BURHAN

Le triangle : angles, droites remarquables et cercles : exercices, niveau examen

1ère Année Collège · Mathématiques

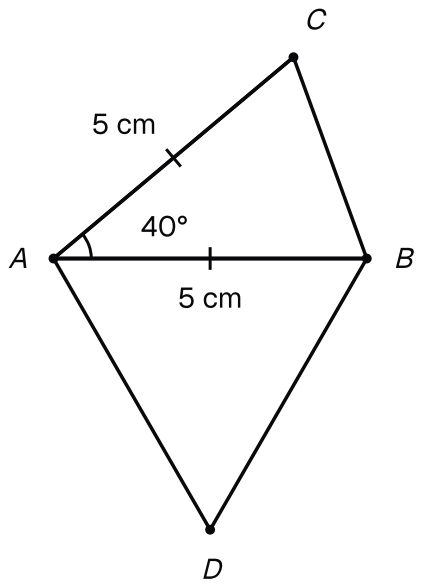
Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/le-triangle/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Le triangle : angles, droites remarquables et cercles	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Le logo d'un club

Le logo d'un club est formé de deux triangles. Le triangle ABC est isocèle en A, avec $AB = AC = 5$ cm et $\widehat{BAC} = 40°$. Le triangle ABD est équilatéral. Le point D est de l'autre côté de la droite (AB) par rapport à C. Fais une figure à main levée.



Le logo : le triangle ABC, isocèle en A, et le triangle équilatéral ABD, placé de l'autre côté de la droite (AB).

1. 1,5 pts

Calcule $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

INDICE

Outil : les angles à la base d'un triangle isocèle, puis la somme des angles.

CORRIGÉ

Angles à la base. Le triangle ABC est isocèle en A. D'après la propriété des angles d'un triangle isocèle, ses angles à la base sont égaux : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Calcul. Les trois angles totalisent $180°$. Les deux angles à la base se partagent donc $180° - 40° = 140°$:

$$\begin{aligned}\widehat{ABC} = \widehat{ACB} &= 140° \div 2 \\ &= 70°\end{aligned}$$

Conclusion. $\widehat{ABC} = 70°$ et $\widehat{ACB} = 70°$.

2. 1 pts

Donne la mesure de $\widehat{BAD}$ et la longueur AD. Justifie.

INDICE

Outil : la définition et la propriété des angles d'un triangle équilatéral.

CORRIGÉ

Longueur. Le triangle ABD est équilatéral : ses trois côtés ont la même longueur. Donc $AD = AB = 5$ cm.

Angle. D'après la propriété des angles d'un triangle équilatéral, ses trois angles mesurent $60°$. Donc $\widehat{BAD} = 60°$.

Conclusion. $\widehat{BAD} = 60°$ et $AD = 5$ cm.

3. 1,5 pts

En déduire que le triangle ACD est isocèle en A. Calcule ensuite $\widehat{CAD}$, puis $\widehat{ACD}$.

INDICE

Début : compare AC et AD.

Point délicat : C et D sont de part et d'autre de (AB), donc $\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD}$.

CORRIGÉ

Triangle isocèle. On a $AC = 5$ cm (donnée) et $AD = 5$ cm (question 2). Donc $AC = AD$: le triangle ACD a deux côtés égaux qui partent de A, il est isocèle en A.

Angle en A. Les points C et D sont de part et d'autre de la droite (AB). L'angle $\widehat{CAD}$ est donc formé de $\widehat{CAB}$ et de $\widehat{BAD}$:

$$\widehat{CAD} = 40° + 60° = 100°$$

Angle en C. Les angles à la base du triangle isocèle ACD sont égaux. Ils se partagent ce qui reste de $180°$:

$$\begin{aligned}\widehat{ACD} &= (180° - 100°) \div 2 \\ &= 40°\end{aligned}$$

Conclusion. Le triangle ACD est isocèle en A, $\widehat{CAD} = 100°$ et $\widehat{ACD} = 40°$.

4. 1 pts

Le club voudrait aussi un triangle de côtés 5 cm, 5 cm et 10 cm. Est-ce possible ? Justifie.

INDICE

Outil : l'existence d'un triangle de côtés donnés.

Point délicat : regarde si la plus longue mesure atteint le total des deux autres.

CORRIGÉ

La plus grande longueur est 10 cm. Les deux autres totalisent $5 + 5 = 10$ cm : il y a égalité.

