BURHAN

Le triangle : angles, droites remarquables et cercles

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/le-triangle/cours

Chapitre	Semestre
Le triangle : angles, droites remarquables et cercles	Semestre 1

La somme des angles d'un triangle

Trois triangles, une prédiction

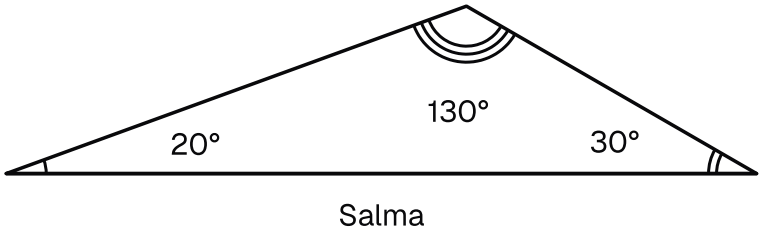
Trois élèves ont tracé chacun un triangle, puis mesuré ses angles au rapporteur.

Le triangle de Salma est long et plat : ses angles mesurent $20°$, $30°$ et $130°$.

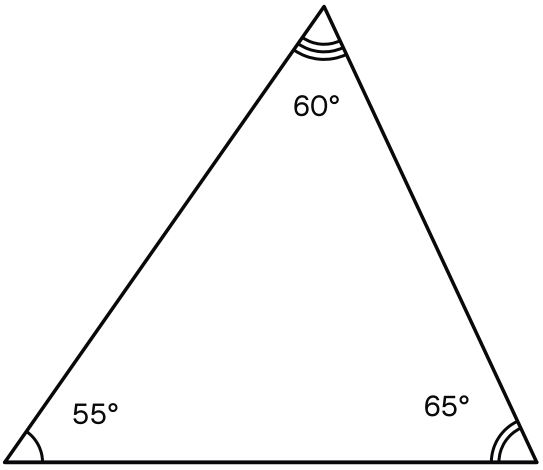
Celui d'Omar est presque régulier : $55°$, $60°$ et $65°$.

Celui de Yasmine a un angle droit : $90°$, $35°$ et $55°$.

Ces trois triangles ne se ressemblent pas. Ont-ils pourtant un point commun ?

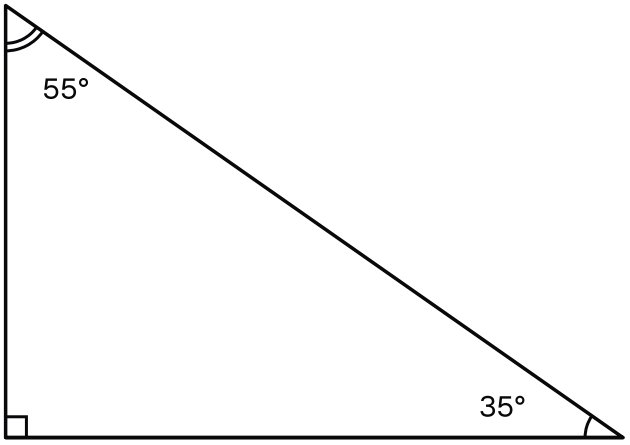


Le triangle de Salma, long et plat, avec ses trois angles mesurés : 20 degrés, 30 degrés et 130 degrés.



Omar

Le triangle d'Omar, presque régulier, avec ses trois angles mesurés : 55 degrés, 65 degrés et 60 degrés.



Yasmine

Le triangle de Yasmine, qui possède un angle droit, avec ses deux autres angles mesurés : 35 degrés et 55 degrés.

Devine : Trois additions

Additionne les trois angles de chaque triangle. Que constates-tu ?

A. La somme change avec la forme du triangle.

Faux.

Refais les trois additions, puis compare les trois résultats.

B. Les trois sommes valent $180°$.

Juste.

Juste : par exemple, $20° + 30° + 130° = 180°$.

C. Les trois sommes valent $360°$.

Faux.

$360°$ est la mesure d'un tour complet. Refais l'addition : chaque somme vaut la moitié.

D. Seul le triangle qui a un angle droit donne $180°$.

Faux.

