BURHAN

Le triangle : angles, droites remarquables et cercles : exercices, application

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/le-triangle/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Le triangle : angles, droites remarquables et cercles	Application	8

Exercice 1

La voile d'un bateau

La voile d'un petit bateau a la forme d'un triangle PQR. On a mesuré $\widehat{QPR} = 38°$ et $\widehat{PQR} = 104°$.

1.

Calcule la mesure de l'angle $\widehat{PRQ}$.

INDICE

Outil : la somme des angles d'un triangle.

Début : additionne les deux angles connus.

CORRIGÉ

Angles connus. On additionne d'abord les deux mesures relevées sur la voile :

$$38° + 104° = 142°$$

Troisième angle. Les trois angles d'un triangle totalisent $180°$. L'angle $\widehat{PRQ}$ est ce qui manque à $142°$ pour arriver à $180°$:

$$\widehat{PRQ} = 180° - 142° = 38°$$

Contrôle. $38° + 104° + 38° = 180°$.

Conclusion. L'angle $\widehat{PRQ}$ mesure $38°$.

2.

Sami affirme qu'un autre triangle a un angle de $95°$ et un angle de $88°$. Est-ce possible ?

INDICE

Outil : la somme des angles d'un triangle.

Point délicat : compare le total de ces deux angles à $180°$.

CORRIGÉ

Les deux angles annoncés par Sami totalisent :

$$95° + 88° = 183°$$

Ce total dépasse déjà $180°$. Or les trois angles d'un triangle totalisent exactement $180°$, et le troisième angle mesure plus de $0°$: la somme des trois serait plus grande que $183°$.

Conclusion. Ce n'est pas possible : Sami se trompe, aucun triangle n'a un angle de $95°$ et un angle de $88°$.

Exercice 2

Deux cintres isocèles

Un cintre a la forme d'un triangle ABC isocèle en A : le crochet est fixé au sommet A.

1.

On mesure $\widehat{BAC} = 100°$. Calcule $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

INDICE

Outil : dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux.

Début : retire l'angle au sommet de $180°$.

CORRIGÉ

Angles à la base. Le triangle ABC est isocèle en A : ses angles à la base sont $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. D'après la propriété des angles d'un triangle isocèle, ils ont la même mesure.

Ce qui reste. Les trois angles totalisent $180°$. Une fois l'angle au sommet retiré, il reste pour les deux angles à la base :

$$180° - 100° = 80°$$

Partage. Ces $80°$ se partagent en deux parts égales :

$$\begin{aligned}\widehat{ABC} = \widehat{ACB} &= 80° \div 2 \\ &= 40°\end{aligned}$$

Conclusion. $\widehat{ABC} = 40°$ et $\widehat{ACB} = 40°$.

2.

Un autre cintre forme un triangle DEF isocèle en D, avec $\widehat{DEF} = 64°$. Calcule ses deux autres angles.

INDICE

Outil : les angles à la base d'un triangle isocèle.

Point délicat : l'angle donné est un angle à la base, pas l'angle au sommet.

CORRIGÉ

Autre angle à la base. Le triangle DEF est isocèle en D : sa base est $[EF]$, et $\widehat{DEF}$ est l'un de ses angles à la base. Les deux angles à la base sont égaux, donc :

$$\widehat{DFE} = \widehat{DEF} = 64°$$

Angle au sommet. Les trois angles totalisent $180°$. On retire de $180°$ les deux angles à la base :

$$\begin{aligned}\widehat{EDF} &= 180° - 2 \times 64° \\ &= 180° - 128° \\ &= 52°\end{aligned}$$

Conclusion. $\widehat{DFE} = 64°$ et $\widehat{EDF} = 52°$.

Exercice 3

Un panneau, une rampe et une équerre

1.

Un panneau routier a la forme d'un triangle équilatéral. Quelle est la mesure de chacun de ses angles ?