Avec cette égalité, les trois sommets seraient alignés : on obtiendrait un segment, pas un triangle.

Conclusion. Ce n'est pas possible : aucun triangle n'a pour côtés 5 cm, 5 cm et 10 cm.

Exercice 2 5 pts

Une fontaine dans un parc

Un parc a la forme d'un triangle EFG. Ses trois entrées sont aux sommets E, F et G. Sur le plan, $EF = 7$ cm, $EG = 5$ cm et $FG = 6$ cm.

1. 1 pts

Ce triangle peut-il être construit ? Justifie.

INDICE

Outil : l'inégalité triangulaire, appliquée à la plus grande longueur.

CORRIGÉ

La plus grande longueur est $EF = 7$ cm. La somme des deux autres vaut $EG + FG = 5 + 6 = 11$ cm.

Comme $7 < 11$, le triangle EFG existe, d'après la propriété d'existence d'un triangle de côtés donnés.

Conclusion. Oui, le triangle EFG peut être construit.

2. 1,5 pts

Construis le triangle EFG à la règle graduée et au compas. Tu n'as pas à rédiger le programme.

INDICE

Outil : la règle graduée et le compas.

Début : trace d'abord le plus long côté.

CORRIGÉ

Le programme n'était pas demandé ; il est donné ici pour que tu contrôles ta figure.

Programme.

1. À la règle graduée, trace $[EF]$ de longueur 7 cm.
2. Au compas, trace un arc de centre E et de rayon 5 cm.
3. Au compas, trace un arc de centre F et de rayon 6 cm.
4. Nomme G un point où les deux arcs se coupent. Trace $[EG]$ et $[FG]$.

Conclusion. Le point G obtenu est à 5 cm de E et à 6 cm de F : le triangle EFG a les côtés du plan.

3. 1,5 pts

Construis le point O où se coupent les médiatrices de $[EF]$ et de $[EG]$. Justifie que $OE = OF = OG$.

INDICE

Outil : la propriété caractéristique de la médiatrice d'un segment, employée deux fois.

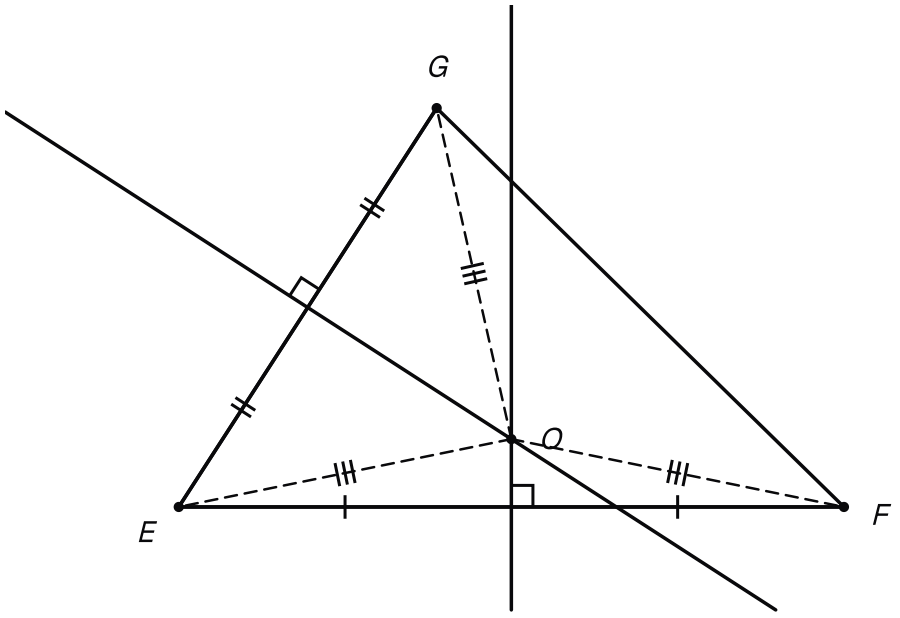
CORRIGÉ

Construction. Pour chacun des segments $[EF]$ et $[EG]$, trace au compas deux arcs de même rayon centrés aux deux extrémités, avec un rayon supérieur à la moitié du segment. La droite qui passe par les deux points communs des arcs est la médiatrice. Le point O est l'intersection des deux médiatrices.

