BURHAN

Le triangle : angles, droites remarquables et cercles : exercices, entraînement

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/le-triangle/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Le triangle : angles, droites remarquables et cercles	Entraînement	7

Exercice 1

Le cadre d'un vélo

Le cadre d'un vélo est fait de deux triangles accolés. On le schématise ainsi : ABC est un triangle, et D est un point du segment $[BC]$. On sait que $\widehat{ABC} = 50°$, $\widehat{BAD} = 30°$ et $\widehat{ACB} = 60°$. Fais une figure à main levée et code les angles connus : écris sur ta figure la mesure de chacun.

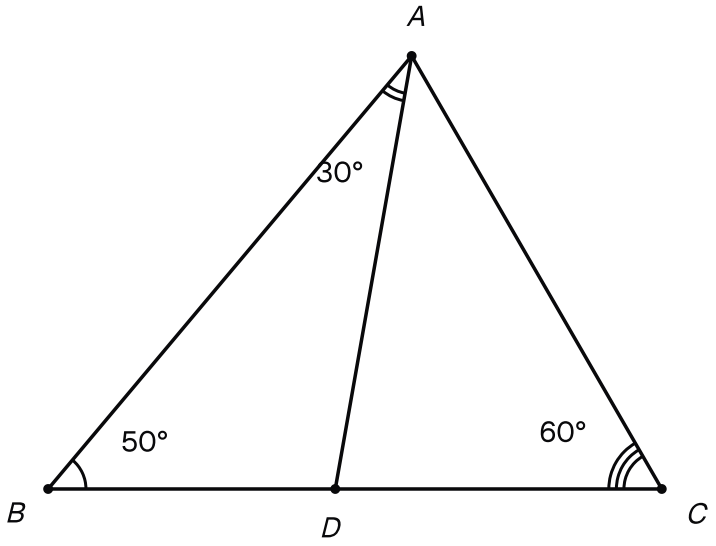


Schéma du cadre : le triangle ABC est partagé par le segment [AD], avec les trois angles connus de l'énoncé.

1.

Calcule $\widehat{ADB}$ dans le triangle ABD.

INDICE

Outil : la somme des angles du triangle ABD.

Début : comme D est sur $[BC]$, l'angle $\widehat{ABD}$ est le même que $\widehat{ABC}$.

CORRIGÉ

Angle en B. Le point D est sur le segment $[BC]$: la demi-droite $[BD)$ est la même que $[BC)$. Donc $\widehat{ABD} = \widehat{ABC} = 50°$.

Triangle ABD. Ses angles en A et en B mesurent $30°$ et $50°$. Les trois angles d'un triangle totalisent $180°$, donc :

$$\begin{aligned}\widehat{ADB} &= 180° - (50° + 30°) \\ &= 100°\end{aligned}$$

Conclusion. L'angle $\widehat{ADB}$ mesure $100°$.

2.

En déduire $\widehat{ADC}$.

INDICE

Outil : les points B, D et C sont alignés : l'angle plat $\widehat{BDC}$ mesure $180°$.

CORRIGÉ

Les points B, D et C sont alignés, et D est entre B et C. Les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{ADC}$ sont côte à côte et forment l'angle plat $\widehat{BDC}$, qui mesure $180°$. Donc :

$$\widehat{ADC} = 180° - 100° = 80°$$

Conclusion. L'angle $\widehat{ADC}$ mesure $80°$.

3.

Calcule $\widehat{DAC}$, puis $\widehat{BAC}$. Contrôle ton résultat avec le triangle ABC.

INDICE

Début : utilise la somme des angles du triangle ADC.

Ensuite : $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC}$.