INDICE

Outil : la propriété des angles d'un triangle équilatéral.

CORRIGÉ

Le panneau est un triangle équilatéral. D'après la propriété des angles d'un triangle équilatéral, ses trois angles ont la même mesure : $60°$ chacun.

Contrôle. Les trois angles totalisent bien $180°$:

$$3 \times 60° = 180°$$

Conclusion. Chaque angle du panneau mesure $60°$.

2.

Une rampe d'accès forme avec le sol et un mur un triangle RST rectangle en S. La rampe $[RT]$ fait avec le sol l'angle $\widehat{SRT} = 8°$. Calcule $\widehat{RTS}$.

INDICE

Outil : dans un triangle rectangle, les deux angles aigus totalisent $90°$.

CORRIGÉ

Le triangle RST est rectangle en S : ses deux angles aigus, $\widehat{SRT}$ et $\widehat{RTS}$, totalisent $90°$ (propriété des angles d'un triangle rectangle). Donc :

$$\widehat{RTS} = 90° - 8° = 82°$$

Conclusion. L'angle $\widehat{RTS}$ mesure $82°$.

3.

Une équerre a la forme d'un triangle UVW isocèle rectangle en U. Calcule $\widehat{UVW}$ et $\widehat{UWV}$.

INDICE

Début : l'équerre est rectangle en U, donc $\widehat{UVW} + \widehat{UWV} = 90°$.

Ensuite : elle est aussi isocèle en U.

CORRIGÉ

Rectangle en U. Les angles aigus de l'équerre sont $\widehat{UVW}$ et $\widehat{UWV}$. D'après la propriété des angles d'un triangle rectangle, ils totalisent $90°$.

Isocèle en U. Ces deux angles sont aussi les angles à la base du triangle isocèle UVW : ils sont égaux. Chacun vaut donc la moitié de $90°$:

$$90° \div 2 = 45°$$

Conclusion. $\widehat{UVW} = 45°$ et $\widehat{UWV} = 45°$.

Exercice 4

Trois pailles sur la table

Lina a des pailles de plusieurs longueurs. Elle veut former un triangle en posant trois pailles bout à bout sur sa table.

1.

Avec des pailles de 4 cm, 7 cm et 10 cm, peut-elle former un triangle ?

INDICE

Outil : l'inégalité triangulaire.

Début : compare la plus longue paille à la somme des deux autres.

CORRIGÉ

La plus grande longueur est 10 cm. On la compare à la somme des deux autres : $4 + 7 = 11$ cm.

Comme $10 < 11$, la plus longue paille est plus courte que les deux autres mises bout à bout. D'après la propriété d'existence d'un triangle de côtés donnés, le triangle existe.

Conclusion. Oui, Lina peut former un triangle avec ces trois pailles.

2.

Même question avec des pailles de 3 cm, 5 cm et 9 cm.

INDICE

Outil : la même méthode.

Point délicat : ne compare pas une petite longueur à la somme des deux autres.

CORRIGÉ

La plus grande longueur est 9 cm. Les deux autres totalisent $3 + 5 = 8$ cm.

Comme $9 > 8$, les deux petites pailles mises bout à bout sont trop courtes : leurs extrémités ne peuvent pas se rejoindre.

Conclusion. Non, ces trois pailles ne forment pas de triangle.

3.

Même question avec des pailles de 5 cm, 8 cm et 13 cm.

INDICE

Point délicat : regarde ce qui arrive quand la somme est exactement égale à la plus grande longueur.

CORRIGÉ

La plus grande longueur est 13 cm, et les deux autres totalisent $5 + 8 = 13$ cm : il y a égalité.

Les deux petites pailles ne se rejoignent alors qu'en restant couchées le long de la grande. Les trois sommets seraient alignés.

Conclusion. Non : Lina obtient un segment, pas un triangle.

