BURHAN

Résumé : Le triangle : angles, droites remarquables et cercles

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/le-triangle/resume

Chapitre	Semestre
Le triangle : angles, droites remarquables et cercles	Semestre 1

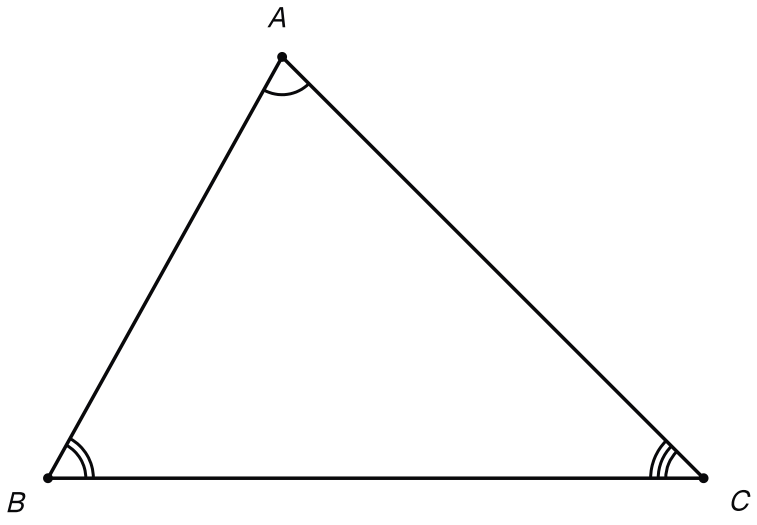
La somme des angles d'un triangle

> **À retenir : Une seule somme à retenir**
>
> Mesure au rapporteur les trois angles d'un triangle, puis additionne-les. Tu trouves $180°$, à l'erreur de mesure près. Grâce à cette somme, tu calcules un angle sans le mesurer.

Propriété : Somme des angles d'un triangle

Dans tout triangle ABC, la somme des mesures des trois angles est égale à $180°$:

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°.$$



Les trois angles du triangle ABC sont repérés par des arcs : leurs mesures additionnées donnent toujours 180 degrés.

Remarque : Statut : admis

Admis ici. La preuve viendra au chapitre « Deux parallèles et une sécante ». En attendant, tu t'en sers comme d'un outil de calcul.

Méthode : trouver le troisième angle

1. **Ajoute** les deux mesures connues.
2. **Retranche** ce total de $180°$.
3. **Écris** la justification : « La somme des angles d'un triangle vaut $180°$. »
4. **Vérifie** que les trois mesures font bien $180°$ au total.

Exemple

Énoncé. Dans le triangle RST, $\widehat{SRT} = 47°$ et $\widehat{RST} = 68°$. Calcule $\widehat{RTS}$.

Calcul. On additionne les deux angles connus, puis on retire ce total de $180°$:

$$47° + 68° = 115°$$
$$180° - 115° = 65°$$

Conclusion. La somme des angles d'un triangle vaut $180°$, donc $\widehat{RTS} = 65°$.

Attention : Un demi-tour, pas un tour

Un tour complet mesure $360°$; les angles d'un triangle n'en font que la moitié.

Prends deux angles obtus, de $100°$ et de $95°$. Ensemble, ils font $195°$, déjà plus que $180°$: ils ne peuvent pas être dans le même triangle.

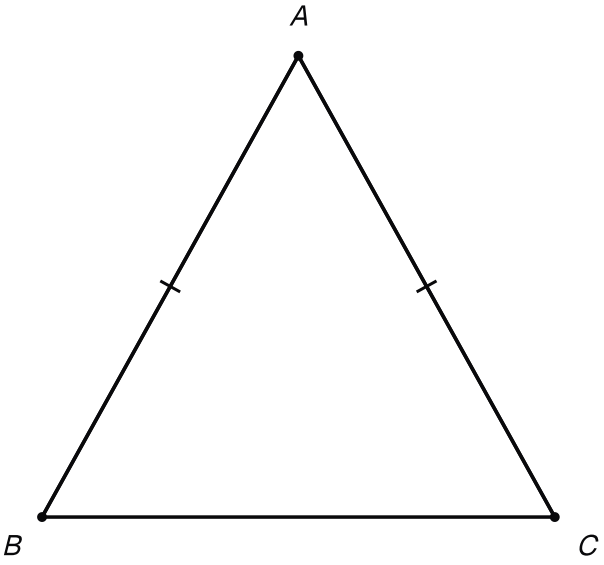
Un triangle ne peut donc pas avoir deux angles obtus.