CORRIGÉ

Triangle ADC. Son angle en D mesure $80°$ (question 2). Comme D est sur $[BC]$, son angle en C est $\widehat{ACD} = \widehat{ACB} = 60°$. D'après la somme des angles d'un triangle :

$$\begin{aligned}\widehat{DAC} &= 180° - (80° + 60°) \\ &= 40°\end{aligned}$$

Angle en A. La demi-droite $[AD)$ partage l'angle $\widehat{BAC}$ en $\widehat{BAD}$ et $\widehat{DAC}$:

$$\widehat{BAC} = 30° + 40° = 70°$$

Contrôle. Dans le triangle ABC, on retrouve bien $180°$:

$$70° + 50° + 60° = 180°$$

Conclusion. $\widehat{DAC} = 40°$ et $\widehat{BAC} = 70°$; ces mesures sont cohérentes avec le triangle ABC.

Exercice 2

Un fanion reconnu par ses angles

Un fanion a la forme d'un triangle EFG. On mesure $\widehat{FEG} = 40°$, $\widehat{EFG} = 70°$ et $EF = 25$ cm.

1.

Calcule $\widehat{EGF}$.

INDICE

Outil : la somme des angles d'un triangle.

CORRIGÉ

Les angles en E et en F mesurent $40°$ et $70°$. Comme les trois angles d'un triangle totalisent $180°$:

$$\begin{aligned}\widehat{EGF} &= 180° - (40° + 70°)\\ &= 70°\end{aligned}$$

Conclusion. L'angle $\widehat{EGF}$ mesure $70°$.

2.

La propriété des angles d'un triangle isocèle se lit aussi dans l'autre sens (résultat admis) : si deux angles d'un triangle ont la même mesure, ce triangle est isocèle. Ses deux côtés égaux partent alors du sommet du troisième angle. Avec cette règle, justifie en quelques lignes que le triangle EFG est isocèle. Précise son sommet principal.

INDICE

Début : cherche, avec la question 1, les deux angles qui ont la même mesure.

Ensuite : le sommet principal est celui de l'angle restant, ici $\widehat{FEG}$.

CORRIGÉ

Deux angles égaux. D'après la question 1, $\widehat{EGF}$ mesure $70°$, tout comme $\widehat{EFG}$. Ainsi :

$$\widehat{EFG} = \widehat{EGF} = 70°$$

Règle admise. Un triangle qui a deux angles de même mesure est isocèle. Ici, les angles égaux sont en F et en G, et le troisième angle est en E. Les deux côtés égaux partent donc de E : ce sont $[EF]$ et $[EG]$.

Conclusion. Le triangle EFG est isocèle en E : son sommet principal est E, et $EF = EG$.

3.

En déduire la longueur EG. Le fanion est-il un triangle équilatéral ?

INDICE

Début : utilise l'égalité de la question 2.

Ensuite : combien mesure chaque angle d'un triangle équilatéral ?

CORRIGÉ

Longueur. D'après la question 2, $EG = EF$. Donc $EG = EF = 25$ cm.

Équilatéral ? Dans un triangle équilatéral, chaque angle mesure $60°$ (propriété des angles d'un triangle équilatéral). Or ici $\widehat{FEG} = 40°$, qui n'est pas égal à $60°$.

Conclusion. $EG = 25$ cm, et le fanion n'est pas un triangle équilatéral.

Exercice 3

La distance entre deux villages

Trois villages A, B et C ne sont pas alignés. À vol d'oiseau, $AB = 7$ km et $AC = 4$ km. On cherche ce que peut valoir la distance BC.

1.

Justifie que $BC < 11$ km.

INDICE

Outil : l'inégalité triangulaire dans le triangle ABC, écrite pour le côté $[BC]$.

CORRIGÉ

Les villages ne sont pas alignés : A, B et C sont les sommets d'un triangle. D'après l'inégalité triangulaire, aller directement de B à C est plus court que passer par A :

$$BC < AB + AC$$

Ici, $AB + AC = 7 + 4 = 11$ km. Donc $BC < 11$ km.

Conclusion. La distance BC est inférieure à 11 km.

2.

Justifie que $BC > 3$ km.