Médiatrice de $[EF]$. O est sur cette médiatrice. D'après la propriété caractéristique de la médiatrice, $OE = OF$.

Médiatrice de $[EG]$. O est aussi sur cette médiatrice, donc $OE = OG$.

Conclusion. Les deux égalités donnent $OE = OF = OG$.



Les médiatrices de [EF] et de [EG] se rencontrent en O ; les segments [OE], [OF] et [OG], de même codage, traduisent OE = OF = OG.

4. 1 pts

On veut une fontaine à la même distance des trois entrées. Où la placer ? Trace le cercle de centre O qui passe par E et mesure son rayon.

INDICE

Début : utilise le résultat de la question 3.

CORRIGÉ

Place de la fontaine. D'après la question 3, O est à la même distance des trois entrées E, F et G : c'est là qu'il faut placer la fontaine.

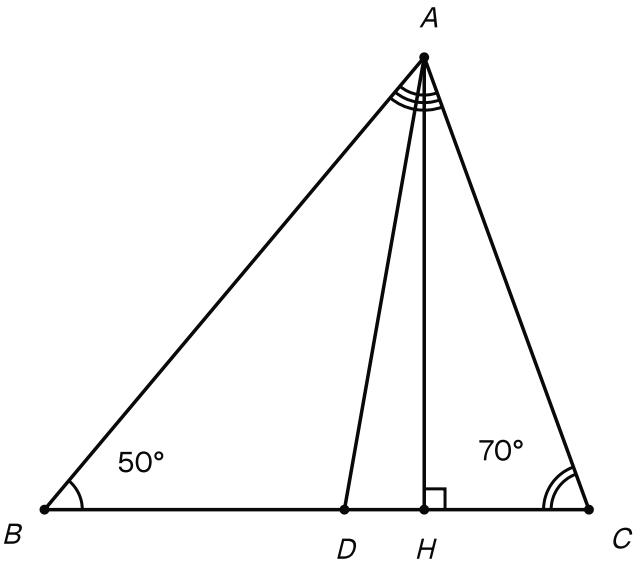
Cercle. Le cercle de centre O et de rayon OE passe par E, F et G : c'est le cercle circonscrit au triangle EFG. Sur le plan, son rayon mesure environ $3{,}6$ cm.

Conclusion. On place la fontaine en O, point de rencontre des médiatrices ; le cercle tracé a un rayon d'environ $3{,}6$ cm.

Exercice 3 — 5 pts

Une hauteur et une bissectrice issues du même sommet

Dans un triangle ABC, $\widehat{ABC} = 50°$ et $\widehat{ACB} = 70°$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe $[BC]$ en D. La hauteur issue de A coupe $[BC]$ en H. Fais une figure à main levée.



Le triangle ABC avec ses deux angles connus, la bissectrice [AD] de l'angle en A et la hauteur [AH], toutes deux arrêtées sur [BC].

1. — 1 pts

Calcule $\widehat{BAC}$.

INDICE

Outil : la somme des angles du triangle ABC.

CORRIGÉ

Les angles en B et en C mesurent $50°$ et $70°$. D'après la somme des angles d'un triangle :

$$\begin{aligned}\widehat{BAC} &= 180° - (50° + 70°) \\ &= 60°\end{aligned}$$

Conclusion. L'angle $\widehat{BAC}$ mesure $60°$.

2. 1 pts

En déduire $\widehat{BAD}$.

INDICE

Outil : la définition de la bissectrice d'un angle.

CORRIGÉ

La demi-droite $[AD)$ est la bissectrice de $\widehat{BAC}$: par définition, elle partage cet angle en deux angles égaux, $\widehat{BAD}$ et $\widehat{DAC}$.

$$\widehat{BAD} = 60^\circ \div 2 = 30^\circ$$

Conclusion. L'angle $\widehat{BAD}$ mesure 30°.

3. 1,5 pts

Calcule $\widehat{ADB}$.

INDICE

Début : travaille dans le triangle ABD ; l'angle en B vaut $\widehat{ABC}$, car D est sur $[BC]$.

CORRIGÉ

Angle en B. Le point D est sur $[BC]$, donc $\widehat{ABD} = \widehat{ABC} = 50^\circ$.