Triangles particuliers et leurs angles

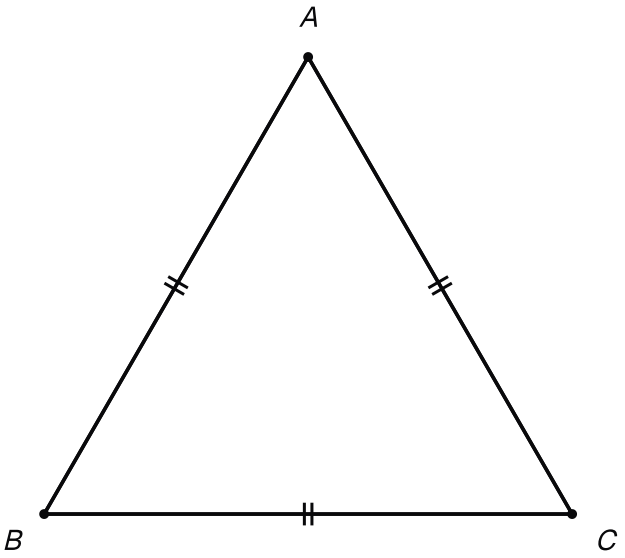
Définition : Triangles particuliers

Soit ABC un triangle.

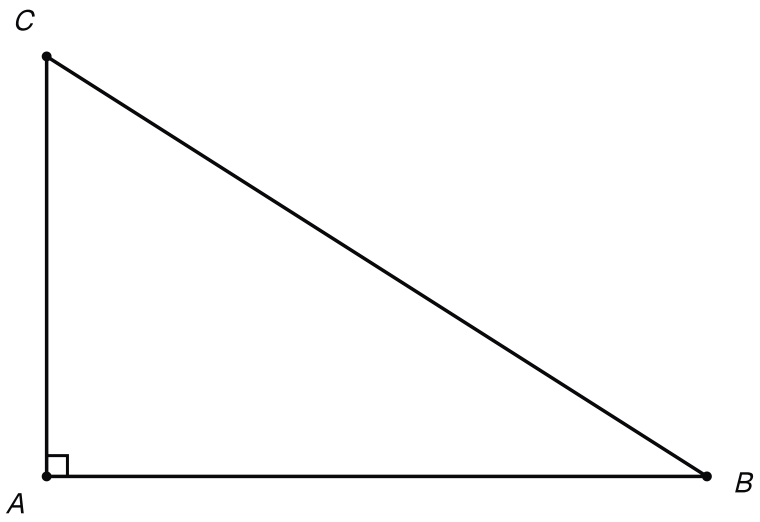
- Le triangle ABC est **isocèle en** A lorsque $AB = AC$. Le point A est son **sommet principal** ; le côté $[BC]$ est sa **base** ; les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont ses **angles à la base**.
- Le triangle ABC est **équilatéral** lorsque ses trois côtés ont la même longueur : $AB = AC = BC$.
- Le triangle ABC est **rectangle en** A lorsque l'angle $\widehat{BAC}$ est droit. Le côté $[BC]$, opposé à l'angle droit, est son **hypoténuse**.
- Le triangle ABC est **isocèle rectangle en** A lorsqu'il est à la fois isocèle en A et rectangle en A.



Triangle isocèle en A : les deux côtés issus du sommet principal portent le même codage, et [BC] sert de base.



Triangle équilatéral : un même codage sur chacun des trois côtés indique qu'ils sont tous de la même longueur.



Triangle rectangle en A : le carré codé marque l'angle droit, et [BC], face à lui, est l'hypoténuse.