INDICE

Début : le chemin direct de A à B est plus court que le détour par C. Écris-le : $7 < 4 + BC$.

Ensuite : quel nombre faut-il ajouter à 4 pour dépasser 7 ?

CORRIGÉ

Inégalité utile. Dans le triangle ABC, l'inégalité triangulaire écrite pour le côté $[AB]$ donne $AB < AC + BC$. Avec les distances connues :

$$7 < 4 + BC$$

Lecture. Comme $4 + 3 = 7$, ajouter 3 à 4 donne tout juste 7. Pour dépasser 7, il faut ajouter à 4 un nombre plus grand que $7 - 4 = 3$. Donc BC est plus grand que 3.

Autrement dit : mis bout à bout, le trajet de 4 km et le trajet BC doivent dépasser les 7 km du trajet direct.

Conclusion. $BC > 3$ km.

3.

On sait que BC est un nombre entier de kilomètres. Quelles valeurs sont possibles ?

INDICE

Début : regroupe les résultats des questions 1 et 2 : $3 < BC < 11$.

CORRIGÉ

Encadrement. Les questions 1 et 2 donnent ensemble, en kilomètres :

$$3 < BC < 11$$

Entiers possibles. Les nombres entiers strictement compris entre 3 et 11 sont 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10.

Vérification. Pour chacune de ces valeurs, la troisième inégalité, $AC < AB + BC$, est vraie aussi, car $4 < 7$.

Conclusion. BC peut valoir 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 km : sept valeurs.

Exercice 4

Hauteurs d'un triangle à angle obtus

Sur du papier quadrillé à carreaux de 1 cm, choisis un point A sur une ligne du quadrillage. Le point B est sur cette même ligne, à 4 carreaux à droite de A. Le point C est à 6 carreaux à droite de A et à 3 carreaux au-dessus de la ligne. Trace le triangle ABC.

1.

L'angle $\widehat{ABC}$ est-il aigu, droit ou obtus ? Mesure-le au rapporteur.

INDICE

Outil : un angle obtus mesure plus de $90°$.

Point délicat : place le centre du rapporteur en B.

CORRIGÉ

Place le centre du rapporteur en B et son zéro sur le côté $[BA]$. On lit environ $124°$.

Cette mesure dépasse $90°$: par définition, l'angle est obtus.

Conclusion. L'angle $\widehat{ABC}$ est obtus ; il mesure environ $124°$.

2.

Trace la hauteur issue de C. Où se trouve son pied H ? Donne la longueur CH.

INDICE

Outil : la définition d'une hauteur.

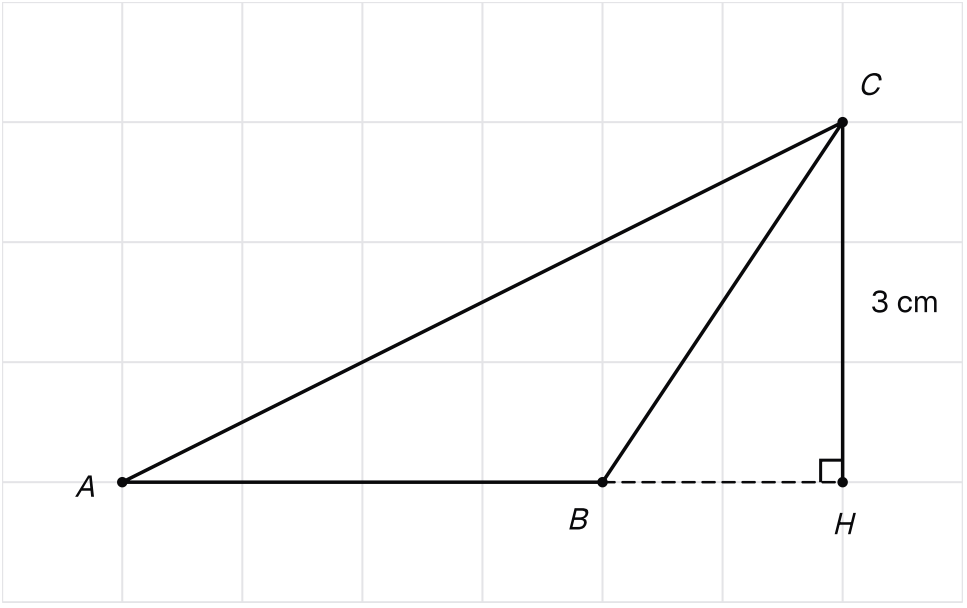
Point délicat : la hauteur est perpendiculaire à la droite (AB) ; prolonge le côté $[AB]$.