Les trois sommes donnent $180°$, avec ou sans angle droit.

Correction

On additionne les trois angles de chaque triangle.

Salma : $20° + 30° + 130° = 180°$.

Omar : $55° + 60° + 65° = 180°$.

Yasmine : $90° + 35° + 55° = 180°$.

Trois triangles très différents donnent la même somme. La suite du cours dit que c'est le cas de tous les triangles.

Rassembler les trois coins

Rappel du primaire : un angle se mesure en **degrés**, avec un rapporteur.

- Un angle **aigu** mesure moins de $90°$.
- Un angle **droit** mesure $90°$.
- Un angle **obtus** mesure entre $90°$ et $180°$.
- Un angle **plat** mesure $180°$: ses deux côtés forment une droite.

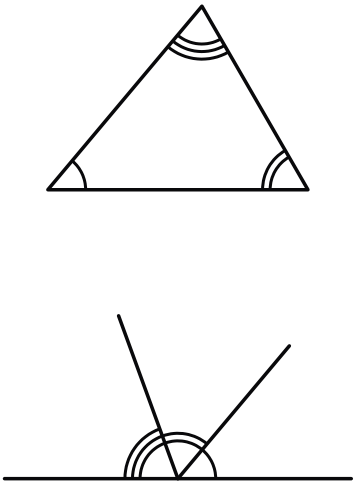
Une expérience. Trace un triangle sur une feuille, puis découpe-le. Déchire ses trois coins et pose-les côte à côte, sommets au même point, sans chevauchement.

Les trois coins forment un angle plat : leurs bords extérieurs sont alignés.

Cette expérience ne prouve rien pour tous les triangles. Elle donne seulement l'idée de la propriété suivante.

Deux mots du chapitre. Démontrer un résultat, c'est prouver qu'il est toujours vrai, par un raisonnement fait étape par étape.

Un résultat **admis** est un résultat qu'on accepte sans le démontrer pour le moment : tu peux t'en servir comme d'un outil.



Les trois coins du triangle, recollés autour d'un même sommet, se placent bout à bout : leurs bords extérieurs sont sur une même droite.

Propriété : Somme des angles d'un triangle

Dans tout triangle ABC, la somme des mesures des trois angles est égale à $180°$:

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°.$$

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis ici ; il sera démontré au chapitre « Deux parallèles et une sécante ».

Calculer le troisième angle

Méthode : trouver le troisième angle

1. **Additionne** les deux angles que tu connais.
2. **Retire** ce total de $180°$: c'est le troisième angle.
3. **Rédige** en nommant le triangle et la propriété de la somme des angles.
4. **Vérifie** que tes trois angles donnent bien $180°$ ensemble.

Exemple : Exemple guidé : un angle manquant

Dans le triangle RST, on mesure $\widehat{SRT} = 48°$ et $\widehat{RST} = 75°$. On cherche $\widehat{RTS}$.

- **Additionner** : $48° + 75° = 123°$.
- **Retirer** : $180° - 123° = 57°$.
- **Rédiger** : « Dans le triangle RST, la somme des angles vaut $180°$. Donc $\widehat{RTS} = 180° - 123° = 57°$. »
- **Vérifier** : $48° + 75° + 57° = 180°$.

Trouve l'erreur : Une rédaction à vérifier

Nour écrit : « Dans le triangle KLM, $\widehat{LKM} = 70°$ et $\widehat{KLM} = 40°$. Donc $\widehat{KML} = 360° - 110° = 250°$. » Où est l'erreur ?

A. Dans l'addition $70° + 40°$.

Faux.
Cette addition est juste : elle donne bien $110°$.

B. Il fallait additionner les deux angles au lieu de soustraire.

Faux.
On ne connaît que deux angles : on retire leur total de $180°$.

C. La somme des angles vaut $180°$, et non $360°$.

Juste.
Juste : $360°$ est un tour complet, pas la somme des angles d'un triangle.

D. Il n'y a pas d'erreur.

Faux.
Un angle de $250°$ dépasse même un angle plat : il ne peut pas être un angle d'un triangle.