Propriété : Angles d'un triangle isocèle

- Si un triangle est isocèle, alors ses deux angles à la base ont la même mesure : si $AB = AC$, alors $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.
- Réciproquement, si deux angles d'un triangle ont la même mesure, alors ce triangle est isocèle : si $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, alors $AB = AC$.

Remarque : Statut : admis

Admis : tu l'utilises sans le démontrer.

Il marche dans les deux sens. Deux côtés égaux donnent deux angles égaux ; deux angles égaux donnent deux côtés égaux.

Propriété : Angles d'un triangle équilatéral

Les trois angles d'un triangle équilatéral ont la même mesure : chacun mesure $60°$.

Propriété : Angles d'un triangle rectangle

Si un triangle ABC est rectangle en A, alors la somme des mesures de ses deux autres angles est égale à $90°$:

$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°.$$

Ces deux angles sont donc aigus.

Remarque : Statut : démontrées

Ces deux propriétés sont démontrées dans le cours, à partir de la somme des angles. Ici, tu les appliques directement.

Méthode : angles d'un triangle particulier

1. **Identifie** le triangle : côtés égaux, angle droit, codage de la figure.
2. **Isocèle, angle au sommet connu** : retire-le de $180°$, puis partage le reste en deux.
3. **Isocèle, un angle à la base connu** : l'autre angle à la base est le même. L'angle au sommet vaut $180°$ moins leur double.
4. **Équilatéral** : $60°$ partout. **Rectangle** : les deux angles aigus totalisent $90°$.

Exemple

Angle au sommet connu. Le triangle KLM est isocèle en K, avec $\widehat{LKM} = 36°$. Ses deux angles à la base sont égaux :

$$\begin{aligned}\widehat{KLM} &= \widehat{KML} \\ &= (180° - 36°) \div 2 \\ &= 72°\end{aligned}$$

Angle à la base connu. Le triangle PQR est isocèle en P, avec $\widehat{PQR} = 52°$. Alors $\widehat{PRQ} = 52°$, et :

$$\begin{aligned}\widehat{QPR} &= 180° - 2 \times 52° \\ &= 76°\end{aligned}$$

Isocèle rectangle. Ses deux angles aigus sont égaux et totalisent $90°$: chacun mesure $45°$.

Attention : Quels angles sont égaux ?

Dans le triangle KLM isocèle en K, les angles égaux sont en L et en M, aux deux bouts de la base $[LM]$. L'angle en K est à part. Cherche d'abord le sommet commun aux deux côtés égaux.

L'inégalité triangulaire

À retenir : Le détour est plus long

Aller de A à C en passant par B n'est jamais plus court que d'aller tout droit. C'est l'inégalité triangulaire. Elle dit si trois longueurs forment un triangle.

Propriété : Inégalité triangulaire

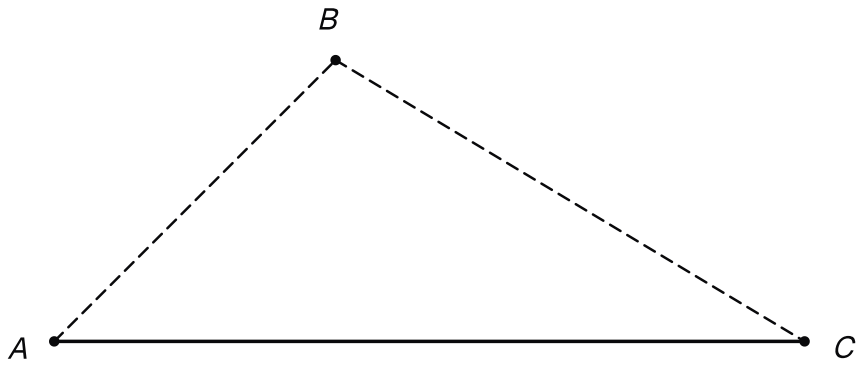
Pour trois points A, B et C quelconques :

$$AC \leq AB + BC.$$

L'égalité $AC = AB + BC$ a lieu seulement lorsque le point B appartient au segment $[AC]$.