Triangle ABD. Ses angles en A et en B mesurent 30° et 50°. La somme des angles donne :

$$\begin{aligned}\widehat{ADB} &= 180^\circ - (50^\circ + 30^\circ) \\ &= 100^\circ\end{aligned}$$

Conclusion. L'angle $\widehat{ADB}$ mesure 100°.

4. 1,5 pts

Le triangle ABH est rectangle en H, et le point D est entre B et H. Calcule $\widehat{BAH}$, puis $\widehat{HAD}$.

INDICE

Outil : les deux angles aigus d'un triangle rectangle totalisent 90°.

Point délicat : comme D est entre B et H, l'angle $\widehat{BAH}$ se partage en $\widehat{BAD}$ et $\widehat{HAD}$.

CORRIGÉ

Angle en B. Le point H est sur $[BC]$, donc $\widehat{ABH} = \widehat{ABC} = 50^\circ$.

Triangle rectangle ABH. Il est rectangle en H : ses deux angles aigus, $\widehat{BAH}$ et $\widehat{ABH}$, totalisent 90° (propriété des angles d'un triangle rectangle). Donc :

$$\widehat{BAH} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

Angle cherché. Le point D est entre B et H : la demi-droite $[AD)$ partage l'angle $\widehat{BAH}$, et $\widehat{BAH} = \widehat{BAD} + \widehat{HAD}$. Donc :

$$\widehat{HAD} = 40^\circ - 30^\circ = 10^\circ$$

Conclusion. $\widehat{BAH} = 40^\circ$ et $\widehat{HAD} = 10^\circ$.

Exercice 4 5 pts

Le gabarit d'un menuisier

Un menuisier découpe un gabarit en bois en forme de triangle JKL. Sur son plan, $JK = 8$ cm, $\widehat{KJL} = 30°$ et $\widehat{JKL} = 60°$.

1. 1 pts

Calcule $\widehat{JLK}$. Que peux-tu dire du triangle JKL ?

INDICE

Outil : la somme des angles d'un triangle.

CORRIGÉ

Les angles en J et en K mesurent $30°$ et $60°$. Comme les trois angles d'un triangle totalisent $180°$:

$$\begin{aligned}\widehat{JLK} &= 180° - (30° + 60°)\\ &= 90°\end{aligned}$$

Conclusion. $\widehat{JLK} = 90°$: le triangle JKL a un angle droit en L, il est rectangle en L.

2. 1,5 pts

Construis le triangle JKL à la règle graduée et au rapporteur. Tu n'as pas à rédiger le programme. Contrôle ensuite l'angle en L.

INDICE

Début : trace d'abord le côté dont tu connais la longueur, puis un angle à chacune de ses extrémités, du même côté.

CORRIGÉ

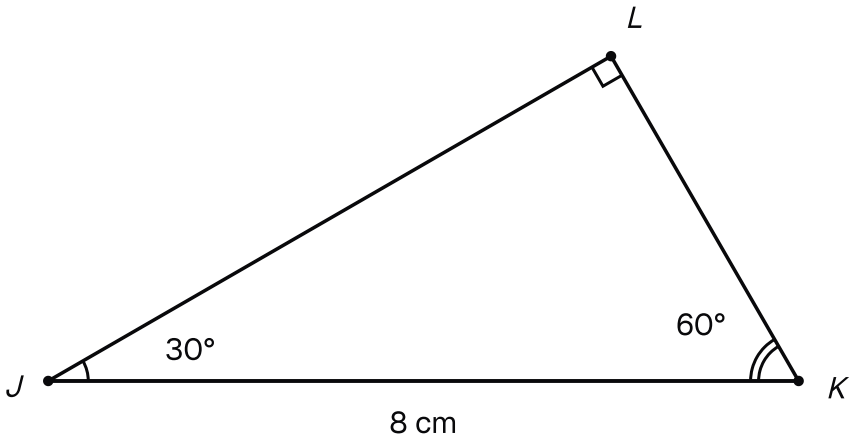
Le programme n'est pas exigé ; le voici pour vérifier ta construction.

Programme.

1. À la règle graduée, trace $[JK]$ de longueur 8 cm.
2. Au rapporteur, trace en J une demi-droite qui fait avec $[JK]$ un angle de $30°$.
3. Au rapporteur, trace en K, du même côté de $[JK]$, une demi-droite qui fait avec $[KJ]$ un angle de $60°$.
4. Nomme L le point où les deux demi-droites se coupent.