Exercice 5

Le plan d'un massif de fleurs

Sur un plan, un massif de fleurs est un triangle KLM tel que $KL = 8$ cm, $KM = 6$ cm et $LM = 5$ cm.

1.

Vérifie que ce triangle existe.

INDICE

Outil : l'inégalité triangulaire, appliquée à la plus grande longueur.

CORRIGÉ

La plus grande longueur est $KL = 8$ cm. La somme des deux autres vaut $KM + LM = 6 + 5 = 11$ cm.

Comme $8 < 11$, la propriété d'existence d'un triangle de côtés donnés s'applique.

Conclusion. Le triangle KLM existe.

2.

Écris un programme de construction, puis construis le triangle KLM sur ton cahier.

INDICE

Outil : la règle graduée et le compas.

Début : trace d'abord le côté $[KL]$.

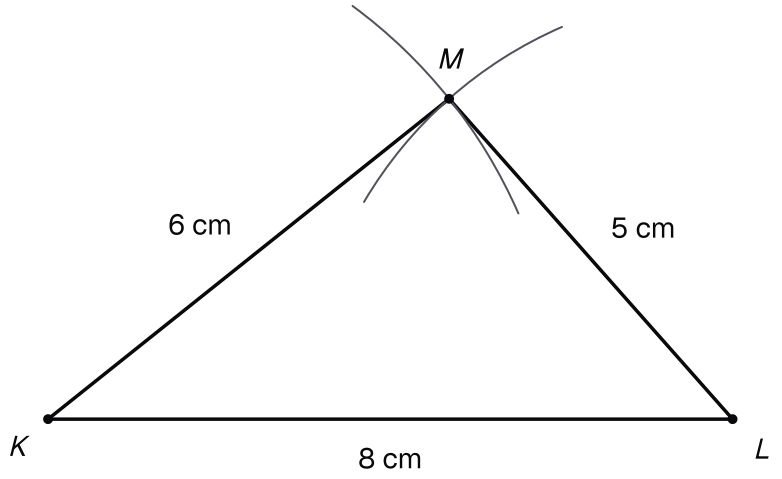
CORRIGÉ

Programme.

1. À la règle graduée, trace le segment $[KL]$ de longueur 8 cm.
2. Au compas, trace un arc de cercle de centre K et de rayon 6 cm.
3. Au compas, trace un arc de cercle de centre L et de rayon 5 cm.
4. Nomme M l'un des points où les deux arcs se coupent, puis trace $[KM]$ et $[LM]$.

Justification. Le point M est sur l'arc de centre K et de rayon 6 cm, donc $KM = 6$ cm. Il est aussi sur l'arc de centre L et de rayon 5 cm, donc $LM = 5$ cm.

Conclusion. Le triangle tracé a les trois côtés voulus : $KL = 8$ cm, $KM = 6$ cm et $LM = 5$ cm.



Construction de KLM : [KL] mesure 8 cm, l'arc de centre K a pour rayon 6 cm, celui de centre L 5 cm, et M est leur point commun.

3.

En combien de points les deux arcs complets se coupent-ils ? Combien de triangles peux-tu ainsi tracer ?

INDICE

Outil : observe ta figure.

Début : prolonge les deux arcs de chaque côté de $[KL]$.

CORRIGÉ

Les deux arcs complets se coupent en deux points, placés de part et d'autre de la droite (KL).

Chacun de ces points donne un triangle dont les côtés mesurent 8 cm, 6 cm et 5 cm.

Conclusion. Les arcs se coupent en deux points : tu peux tracer deux triangles, qui ont les mêmes longueurs de côtés.

Exercice 6

Deux constructions au rapporteur

1.

Construis un triangle RST tel que $RS = 6$ cm, $\widehat{SRT} = 35°$ et $\widehat{RST} = 75°$. Écris d'abord ton programme de construction.

INDICE

Outil : la règle et le rapporteur.

Point délicat : vérifie d'abord que $35° + 75°$ est inférieur à $180°$.