Dans un triangle ABC, les trois points ne sont pas alignés. Chaque côté est donc strictement plus court que la somme des deux autres :

- $BC < AB + AC$;
- $AC < AB + BC$;
- $AB < AC + BC$.



Pour aller de A à C, le segment [AC] est le trajet direct ; passer par B, en pointillés, allonge le chemin.

Propriété : Existence d'un triangle de côtés donnés

Soit a, b et c trois longueurs, où c est la plus grande des trois (ou l'une des plus grandes).

- Si $c < a + b$, alors on peut construire un triangle dont les côtés mesurent a, b et c.
- Si $c \geq a + b$, alors un tel triangle n'existe pas. Pour $c = a + b$, les trois points sont alignés.

Remarque : Statut : admises

Ces deux propriétés sont admises. Tu peux les observer au compas. Avec des longueurs trop courtes, les deux arcs ne se croisent pas.

Méthode : le triangle existe-t-il ?

1. **Trouve** la plus longue des trois longueurs.
2. **Calcule** la somme des deux autres.
3. **Conclus.** Plus petite que cette somme : le triangle existe. Égale : les points sont alignés. Plus grande : il n'existe pas.

Exemple

Avec 5 cm, 6 cm et 10 cm. La plus grande longueur est 10 et $5 + 6 = 11$. Comme $10 < 11$, le triangle existe.

Avec 4 cm, 9 cm et 13 cm. On a $4 + 9 = 13$: les trois points sont alignés. Ce n'est pas un triangle.

Attention : Une seule comparaison compte

Avec 2 cm, 5 cm et 9 cm, écrire $2 < 5 + 9$ ne prouve rien. Teste la plus grande longueur : $2 + 5 = 7$ et $9 > 7$. Ce triangle n'existe donc pas.

Construire un triangle

À retenir : Trois façons de donner un triangle

Trois sortes de données permettent de construire un triangle :

- ses trois côtés ;
- un côté et ses deux angles adjacents ;
- deux côtés et l'angle compris entre eux.

Commence toujours par une figure à main levée, codée avec les données : tu y marques les longueurs et les angles connus.

Méthode : trois côtés connus

1. **Contrôle** l'existence avec l'inégalité triangulaire.
2. **Trace** le plus long côté à la règle graduée.
3. **Pique** le compas à une extrémité, ouvert à la deuxième longueur, et trace un arc. Fais de même à l'autre extrémité avec la troisième longueur.
4. **Relie** le point où les arcs se croisent aux deux extrémités.

Méthode : avec le rapporteur

1. **Un côté et deux angles.** Vérifie que les deux angles totalisent moins de $180°$. Trace le côté, puis un angle à chaque extrémité, du même côté. Le troisième sommet est au croisement.
2. **Deux côtés et l'angle compris.** Trace un côté, puis l'angle à une extrémité. Reporte la deuxième longueur sur la demi-droite tracée. Ferme le triangle.
3. **Mesure** ensuite ta figure pour contrôler les données.

Exemple : Un programme de construction

Données. $DE = 7$ cm, $DF = 5$ cm et $EF = 4$ cm. La plus grande longueur est 7, et $7 < 5 + 4$: ce triangle existe.

Programme. Trace $[DE]$ de 7 cm à la règle. Au compas, trace un arc de centre D et de rayon 5 cm, puis un arc de centre E et de rayon 4 cm.

Nomme F un point commun aux deux arcs. Trace $[DF]$ et $[EF]$.

Exemple : Un côté et deux angles

Données. $GH = 6$ cm, $\widehat{HGJ} = 50°$ et $\widehat{GHJ} = 70°$. Le total $50° + 70° = 120°$ est inférieur à $180°$: la construction est possible.

Contrôle. Le troisième angle vaut $180° - 120° = 60°$. Au rapporteur, tu dois lire environ $60°$ pour $\widehat{GJH}$.