Correction
Nour a pris $360°$, la mesure d'un tour complet, au lieu de $180°$.

D'après la somme des angles d'un triangle :

$$\widehat{KML} = 180° - 110° = 70°$$

Contrôle : $70° + 40° + 70° = 180°$.

Un piège, puis à toi

Attention : deux grands angles

✗ « Un triangle peut avoir deux angles obtus. »

✓ Deux angles obtus mesurent chacun plus de $90°$. Ensemble, ils dépassent déjà $180°$. Par exemple :

$$95° + 110° = 205°$$

Un triangle a donc au plus un angle obtus. De même, il a au plus un angle droit.

À toi : Un angle, puis un triangle impossible

(a) Dans le triangle DEF, $\widehat{EDF} = 64°$ et $\widehat{DEF} = 38°$. Calcule $\widehat{DFE}$.

(b) Un triangle peut-il avoir des angles de $80°$, $60°$ et $50°$? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Les deux questions utilisent la somme des angles d'un triangle.
Indice 2
Pour (a), commence par $64° + 38°$.
Indice 3
Point délicat : pour (b), additionne les trois mesures et compare le total à $180°$.

Réponse
(a) Les deux angles connus totalisent $64° + 38° = 102°$. D'après la somme des angles d'un triangle :

$$\begin{aligned} &\widehat{DFE} \\ &= 180° - 102° \\ &= 78° \end{aligned}$$

(b) Non. Les trois angles proposés totalisent :

$$80° + 60° + 50° = 190°$$

Ce total n'est pas $180°$: aucun triangle n'a ces trois angles.

Triangle isocèle et triangle équilatéral

Reconnaître un triangle par ses côtés

Devine : Un triangle à nommer

Un triangle a des côtés de 5 cm, 5 cm et 3 cm. Quel nom lui donnes-tu ?

A. Un triangle isocèle.
Juste.
Juste : deux de ses côtés ont la même longueur.

B. Un triangle équilatéral.
Faux.
Il faudrait trois côtés de même longueur. Ici, le troisième côté est plus court.

C. Un triangle rectangle.
Faux.

> Un triangle rectangle se reconnaît à son angle droit. Les données ne parlent que de longueurs égales.
>
> **D.** Un triangle quelconque.
>
> **Faux.**
> Un triangle quelconque n'a aucun côté égal à un autre. Relis les longueurs.
>
> **Correction**
> Deux côtés mesurent 5 cm : le triangle est **isocèle**.
>
> Il n'est pas équilatéral, car le troisième côté mesure 3 cm. Les mots précis arrivent juste après.

Rappel du primaire : tu reconnais déjà ces triangles à l'œil. En mathématiques, on les reconnaît à leurs **mesures** : longueurs égales, angle droit. Voici le nom exact de chaque partie.

Définition : Triangles particuliers

Soit ABC un triangle.

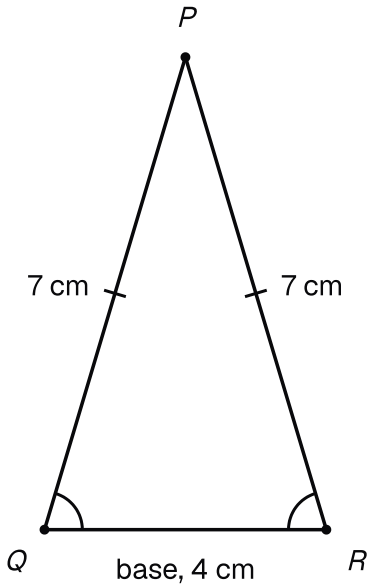
- Le triangle ABC est **isocèle en** A lorsque $AB = AC$. Le point A est son **sommet principal** ; le côté $[BC]$ est sa **base** ; les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont ses **angles à la base**.
- Le triangle ABC est **équilatéral** lorsque ses trois côtés ont la même longueur : $AB = AC = BC$.
- Le triangle ABC est **rectangle en** A lorsque l'angle $\widehat{BAC}$ est droit. Le côté $[BC]$, opposé à l'angle droit, est son **hypoténuse**.
- Le triangle ABC est **isocèle rectangle en** A lorsqu'il est à la fois isocèle en A et rectangle en A.