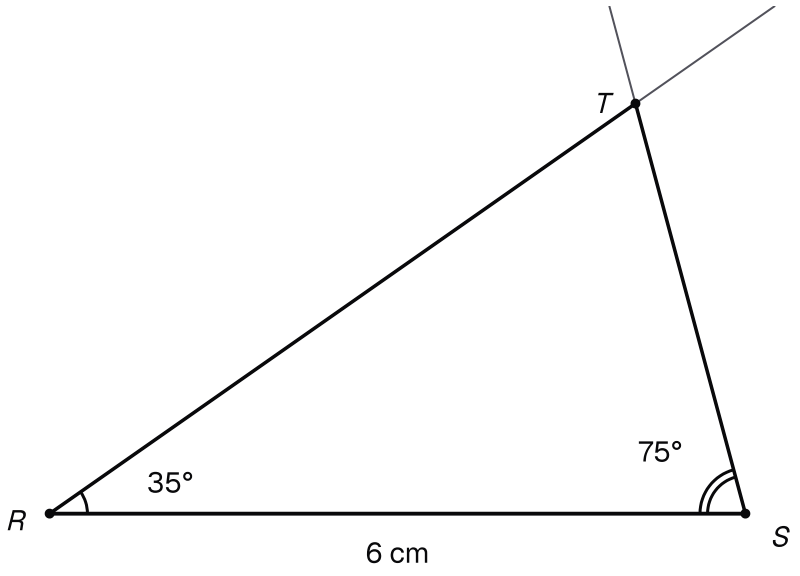
CORRIGÉ

Condition. Les deux angles donnés totalisent $35° + 75° = 110°$. Ce total est inférieur à $180°$: les deux demi-droites tracées vont se couper.

Programme.

1. À la règle, trace $[RS]$ de longueur 6 cm.
2. Rapporteur centré en R : trace, d'un côté de $[RS]$, une demi-droite qui fait un angle de $35°$ avec $[RS]$.
3. Rapporteur centré en S, du même côté de $[RS]$: trace une demi-droite qui fait un angle de $75°$ avec $[SR]$.
4. Nomme T le point où les deux demi-droites se coupent.

Conclusion. Le triangle RST obtenu a un côté $[RS]$ de 6 cm, avec des angles de $35°$ en R et de $75°$ en S.



Construction de RST : sur [RS] de 6 cm, on trace une demi-droite à 35 degrés en R et une à 75 degrés en S, du même côté ; elles se coupent en T.

2.

Calcule la mesure de $\widehat{RTS}$, puis contrôle-la au rapporteur sur ta figure.

INDICE

Outil : la somme des angles d'un triangle.

CORRIGÉ

Les angles en R et en S totalisent $110°$ (question 1). D'après la somme des angles d'un triangle, le troisième angle complète ce total jusqu'à $180°$:

$$\widehat{RTS} = 180° - 110° = 70°$$

Contrôle. Sur ta figure, le rapporteur doit indiquer environ $70°$. Si l'écart est grand, reprends le tracé des deux angles.

Conclusion. L'angle $\widehat{RTS}$ mesure $70°$.

3.

Construis un triangle UVW tel que $UV = 5$ cm, $UW = 4$ cm et $\widehat{VUW} = 120°$.

INDICE

Outil : la construction avec deux côtés et l'angle compris.

Début : trace $[UV]$, puis l'angle en U.

CORRIGÉ

Programme.

1. À la règle, trace $[UV]$ de longueur 5 cm.
2. Rapporteur centré en U : trace une demi-droite $[Ux)$ qui fait un angle de $120°$ avec $[UV]$.
3. À la règle graduée, place sur $[Ux)$ le point W tel que $UW = 4$ cm.
4. Trace $[VW]$.

Contrôle. Mesure UV, UW et $\widehat{VUW}$ sur ta figure : tu dois retrouver 5 cm, 4 cm et $120°$.