CORRIGÉ

Prolonger le côté. Le côté $[AB]$ s'arrête à 4 carreaux de A, avant d'arriver sous C. Or la hauteur est perpendiculaire à la droite (AB) : à la règle, prolonge $[AB]$ au-delà de B.

Pied. La hauteur issue de C suit la ligne verticale du quadrillage qui passe par C. Elle coupe la droite (AB) en H, à 6 carreaux de A : le pied est en dehors du segment $[AB]$.

Conclusion. Le pied H est sur le prolongement de $[AB]$, au-delà de B, et $CH = 3$ cm.



Le côté [AB] est prolongé au-delà de B : la hauteur issue de C le rejoint en H, hors du segment, avec CH = 3 cm.

3.

Trace la hauteur issue de A. Elle coupe la droite (CH) en un point K. Où se trouve K ?

INDICE

Outil : le concours des hauteurs.

Point délicat : la hauteur issue de A est perpendiculaire à (BC) ; prolonge les droites au-delà du triangle.

CORRIGÉ

Tracé. À l'équerre, trace la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à (BC). Prolonge-la, ainsi que (CH), en dehors du triangle.

Nature de K. Le point K est sur deux hauteurs du triangle : c'est l'orthocentre du triangle ABC.

Position. Sur le quadrillage, K est à 4 carreaux sous la droite (AB), à la verticale de C. Il est donc à l'extérieur du triangle, ce qui se produit lorsque le triangle a un angle obtus.

Conclusion. K est l'orthocentre de ABC ; il se trouve sous la droite (AB), en dehors du triangle.

4.

Contrôle : trace la hauteur issue de B. Passe-t-elle par K ?

INDICE

Outil : les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

CORRIGÉ

La hauteur issue de B passe par B et elle est perpendiculaire à (AC). Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes : elle passe donc par K.

Pour le constater sur ta figure, prolonge cette hauteur au-delà de B, sous la droite (AB).

Conclusion. Oui, la hauteur issue de B passe par K.

Exercice 5

Un arroseur pour trois arbres

Dans un verger, trois arbres sont plantés en A, B et C. Sur le plan, quadrillé à carreaux de 1 cm, B est à 8 carreaux à droite de A, sur la même ligne. Le point C est à 6 carreaux à droite de A et à 6 carreaux au-dessus. Sur ce plan, 1 cm représente 10 m. On veut placer un arroseur à la même distance des trois arbres.

1.

Construis le point O où se coupent la médiatrice de $[AB]$ et celle de $[BC]$.

INDICE

Outil : la construction d'une médiatrice au compas : deux arcs de même rayon, centrés aux extrémités.

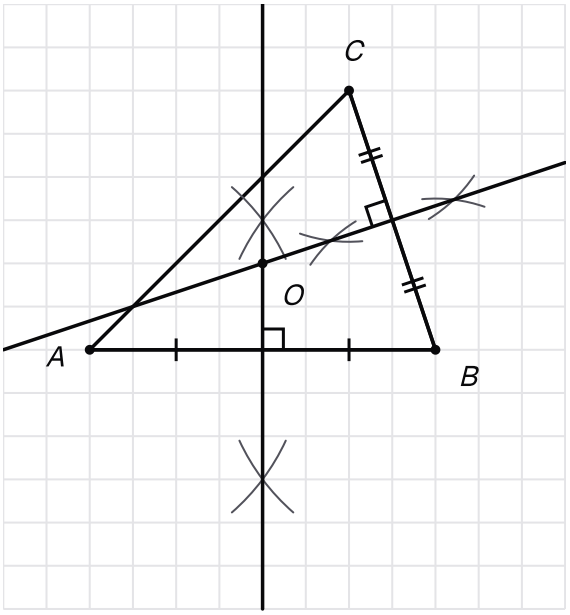
Point délicat : si le rayon est trop petit, les arcs ne se croisent pas.