Hauteurs et orthocentre

À retenir : Rappel : distance d'un point à une droite

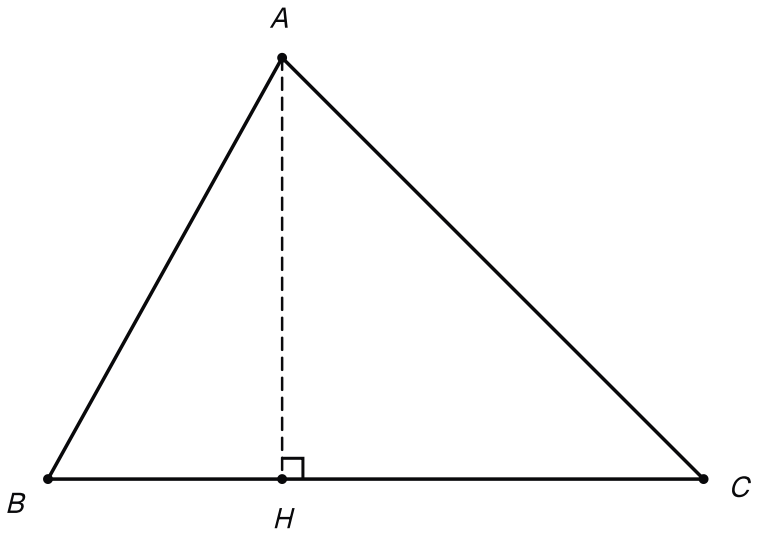
Rappel du chapitre « Droites perpendiculaires et droites parallèles ». La distance d'un point à une droite se mesure sur la perpendiculaire à cette droite passant par le point. Une hauteur se trace de la même façon.

Définition : Hauteurs d'un triangle

Soit ABC un triangle. La **hauteur issue de** A est la droite qui passe par le sommet A et qui est perpendiculaire à la droite (BC), qui porte le côté opposé à A.

Le point d'intersection H de cette hauteur et de la droite (BC) est le **pied de la hauteur**. La longueur AH, distance du point A à la droite (BC), s'appelle aussi la hauteur issue de A.

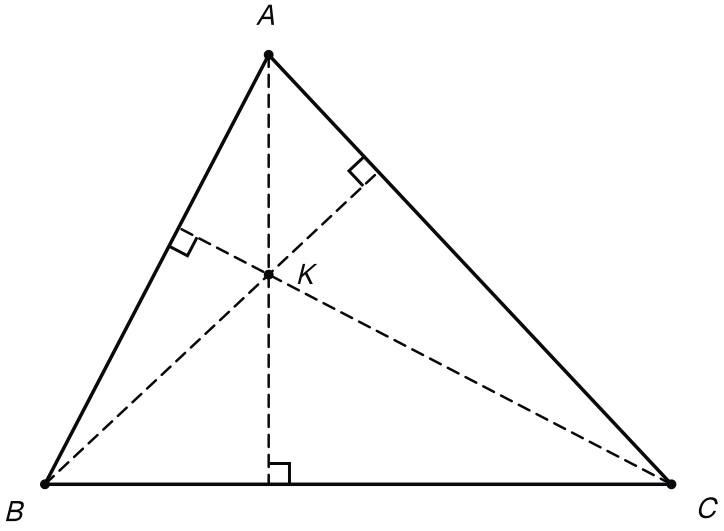
Un triangle a trois hauteurs : une issue de chaque sommet.



La hauteur issue de A descend perpendiculairement sur (BC) ; son pied H se trouve sur ce côté.

Propriété : Concours des hauteurs d'un triangle

Les trois hauteurs d'un triangle sont **concourantes** : elles passent par un même point. Ce point s'appelle l'**orthocentre** du triangle.



Chaque hauteur part d'un sommet, perpendiculaire au côté d'en face ; les trois se rencontrent en un seul point, ici nommé K.

Remarque : Statut : admis

Admis, à la suite d'activités de tracé. Pour placer l'orthocentre, deux hauteurs suffisent. La troisième sert de contrôle.