Exemple : nommer les parties

Dans le triangle PQR, on a $PQ = PR = 7$ cm et $QR = 4$ cm. Il est isocèle en P.

- Son sommet principal est P, et sa base est le côté $[QR]$.
- Ses angles à la base sont $\widehat{PQR}$ et $\widehat{PRQ}$.

Un triangle équilatéral est aussi isocèle, et même en chacun de ses trois sommets.



Le triangle PQR a deux côtés de 7 cm issus de P, son sommet principal ; le côté [QR], long de 4 cm, est sa base.

Les angles à la base

Une observation. Trace sur ton cahier un triangle ABC avec $AB = AC = 6$ cm et $BC = 4$ cm.

Pour cela, trace $[BC]$, puis deux arcs de compas de rayon 6 cm, l'un centré en B, l'autre en C : A est l'un de leurs points communs.

Mesure ensuite ses angles en B et en C au rapporteur : ils ont la même mesure.

Recommence avec $AB = AC = 5$ cm et $BC = 8$ cm, cette fois avec des arcs de rayon 5 cm. Le constat est le même, alors que ce triangle a une tout autre forme : son angle au sommet, en A, est obtus.

Propriété : Angles d'un triangle isocèle

- Si un triangle est isocèle, alors ses deux angles à la base ont la même mesure : si $AB = AC$, alors $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.
- Réciproquement, si deux angles d'un triangle ont la même mesure, alors ce triangle est isocèle : si $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, alors $AB = AC$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis.

Exemple : le toit d'une maison, puis dans l'autre sens

Vu de face, le toit d'une maison forme un triangle ABC isocèle en A. Le faîte est le sommet A, et $\widehat{BAC} = 110°$.

- **Les angles à la base sont égaux**, car le triangle est isocèle en A.
- **Ensemble, ils valent** $180° - 110° = 70°$, d'après la somme des angles.
- **Chacun mesure donc** $70° \div 2 = 35°$.

Conclusion. $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 35°$.

Dans l'autre sens. Dans le triangle XYZ, on mesure $\widehat{ZXY} = \widehat{ZYX} = 65°$. Ces deux angles ont la même mesure. D'après la seconde partie de la propriété, le triangle est isocèle.

Les deux côtés égaux partent du sommet Z, celui du troisième angle : $ZX = ZY$.

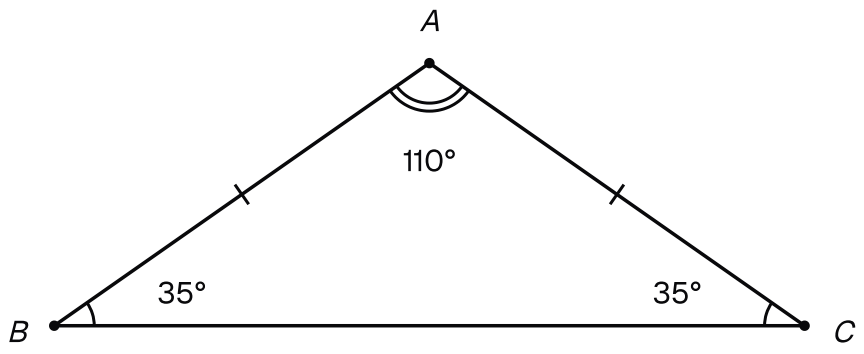
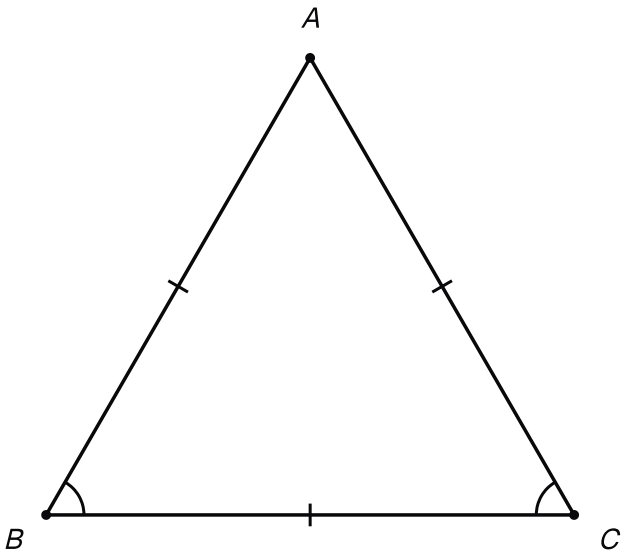