CORRIGÉ

Médiatrice de $[AB]$. Ouvre le compas de plus de la moitié de AB, soit plus de 4 cm. Avec cet écartement, trace deux arcs de centres A et B : ils se coupent en deux points. À la règle, trace la droite qui les relie.

Médiatrice de $[BC]$. Recommence avec B et C, en prenant un écartement supérieur à la moitié de BC.

Conclusion. Les deux médiatrices se coupent en O : sur le plan, O est à 4 carreaux à droite de A et à 2 carreaux au-dessus.



Chaque médiatrice passe par les deux croisements d'arcs de même rayon ; elles se rencontrent en O, à 4 carreaux à droite de A et 2 au-dessus.

2.

Justifie en quelques lignes que O est à la même distance des trois arbres.

INDICE

Début : O est sur la médiatrice de $[AB]$; que peux-tu dire de OA et de OB ?

Ensuite : fais de même avec $[BC]$.

CORRIGÉ

Médiatrice de $[AB]$. Le point O appartient à la médiatrice de $[AB]$. D'après la propriété caractéristique de la médiatrice, il est à la même distance de A et de B : $OA = OB$.

Médiatrice de $[BC]$. Le point O appartient aussi à la médiatrice de $[BC]$; pour la même raison, $OB = OC$.

Conclusion. $OA = OB = OC$: un arroseur placé en O est à la même distance des trois arbres.

3.

Sur le plan, mesure OA au millimètre près. Quelle est la distance réelle entre l'arroseur et chaque arbre ?

INDICE

Début : sur le plan, 1 cm représente 10 m.

CORRIGÉ

Sur le plan. Ta mesure de OA doit être d'environ $4{,}5$ cm.

Dans la réalité. Chaque centimètre du plan représente 10 m : on multiplie par 10. On obtient $4{,}5 \times 10 = 45$ m.

Conclusion. L'arroseur est à environ 45 m de chacun des trois arbres.

Exercice 6

Des lampadaires entre deux routes

Deux routes droites partent d'un carrefour O. Elles suivent les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$, avec $\widehat{xOy} = 70°$. On veut placer des lampadaires entre les deux routes, chacun à la même distance des deux routes.

1.

Construis l'angle $\widehat{xOy}$, puis sa bissectrice $[Oz)$ au compas. Quelle est la mesure de $\widehat{xOz}$?

INDICE

Outil : la définition de la bissectrice.

Début : un arc de centre O coupe $[Ox)$ et $[Oy)$.

CORRIGÉ

Angle. Au rapporteur, trace deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ telles que $\widehat{xOy} = 70°$.

Bissectrice au compas.