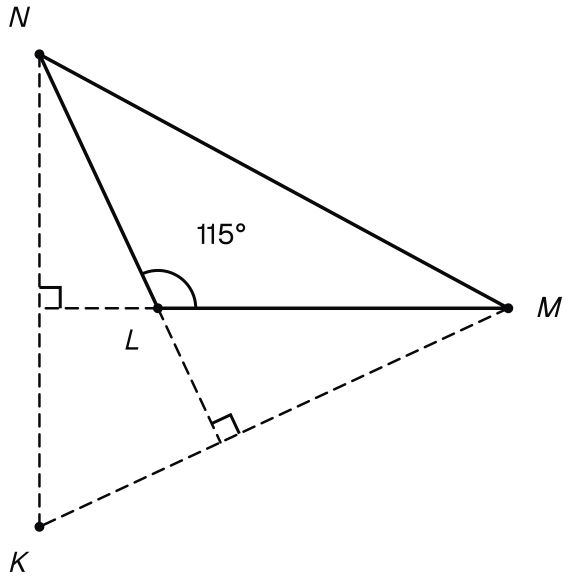
Méthode : tracer une hauteur

1. **Pose** l'équerre : un bord de l'angle droit sur la droite qui porte le côté.
2. **Glisse-la** jusqu'à ce que l'autre bord passe par le sommet opposé. Trace.
3. **Prolonge** le côté à la règle si l'équerre arrive en dehors.
4. **Recommence** depuis un deuxième sommet : le croisement des deux hauteurs est l'orthocentre.

Attention : Un angle obtus change la figure

Dans le triangle LMN où $\widehat{MLN} = 115°$, les hauteurs issues de M et de N ont leur pied hors des côtés $[LN]$ et $[LM]$.

Prolonge ces côtés en droites. L'orthocentre, nommé par exemple K, est alors à l'extérieur du triangle.



Avec un angle de 115 degrés en L, il faut prolonger (LN) et (LM) : les deux hauteurs se croisent en K, hors du triangle.

Médiatrices et cercle circonscrit

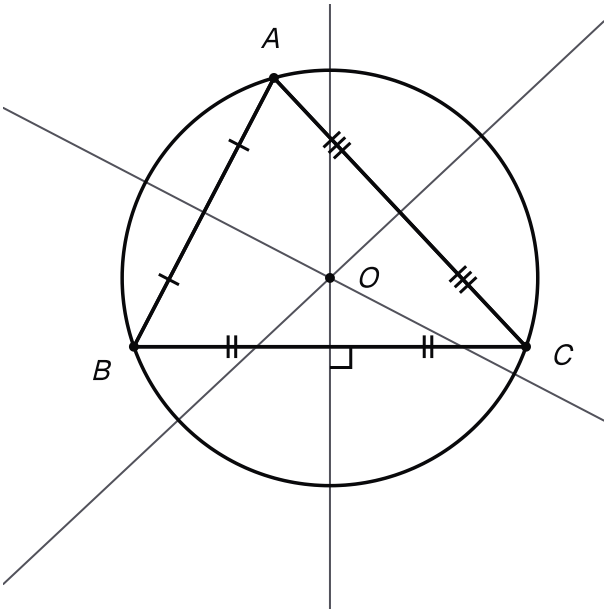
À retenir : Rappel : médiatrice d'un segment

Rappel du chapitre « Droites perpendiculaires et droites parallèles ». La médiatrice de $[AB]$ coupe ce segment à angle droit, en son milieu. Un point est sur la médiatrice de $[AB]$ exactement quand il est aussi loin de A que de B.

Propriété : Médiatrices d'un triangle et cercle circonscrit

Dans un triangle ABC, les **médiatrices** des trois côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ sont concourantes en un point O. Ce point est à la même distance des trois sommets : $OA = OB = OC$.

Le cercle de centre O et de rayon OA passe donc par A, B et C : c'est le **cercle circonscrit** au triangle ABC.



Les trois médiatrices se croisent en O, centre du cercle qui passe exactement par les trois sommets du triangle.

Remarque : Statut : démontré

Démontré dans le cours, avec la propriété de la médiatrice rappelée plus haut. Selon le triangle, le centre O peut être à l'intérieur ou à l'extérieur. Pour le triangle rectangle étudié dans le cours, tu as constaté sur la figure qu'il était sur un côté.

