires

Soit a, b et k des nombres entiers ou décimaux positifs, avec b et k non nuls. On ne change pas un nombre en écriture fractionnaire quand on **multiplie** ou quand on **divise** son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Un même nombre a donc plusieurs écritures fractionnaires.

Exemple : changer de dénominateur

On multiplie en haut et en bas par 5 :

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 5}{8 \times 5} = \frac{15}{40}.$$

On divise en haut et en bas par 7 :

$$\frac{21}{28} = \frac{21 \div 7}{28 \div 7} = \frac{3}{4}.$$

Méthode : rendre entier un dénominateur décimal

1. **Compte** les chiffres après la virgule, en haut et en bas. Retiens le plus grand de ces deux nombres.
2. **Multiplie** en haut et en bas par 10 pour un chiffre, par 100 pour deux chiffres, par $1\,000$ pour trois chiffres.
3. **Simplifie** la fraction obtenue : son numérateur et son dénominateur sont maintenant entiers.

Exemple : un dénominateur décimal

Dans $\frac{2{,}7}{0{,}45}$, le dénominateur a deux chiffres après la virgule, le numérateur un seul. Le haut et le bas sont donc multipliés par 100 :

$$\frac{2{,}7}{0{,}45} = \frac{270}{45}.$$

On divise par 5, puis par 9 :

$$\frac{270}{45} = \frac{54}{9} = \frac{6}{1} = 6.$$

Simplifier une fraction

Définition : Simplifier une fraction ; fraction irréductible

Soit une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers, le dénominateur étant non nul.

- **Simplifier** cette fraction, c'est écrire une fraction qui lui est égale, avec un numérateur et un dénominateur plus petits. Pour cela, on divise le numérateur et le dénominateur par un même **diviseur commun**, différent de 1.

- Une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas d'autre diviseur commun que 1 : on ne peut plus la simplifier.

Méthode : simplifier jusqu'à la fraction irréductible

Simplifier, c'est diviser le haut et le bas par un même nombre, et recommencer tant qu'on le peut.

1. **Cherche** un diviseur commun : un nombre qui divise à la fois le numérateur et le dénominateur.
2. **Divise** le numérateur et le dénominateur par ce diviseur.
3. **Recommence** avec la nouvelle fraction. Quand il ne reste aucun diviseur commun autre que 1, la fraction est irréductible.

Critères de divisibilité. Un nombre est divisible par 2 s'il finit par 0, 2, 4, 6 ou 8. Il l'est par 5 s'il finit par 0 ou 5, et par 10 s'il finit par 0. Il l'est par 3 (ou par 9) si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (ou par 9).

Exemple : deux simplifications

126 et 198 sont pairs : on divise par 2. Ensuite, 63 et 99 sont divisibles par 9 :

$$\frac{126}{198} = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}.$$

Le seul diviseur commun de 7 et 11 est 1. La fraction $\frac{7}{11}$ est irréductible.

Attention : Erreur : barrer un terme d'une somme

On simplifie seulement par un nombre qui **multiplie** tout le numérateur et tout le dénominateur.

✗ Dans $\frac{2+9}{2+13}$, barrer les deux 2 donne $\frac{9}{13}$. C'est faux.

✓ On calcule d'abord en haut et en bas : $\frac{2+9}{2+13} = \frac{11}{15}$.

Comparer des écritures fractionnaires

Propriété : Comparer deux écritures fractionnaires de même dénominateur

Soit a, b et c des nombres entiers ou décimaux positifs, avec b non nul. Quand deux écritures fractionnaires ont le **même dénominateur**, la plus grande est celle qui a le **plus grand numérateur** :

- si $a < c$, alors $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$;
- si $a = c$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$;
- si $a > c$, alors $\frac{a}{b} > \frac{c}{b}$.

Propriété : Comparer une écriture fractionnaire et 1

Soit a et b deux nombres entiers ou décimaux positifs, avec b non nul.

- Si $a < b$, alors $\frac{a}{b} < 1$;
- si $a = b$, alors $\frac{a}{b} = 1$;
- si $a > b$, alors $\frac{a}{b} > 1$.

Une écriture fractionnaire est donc plus petite que 1 quand son numérateur est plus petit que son dénominateur.

Exemple : comparer sans calcul

Même dénominateur : $11 > 8$, donc $\frac{11}{13} > \frac{8}{13}$.