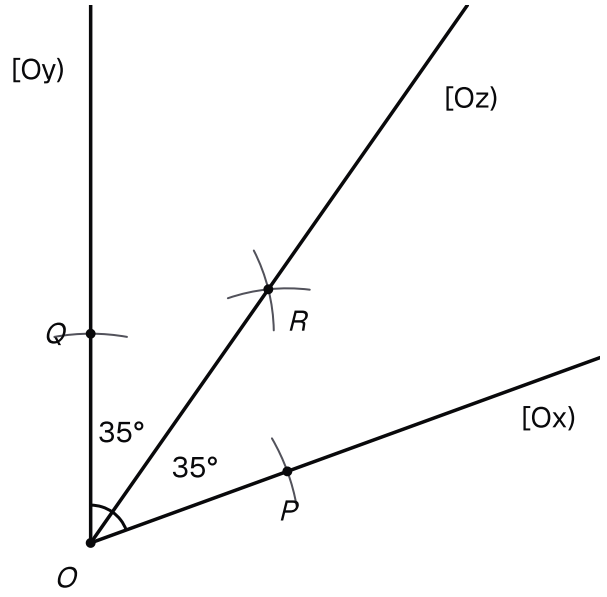
1. Trace un arc de centre O : il coupe $[Ox)$ en P et $[Oy)$ en Q.
2. Choisis un écartement supérieur à la moitié de PQ, et garde-le.
3. Avec cet écartement, trace un arc de centre P et un arc de centre Q.
4. Nomme R un point commun à ces deux arcs, pris à l'intérieur de l'angle $\widehat{xOy}$ et différent de O.

On admet que la demi-droite $[OR)$ est la bissectrice $[Oz)$; le rapporteur permet de le vérifier.

Mesure. La bissectrice partage l'angle en deux angles de même mesure :

$$\widehat{xOz} = 70° \div 2 = 35°$$

Conclusion. L'angle $\widehat{xOz}$ mesure $35°$.



Construction de la bissectrice [Oz) : un arc de centre O donne P et Q, puis deux arcs de même rayon centrés en P et Q se croisent en R ; chaque moitié de l'angle mesure 35 degrés.

2.

Un lampadaire L est placé sur $[Oz)$, à 6 m de la route (Ox). À quelle distance est-il de la route (Oy) ? Justifie.

INDICE

Outil : la propriété caractéristique de la bissectrice, dans le sens « sur la bissectrice, donc à égale distance ».

Point délicat : elle s'applique à un point situé à l'intérieur de l'angle.

CORRIGÉ

Position de L. Le point L est sur $[Oz)$, entre les deux routes : il est à l'intérieur de l'angle $\widehat{xOy}$, sur sa bissectrice.

Propriété. D'après la propriété caractéristique de la bissectrice, un tel point est à la même distance des droites (Ox) et (Oy). Sa distance à (Ox) vaut 6 m : sa distance à (Oy) vaut donc aussi 6 m.

Conclusion. Le lampadaire L est à 6 m de la route (Oy).

3.

Un point N, entre les deux routes, est à 4 m de (Ox) et à 7 m de (Oy). Est-il sur la bissectrice ? Justifie.

INDICE

Début : suppose que N soit sur la bissectrice ; que vaudraient ses deux distances ?

Point délicat : compare avec les distances données.

CORRIGÉ

Position de N. Le point N est entre les deux routes, donc à l'intérieur de l'angle $\widehat{xOy}$.

Raisonnement. Supposons que N soit sur la bissectrice. La propriété caractéristique de la bissectrice dirait alors que ses distances aux deux routes sont égales. Or elles valent 4 m et 7 m, et $4 \neq 7$: c'est impossible.

Conclusion. N n'est pas sur la bissectrice : ce n'est pas une bonne place pour un lampadaire.

Exercice 7

Un bassin rond dans un terrain

Un terrain a la forme d'un triangle ABC. Sur le plan, 1 cm représente 10 m. Trace un angle droit de sommet A. Place B sur un côté de cet angle, à 4 cm de A, et C sur l'autre côté, à 3 cm de A. On veut creuser un bassin rond qui touche les trois bords du terrain.

1.

Construis les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$. Nomme I leur point d'intersection.

INDICE

Outil : la bissectrice au compas ou au rapporteur.

Point délicat : l'angle en A est droit ; sa bissectrice fait $45°$ avec chaque côté.

CORRIGÉ

Bissectrice en A. L'angle $\widehat{BAC}$ est droit : sa bissectrice fait $90° \div 2 = 45°$ avec chaque côté. Au rapporteur centré en A, trace la demi-droite qui fait $45°$ avec $[AB]$, à l'intérieur de l'angle droit.