Méthode : cercle circonscrit

1. **Construis** au compas la médiatrice de deux côtés. Pour chaque côté, l'écartement du compas doit dépasser la moitié de sa longueur, sinon les arcs ne se rencontrent pas.
2. **Nomme** O leur point de rencontre.
3. **Pique** le compas en O, ouvre-le jusqu'à un sommet et trace le cercle. Il passe par les trois sommets.
4. **Justifie** avec la propriété de la médiatrice, comme dans le modèle qui suit.

Exemple : Rédiger la justification

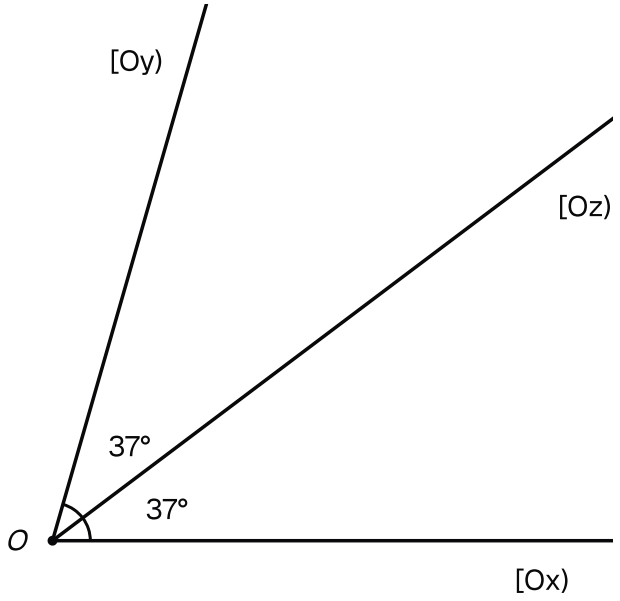
« Le point O appartient à la médiatrice de $[AB]$, donc $OA = OB$. Il appartient aussi à la médiatrice de $[AC]$, donc $OA = OC$. Ainsi $OA = OB = OC$. Le cercle de centre O qui passe par A passe aussi par B et C. »

Bissectrices et cercle inscrit

Définition : Bissectrice d'un angle

La **bissectrice** d'un angle $\widehat{xOy}$ est la demi-droite $[Oz)$ qui partage cet angle en deux angles de même mesure : $\widehat{xOz} = \widehat{zOy}$. Chacun de ces deux angles mesure la moitié de $\widehat{xOy}$.

Dans un triangle ABC, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ s'appelle la **bissectrice issue de** A. Un triangle a trois bissectrices : une issue de chaque sommet.



La demi-droite [Oz) coupe l'angle xOy en deux parts égales, signalées par le même codage : ici 37 degrés de chaque côté pour un angle de 74 degrés.

Exemple : Au rapporteur

Si $\widehat{xOy} = 74°$, la bissectrice $[Oz)$ fait un angle de $74° \div 2 = 37°$ avec $[Ox)$ et avec $[Oy)$. Au rapporteur, trace $[Oz)$ à $37°$ de $[Ox)$, à l'intérieur de l'angle.

Propriété : Propriété caractéristique de la bissectrice

Soit M un point situé à l'intérieur d'un angle $\widehat{xOy}$.

- Si M est sur la bissectrice de cet angle, alors M est à la même distance des droites (Ox) et (Oy).

- Réciproquement, si M est à la même distance des droites (Ox) et (Oy), alors M est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