Contrôle. Les deux angles tracés totalisent $30° + 60° = 90°$, moins que $180°$: les deux demi-droites se coupent bien. Pose ensuite l'équerre en L : l'angle doit être droit, comme trouvé à la question 1.

Conclusion. Le triangle JKL est construit, et son angle en L est droit.



Le gabarit construit : [JK] de 8 cm, un angle de 30 degrés en J et un angle de 60 degrés en K, du même côté ; les deux demi-droites se rencontrent en L, où l'équerre confirme l'angle droit.

3. 1 pts

Le point O est le milieu de $[JK]$, et on admet que $KL = 4$ cm (contrôle-le sur ta figure). Justifie que le triangle OKL est isocèle en K, puis calcule ses angles en O et en L.

INDICE

Début : O est le milieu de $[JK]$, donc $OK = 8 \div 2$.

Ensuite : les angles à la base d'un triangle isocèle, puis la somme des angles.

CORRIGÉ

Isocèle en K. Le point O est le milieu de $[JK]$, donc $OJ = OK = 8 \div 2 = 4$ cm. Comme $KL = 4$ cm, on a $KO = KL$: le triangle OKL a deux côtés égaux qui partent de K, il est isocèle en K.

Angle en K. Le point O est sur $[JK]$, donc $\widehat{OKL} = \widehat{JKL} = 60°$.

Angles en O et en L. Ce sont les angles à la base du triangle isocèle OKL : ils sont égaux et se partagent $180° - 60° = 120°$.

$$\begin{aligned}\widehat{KOL} = \widehat{KLO} &= 120° \div 2 \\ &= 60°\end{aligned}$$

Conclusion. Le triangle OKL est isocèle en K, et ses angles en O et en L mesurent $60°$ chacun.

4. 1,5 pts

En déduire que $OL = 4$ cm, puis que O est le centre du cercle circonscrit au triangle JKL.

INDICE

Point délicat : deux angles égaux dans un triangle donnent deux côtés égaux (propriété des angles d'un triangle isocèle, dans l'autre sens).

Ensuite : compare OJ, OK et OL.

CORRIGÉ

Longueur OL. Dans le triangle OKL, les angles en K et en L sont égaux : $\widehat{OKL} = \widehat{KLO} = 60°$. D'après la propriété des angles d'un triangle isocèle, lue dans l'autre sens, ce triangle est isocèle. Ses côtés égaux partent de O, sommet du troisième angle : $OL = OK = 4$ cm.

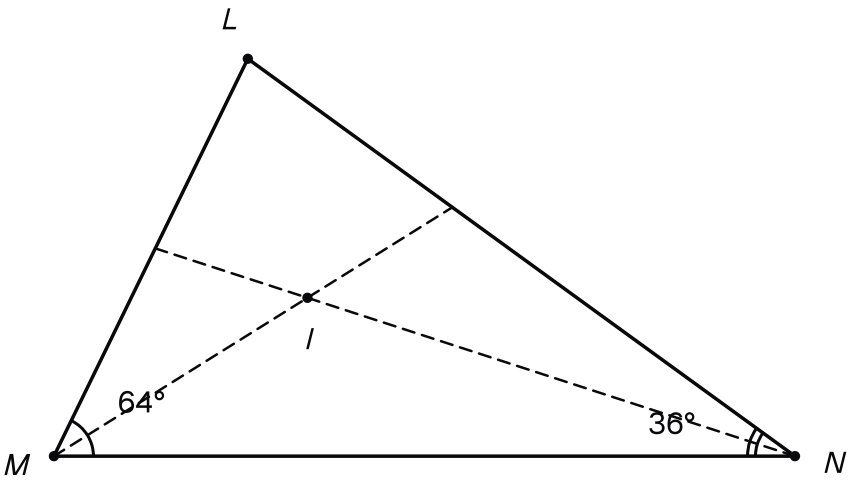
Centre du cercle. On a donc $OJ = OK = OL = 4$ cm : le point O est à la même distance des trois sommets. Le cercle de centre O et de rayon 4 cm passe par J, K et L.

Conclusion. $OL = 4$ cm, et O est le centre du cercle circonscrit au triangle JKL.

Exercice 5 — 5 pts

Un autocollant rond sur un panneau

Un panneau a la forme d'un triangle LMN, avec $\widehat{LMN} = 64°$ et $\widehat{LNM} = 36°$. Les bissectrices des angles $\widehat{LMN}$ et $\widehat{LNM}$ se coupent en un point I, à l'intérieur du triangle. On veut coller un autocollant rond de centre I qui touche les trois bords du panneau. Fais une figure à main levée.