Conclusion. Le triangle UVW est construit à partir de deux côtés et de l'angle compris entre eux.

Exercice 7

Trois hauteurs sur papier quadrillé

Sur du papier quadrillé à carreaux de 1 cm, place un point A sur une ligne du quadrillage. Place B à 8 carreaux à droite de A, sur cette ligne. Place C à 2 carreaux à droite de A et à 6 carreaux au-dessus de cette ligne. Trace le triangle ABC.

1.

Trace à l'équerre la hauteur issue de C. Nomme H son pied. Quelle est la longueur CH ?

INDICE

Outil : la définition d'une hauteur : elle passe par C et elle est perpendiculaire à (AB).

Début : ici, elle suit une ligne du quadrillage.

CORRIGÉ

Tracé. La hauteur issue de C passe par C et elle est perpendiculaire à (AB). Pose un bord de l'angle droit de l'équerre sur (AB), puis fais glisser l'équerre jusqu'à C.

Ici, (AB) suit une ligne du quadrillage : la hauteur suit donc la ligne verticale du quadrillage qui passe par C.

Pied et longueur. Le pied H est sur $[AB]$, à 2 carreaux à droite de A, juste sous C. Le point C est 6 carreaux plus haut.

Conclusion. $CH = 6$ cm : c'est la distance du point C à la droite (AB).

2.

Trace la hauteur issue de A. Elle coupe $[CH]$ en un point K. Que représente K pour le triangle ? À combien de carreaux au-dessus de H se trouve-t-il ?

INDICE

Outil : le concours des hauteurs d'un triangle.

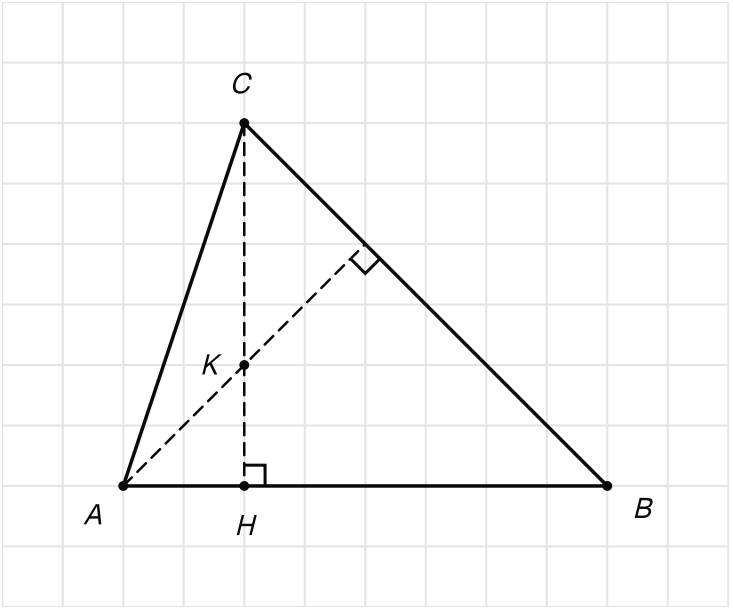
Point délicat : la hauteur issue de A est perpendiculaire à (BC), pas à (AB).

CORRIGÉ

Tracé. À l'équerre, trace la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à (BC) : c'est la hauteur issue de A.

Nature de K. Le point K appartient à deux hauteurs du triangle : celle issue de C et celle issue de A. D'après le concours des hauteurs, K est l'orthocentre du triangle ABC.

Conclusion. K est l'orthocentre du triangle ABC. Sur ta figure, K est à 2 carreaux au-dessus de H.



Sur le quadrillage, la hauteur issue de C, de pied H, et celle issue de A, perpendiculaire à (BC), se coupent en K, deux carreaux au-dessus de H.

3.

Trace la hauteur issue de B. Passe-t-elle par K ?