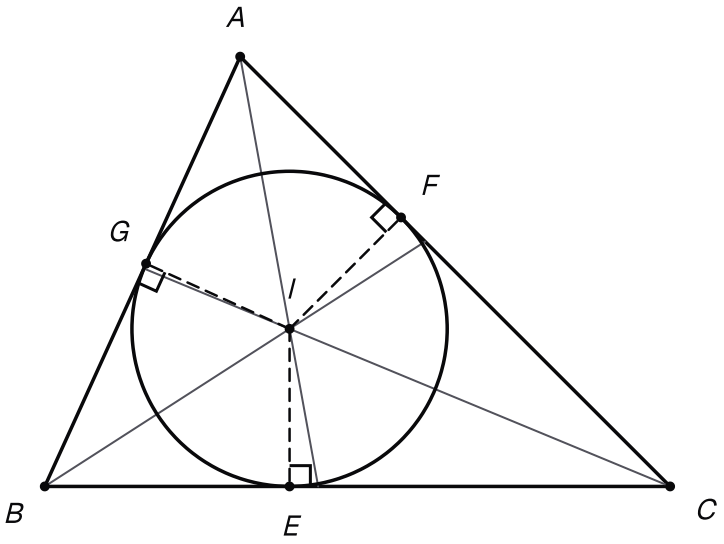
Remarque : Statut : admise

Admise, après des activités de mesure à l'équerre. Elle sert dans les deux sens. Sur la bissectrice, distances égales ; distances égales, sur la bissectrice.

Propriété : Bissectrices d'un triangle et cercle inscrit

Dans un triangle ABC, les trois bissectrices sont concourantes en un point I, situé à l'intérieur du triangle. Ce point est à la même distance des trois droites (BC), (AC) et (AB).

Soit E, F et G les pieds des perpendiculaires menées de I aux droites (BC), (AC) et (AB). On a $IE = IF = IG$. Le cercle de centre I et de rayon IE passe par E, F et G : c'est le **cercle inscrit** dans le triangle ABC.



Les trois bissectrices se rejoignent en I ; autour de ce point, un cercle de rayon IE vient toucher chacun des trois côtés.

Remarque : Statut : démontré, plus une observation

Cette propriété est démontrée dans le cours. Sur ta figure, le cercle inscrit touche chaque côté en un seul point, sans le traverser. Ce fait est seulement observé ici ; il sera justifié au chapitre « Le cercle ».

Méthode : bissectrice au compas, cercle inscrit

1. **Bissectrice au compas.** Un arc centré au sommet coupe les deux côtés. Centre ensuite sur ces deux points deux arcs de même rayon, supérieur à la moitié de l'écart entre eux : ils se croisent. Relie au sommet un de ces croisements, pris à l'intérieur de l'angle et différent du sommet. Ce tracé est admis ici : contrôle les deux moitiés d'angle au rapporteur.
2. **Centre.** Trace deux bissectrices ; leur point commun est I.
3. **Rayon.** À l'équerre, abaisse la perpendiculaire de I sur un côté. Son pied E donne le rayon IE.
4. **Cercle.** Trace le cercle de centre I et de rayon IE.

Les droites remarquables et les erreurs à éviter

À retenir : Les trois familles de droites remarquables

Droites	Chacune passe par	Point de concours	Cercle associé	Statut du concours
hauteurs	un sommet, perpendiculaire au côté opposé	l'orthocentre	aucun	admis
médiatrices	le milieu d'un côté, perpendiculaire à ce côté	O	circonscrit : par les trois sommets	démontré
bissectrices	un sommet, en partageant son angle en deux	I, toujours à l'intérieur	inscrit : il touche les trois côtés (observé sur la figure)	démontré

Attention : Sommet ou milieu ?

Une hauteur et une médiatrice sont toutes deux perpendiculaires à un côté. La hauteur part du sommet opposé ; la médiatrice passe par le milieu du côté. En général, ce sont deux droites différentes.

Attention : Quel cercle ?

Les trois sommets sont sur le cercle circonscrit : son centre vient des médiatrices. Le centre du cercle inscrit vient des bissectrices.

Sur ta figure, ce cercle reste dans le triangle et touche ses trois côtés : c'est une observation, justifiée plus tard au chapitre « Le cercle ».

Associe chaque cercle à sa famille de droites avant de tracer.

À retenir : Rédiger en devoir

> Nomme la propriété à chaque étape : « d'après la somme des angles d'un triangle », « d'après la propriété de la médiatrice ». Pour une construction, écris le programme pas à pas, instrument compris. Termine par une phrase qui répond à la question.