Bissectrice en B. Au compas, trace un arc de centre B qui coupe $[BA]$ et $[BC]$. Depuis ces deux points, trace deux arcs de même rayon, plus long que la moitié de la distance qui les sépare. Relie à B un de leurs points communs, pris à l'intérieur de l'angle $\widehat{ABC}$ et différent de B (tracé admis, que tu peux contrôler au rapporteur).

Conclusion. Les deux bissectrices se coupent en I. Sur ta figure, I est à 1 cm de $[AB]$ et à 1 cm de $[AC]$.

2.

On note E, F et G les pieds des perpendiculaires à (BC), (AC) et (AB) passant par I. Justifie que $IF = IG$, puis que $IG = IE$.

INDICE

Outil : la propriété caractéristique de la bissectrice.

Début : I est sur la bissectrice issue de A ; à quelles droites est-il à égale distance ?

Point délicat : vérifie d'abord que I est à l'intérieur de l'angle.

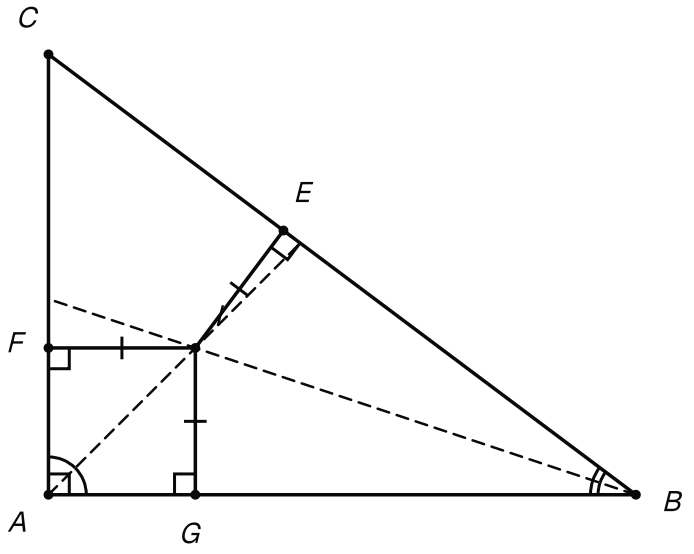
CORRIGÉ

Position de I. D'après la propriété des bissectrices d'un triangle, I est à l'intérieur du triangle. Il est donc aussi à l'intérieur de chacun de ses angles.

Bissectrice issue de A. I est sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et à l'intérieur de $\widehat{BAC}$. D'après la propriété caractéristique de la bissectrice, il est à la même distance des droites (AB) et (AC). Ces distances sont IG et IF : $IG = IF$.

Bissectrice issue de B. De même, I est sur la bissectrice de $\widehat{ABC}$ et à l'intérieur de $\widehat{ABC}$. Il est donc à la même distance des droites (AB) et (BC) : $IG = IE$.

Conclusion. Les deux égalités ont IG en commun, donc $IE = IF = IG$.



Le point I, commun aux bissectrices issues de A et de B, est relié aux pieds E, F et G de ses perpendiculaires aux trois côtés : IE = IF = IG.

3.

Trace le cercle de centre I et de rayon IE. Quel est le rayon réel du bassin ?

INDICE

Début : repars de l'égalité obtenue à la question 2.

Ensuite : mesure IE sur le plan, puis applique l'échelle.

CORRIGÉ

Le cercle. D'après la question 2, $IE = IF = IG$. Le cercle de centre I et de rayon IE passe donc par E, F et G : c'est le cercle inscrit dans le triangle ABC.

Sur ta figure, tu observes qu'il touche chaque bord du terrain ; ce fait sera justifié au chapitre « Le cercle ».

Échelle. Sur le plan, $IE = 1$ cm, et 1 cm représente 10 m.

Conclusion. Le bassin a un rayon réel de 10 m.