INDICE

Outil : le concours des hauteurs d'un triangle.

Début : regarde où passe ta troisième hauteur par rapport au point K.

CORRIGÉ

La hauteur issue de B passe par B et elle est perpendiculaire à (AC). Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes : celle-ci passe donc par le point commun aux deux autres, le point K.

Ce tracé sert de contrôle : si ta troisième hauteur passe loin de K, reprends les tracés précédents.

Conclusion. Oui, la hauteur issue de B passe par K.

Exercice 8

Un cercle par trois points

Sur du papier quadrillé à carreaux de 1 cm, place un point A. Place B à 6 carreaux à droite de A, sur la même ligne. Place C à 4 carreaux à droite de A et à 4 carreaux au-dessus. Trace le triangle ABC.

1.

Construis au compas la médiatrice de $[AB]$ et celle de $[AC]$. Nomme O leur point d'intersection.

INDICE

Outil : deux arcs de même rayon, centrés aux extrémités du segment.

Point délicat : choisis un rayon plus grand que la moitié du segment.

CORRIGÉ

Médiatrice de $[AB]$. Ouvre le compas d'un écartement plus grand que la moitié de AB. Garde-le pour tracer deux arcs, de centres A et B : ils se coupent en deux points. À la règle, trace la droite qui passe par ces deux points.

Médiatrice de $[AC]$. Même construction avec les extrémités A et C.

Conclusion. Les deux médiatrices se coupent en O : sur le quadrillage, O est à 3 carreaux à droite de A et à 1 carreau au-dessus.

2.

Justifie que $OA = OB = OC$.

INDICE

Outil : la propriété caractéristique de la médiatrice d'un segment.

CORRIGÉ

Avec $[AB]$. Le point O est sur la médiatrice de $[AB]$. D'après la propriété caractéristique de la médiatrice, il est à la même distance de A et de B : $OA = OB$.

Avec $[AC]$. Le point O est aussi sur la médiatrice de $[AC]$. Pour la même raison, $OA = OC$.

Conclusion. Les deux égalités ont OA en commun, donc $OA = OB = OC$.

3.

Trace le cercle de centre O qui passe par A. Passe-t-il par B et par C ? Mesure son rayon au millimètre près.

INDICE

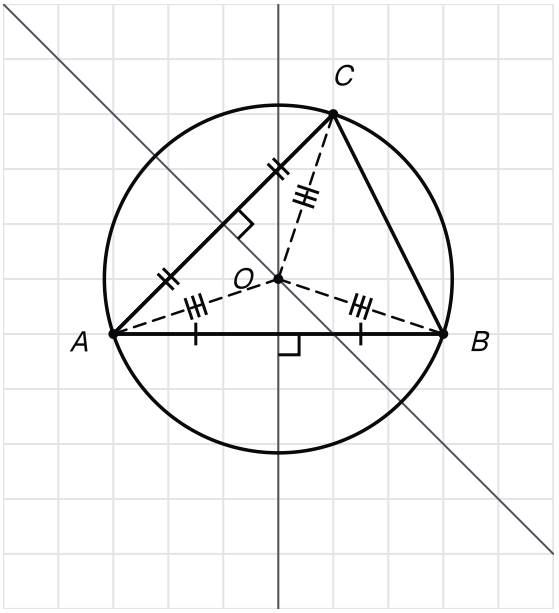
Début : utilise l'égalité de la question 2.

CORRIGÉ

D'après la question 2, $OA = OB = OC$. Le cercle de centre O et de rayon OA passe donc aussi par B et par C : c'est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Mesure. Sur ta figure, le rayon OA mesure environ $3{,}2$ cm.

Conclusion. Oui, ce cercle passe par B et par C, et son rayon mesure environ $3{,}2$ cm.



Les médiatrices de [AB] et de [AC] se coupent en O ; le cercle de centre O passant par A passe aussi par B et C.