Comparaison à 1 : $17 > 16$, donc $\frac{17}{16} > 1$. De même, $9 < 14$, donc $\frac{9}{14} < 1$.

Méthode : comparer deux fractions de dénominateurs différents

Un multiple de 6 est un nombre de la table de 6 : 6, 12, 18, 24…

1. **Choisis** un dénominateur commun : un nombre qui est dans la table des deux dénominateurs. Quand le plus grand dénominateur est dans la table de l'autre, garde-le. Sinon, multiplie les deux dénominateurs.
2. **Réécris** chaque fraction avec ce dénominateur.
3. **Compare** les numérateurs. Les fractions de départ sont rangées dans le même ordre.
4. **Raccourci** : une fraction plus petite que 1 est plus petite qu'une fraction plus grande que 1.

Exemple : réduire au même dénominateur

Pour $\frac{5}{6}$ et $\frac{7}{9}$, le nombre 18 est dans la table de 6 et dans celle de 9 :

$$\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$$
$$\frac{7}{9} = \frac{14}{18}$$

Comme $15 > 14$, on a $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$.

Exemple : ranger trois fractions

Pour ranger $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ et $\frac{11}{16}$, on prend le dénominateur 16 :

$$\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$$
$$\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$$

Comme $10 < 11 < 12$, l'ordre croissant est $\frac{5}{8} < \frac{11}{16} < \frac{3}{4}$.

Attention : Erreur : regarder le seul dénominateur

Le plus grand dénominateur ne désigne pas la plus grande fraction.

✗ « $9 > 5$, donc $\frac{4}{9} > \frac{4}{5}$ » est faux.

✓ Avec le dénominateur 45 : $\frac{4}{5} = \frac{36}{45}$ et $\frac{4}{9} = \frac{20}{45}$. Donc $\frac{4}{5} > \frac{4}{9}$.

Additionner et soustraire

Propriété : Somme et différence de même dénominateur

Soit a, b et c des nombres entiers ou décimaux positifs, avec b non nul. Pour additionner deux écritures fractionnaires de **même dénominateur**, on additionne les numérateurs et on **garde** le dénominateur commun :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

On fait de même pour une différence, lorsque $a \geq c$:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

Exemple : même dénominateur

$$\frac{4}{11} + \frac{5}{11} = \frac{4+5}{11} = \frac{9}{11}.$$
$$\frac{19}{21} - \frac{5}{21} = \frac{19-5}{21} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}.$$

Le dernier résultat se simplifie par 7.

Méthode : additionner ou soustraire avec des dénominateurs différents

1. **Écris** les deux fractions avec un même dénominateur, pris dans la table des deux dénominateurs. Quand le plus grand dénominateur est dans la table de l'autre, garde-le. Sinon, multiplie les deux dénominateurs.
2. **Calcule** la somme ou la différence des numérateurs. Garde tel quel le dénominateur commun.
3. **Simplifie** le résultat jusqu'à la fraction irréductible.

Exemple : un dénominateur multiple de l'autre

Le nombre 14 est un multiple de 7 :

$$\frac{2}{7}+\frac{9}{14}=\frac{4}{14}+\frac{9}{14}=\frac{13}{14}.$$

Exemple : le cas général

Ni 6 ni 8 n'est dans la table de l'autre. Le produit $6\times 8=48$ conviendrait. Mais 24 est plus petit, et il est dans la table de 6 comme dans celle de 8 :

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{8}=\frac{20}{24}-\frac{9}{24}=\frac{11}{24}.$$

Attention : Erreur : additionner les dénominateurs

Les dénominateurs ne s'additionnent jamais.

✗ Écrire $\frac{2}{9}+\frac{5}{27}=\frac{7}{36}$ est faux. Ce résultat est même plus petit que $\frac{2}{9}$.

✓ On passe au dénominateur 27 : $\frac{2}{9}+\frac{5}{27}=\frac{6}{27}+\frac{5}{27}=\frac{11}{27}$.

Multiplier ; fraction d'une quantité

Propriété : Produit de deux écritures fractionnaires

Soit a, b, c et d des nombres entiers ou décimaux positifs, avec b et d non nuls. Pour multiplier deux écritures fractionnaires, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}.$$

En particulier, pour tout nombre entier ou décimal positif k, on a $k\times\frac{a}{b}=\frac{k\times a}{b}$: seul le numérateur est multiplié.