Le panneau LMN avec ses angles connus en M et en N, et les deux bissectrices issues de ces sommets, qui se croisent en I.

1. — 1 pts

Calcule $\widehat{IMN}$ et $\widehat{INM}$.

INDICE

Outil : la définition de la bissectrice d'un angle.

CORRIGÉ

En M. La demi-droite $[MI)$ est la bissectrice de $\widehat{LMN}$: elle partage cet angle en deux angles égaux.

$$\widehat{IMN} = 64° \div 2 = 32°$$

En N. De même, $[NI)$ est la bissectrice de $\widehat{LNM}$:

$$\widehat{INM} = 36° \div 2 = 18°$$

Conclusion. $\widehat{IMN} = 32°$ et $\widehat{INM} = 18°$.

2. 1 pts

En déduire $\widehat{MIN}$.

INDICE

Début : travaille dans le triangle IMN, avec les deux angles de la question 1.

CORRIGÉ

Dans le triangle IMN, les angles en M et en N mesurent $32°$ et $18°$ (question 1). Avec la somme des angles d'un triangle :

$$\begin{aligned}\widehat{MIN} &= 180° - (32° + 18°)\\ &= 130°\end{aligned}$$

Conclusion. L'angle $\widehat{MIN}$ mesure $130°$.

3. 1,5 pts

Les trois bissectrices d'un triangle passent par un même point : celle de $\widehat{MLN}$ passe donc aussi par I. Calcule $\widehat{MLN}$, puis $\widehat{MLI}$ et $\widehat{LIM}$.

INDICE

Début : la somme des angles du triangle LMN, puis la définition de la bissectrice.

Point délicat : dans le triangle LIM, l'angle en M n'est pas $\widehat{LMN}$: pense à la bissectrice issue de M.

CORRIGÉ

Angle en L. Dans le triangle LMN, la somme des angles donne :

$$\begin{aligned}\widehat{MLN} &= 180° - (64° + 36°)\\ &= 80°\end{aligned}$$

Bissectrice issue de L. La demi-droite $[LI)$ est la bissectrice de $\widehat{MLN}$: elle le coupe en deux angles égaux.

$$\widehat{MLI} = 80° \div 2 = 40°$$

Triangle LIM. Son angle en M n'est pas l'angle $\widehat{LMN}$ entier. Comme $[MI)$ est la bissectrice de $\widehat{LMN}$:

$$\widehat{LMI} = 64° \div 2 = 32°$$

La somme des angles du triangle LIM donne alors :

$$\begin{aligned}\widehat{LIM} &= 180° - (40° + 32°)\\ &= 108°\end{aligned}$$

Conclusion. $\widehat{MLN} = 80°$, $\widehat{MLI} = 40°$ et $\widehat{LIM} = 108°$.

4. 1,5 pts

Sur le plan, le point I est à 2 cm de la droite (MN). À quelle distance est-il des droites (LM) et (LN) ? Justifie, puis donne le rayon de l'autocollant.

INDICE

Outil : la propriété caractéristique de la bissectrice, pour M puis pour N.

Point délicat : vérifie que I est à l'intérieur de chaque angle avant de l'utiliser.

CORRIGÉ

Depuis M. Le point I est sur la bissectrice de $\widehat{LMN}$. Comme il est à l'intérieur du triangle, il se trouve à l'intérieur de cet angle : on peut lui appliquer la propriété caractéristique de la bissectrice. Ainsi I est à la même distance des droites (MN) et (ML) : sa distance à la droite (LM) vaut 2 cm.

Depuis N. De même, I est sur la bissectrice de $\widehat{LNM}$, à l'intérieur de cet angle. Il est donc à la même distance des droites (NM) et (NL). Sa distance à la droite (LN) vaut aussi 2 cm.

Rayon. Le point I est à 2 cm des trois droites (MN), (LM) et (LN). Le cercle de centre I et de rayon 2 cm passe par les pieds des perpendiculaires menées de I à ces droites : c'est le cercle inscrit dans le triangle LMN.

Conclusion. I est à 2 cm de (LM) et de (LN) ; l'autocollant a un rayon de 2 cm.