Méthode : simplifier avant de multiplier

1. **Écris** une seule fraction : le produit des numérateurs en haut, le produit des dénominateurs en bas. N'effectue pas encore ces produits.
2. **Décompose** les nombres en produits. Barre chaque facteur présent en haut et en bas.
3. **Multiplie** les facteurs qui restent.

Exemple : un produit simplifié

On écrit une seule fraction :

$$\frac{10}{21} \times \frac{14}{15} = \frac{10 \times 14}{21 \times 15}.$$

On décompose chaque nombre :

$$\frac{10 \times 14}{21 \times 15} = \frac{2 \times 5 \times 2 \times 7}{3 \times 7 \times 3 \times 5}.$$

On barre un 5 et un 7, en haut et en bas :

$$\frac{2 \times 5 \times 2 \times 7}{3 \times 7 \times 3 \times 5} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9}.$$

Exemple : un entier fois une fraction

Un entier multiplie seulement le numérateur : $5 \times \frac{2}{11} = \frac{5 \times 2}{11} = \frac{10}{11}$.

Attention : Erreur : multiplier aussi le dénominateur

L'entier ne multiplie pas le dénominateur.

✗ $2 \times \frac{5}{9} = \frac{10}{18}$ est faux, car $\frac{10}{18}$ est égal à $\frac{5}{9}$.

✓ $2 \times \frac{5}{9} = \frac{2 \times 5}{9} = \frac{10}{9}$.

Définition : Fraction d'une quantité

Soit a et b deux nombres entiers, avec b non nul, et Q une quantité : un nombre, une longueur, une masse, une somme d'argent. **Prendre les $\frac{a}{b}$ de Q**, c'est calculer le produit $\frac{a}{b} \times Q$.

D'après la règle du produit, ce nombre est égal à $\frac{a \times Q}{b}$.

Exemple : une fraction d'un nombre

Les $\frac{3}{5}$ de 40 : $\frac{3}{5} \times 40 = \frac{3 \times 40}{5} = \frac{120}{5} = 24$.

Calculer une expression ; fiche des techniques

Méthode : calculer une expression avec des fractions

1. **Repère** l'ordre des opérations. Tu calcules d'abord dans les parenthèses. Tu fais ensuite les multiplications et les divisions. Tu termines par les additions et les soustractions, en allant de gauche à droite.
2. **Écris** une ligne pour chaque règle appliquée.

3. **Simplifie** le résultat final.

Exemple : la multiplication d'abord

Dans $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$, la multiplication passe avant l'addition :

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{1}{6}+\frac{10}{12}.$$

On simplifie le produit par 2 :

$$\frac{1}{6}+\frac{10}{12}=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}.$$

On additionne les numérateurs :

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{6}{6}=1.$$

Exemple : des parenthèses

Les parenthèses passent en premier :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\right)\times\frac{4}{15}\\&=\left(\frac{7}{8}-\frac{2}{8}\right)\times\frac{4}{15}\\&=\frac{5}{8}\times\frac{4}{15}.\end{aligned}$$

On écrit une seule fraction, sans effectuer les produits :

$$\frac{5}{8}\times\frac{4}{15}=\frac{5\times4}{8\times15}.$$

On divise 5 et 15 par 5, puis 4 et 8 par 4 :

$$\frac{5\times4}{8\times15}=\frac{1\times1}{2\times3}=\frac{1}{6}.$$

Méthode : Quelle technique pour quelle question ?

- **Écris avec un dénominateur donné** : multiplie, ou divise, le haut et le bas par le même nombre.
- **Simplifie** : divise par un diviseur commun, puis recommence jusqu'à la fraction irréductible.
- **Dénominateur décimal** : multiplie le haut et le bas par 10, 100 ou $1\,000$.
- **Compare ou range** : passe au même dénominateur et compare les numérateurs. Tu peux aussi comparer à 1.
- **Somme ou différence** : même dénominateur d'abord, puis calcul sur les numérateurs.
- **Produit** : numérateurs ensemble, dénominateurs ensemble. Simplifie avant de calculer.

- **Prends les … de** : multiplie la fraction par la quantité.
- **Expression** : respecte les priorités, avec une règle par ligne.