Schéma du toit : dans le triangle ABC isocèle en A, l'angle au faîte vaut 110 degrés et les deux angles à la base, de même mesure, valent 35 degrés.

Le triangle équilatéral

En clair. Un triangle équilatéral a trois côtés égaux. Il est donc isocèle de deux façons différentes.

Pourquoi est-ce vrai ? On applique deux fois la propriété des angles d'un triangle isocèle, puis la somme des angles.



Le triangle équilatéral ABC regardé comme isocèle en A : sur sa base [BC], les angles en B et en C sont égaux.

Propriété : Angles d'un triangle équilatéral

Les trois angles d'un triangle équilatéral ont la même mesure : chacun mesure $60°$.

Démonstration

Étape 1. Soit ABC un triangle équilatéral : $AB = AC = BC$.

Étape 2. On a $AB = AC$: le triangle est isocèle en A, de base $[BC]$. D'après la propriété des angles d'un triangle isocèle, $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Étape 3. On a aussi $BA = BC$: le triangle est isocèle en B, de base $[AC]$. De même, $\widehat{BAC} = \widehat{ACB}$.

Étape 4. Les trois angles ont donc la même mesure. D'après la somme des angles d'un triangle, leur somme vaut $180°$. Chaque angle mesure donc $180° \div 3 = 60°$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On regarde le triangle équilatéral comme isocèle en A, **puis** comme isocèle en B. À chaque fois, on nomme la base avant d'écrire deux angles égaux.

On obtient ainsi trois angles égaux. La somme des angles donne enfin leur mesure commune.

Vérifie : Changer de sommet principal

Dans la preuve, on regarde le triangle ABC comme isocèle en B. Quelle est alors sa base ?

A. Le côté $[AB]$.

Faux.

Le côté $[AB]$ part du sommet B : c'est l'un des deux côtés égaux.

B. Le côté $[BC]$.

Faux.

Le côté $[BC]$ part aussi du sommet B : c'est l'autre côté égal.

C. Le point B.

Faux.

Une base est un côté, pas un point. Le point B est le sommet principal.

D. Le côté $[AC]$.

Juste.

Juste : c'est le côté opposé au sommet B.

Correction

Isocèle en B veut dire $BA = BC$: les deux côtés égaux partent de B.

La base est le côté opposé à B, c'est-à-dire $[AC]$.

Les angles à la base sont donc $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$: ce sont eux qui sont égaux.

Exemple : un panneau, et une précaution

- Un panneau de signalisation a la forme d'un triangle aux trois côtés égaux. Chacun de ses angles mesure $180° \div 3 = 60°$.
- **L'hypothèse compte** : l'hypothèse, c'est la condition de départ d'une propriété. Deux côtés égaux ne suffisent pas. Le toit de la maison est isocèle, et ses angles mesurent $110°$, $35°$ et $35°$: aucun ne vaut $60°$.

Méthode, piège et à toi

Méthode : les angles d'un triangle isocèle ou équilatéral

1. **Repère** dans les données les côtés de même longueur.
2. **Isocèle, angle au sommet connu** : retire-le de $180°$, puis partage le reste en deux.
3. **Isocèle, un angle de la base donné** : son jumeau a la même mesure ; l'angle au sommet vaut $180°$ moins le double de cette mesure.
4. **Équilatéral** : les trois angles mesurent $60°$.

Attention : quels angles sont égaux ?

✗ « Le triangle EFG est isocèle en E et $\widehat{FEG} = 50°$, donc $\widehat{EFG} = 50°$. »

✓ Les angles égaux sont les angles **à la base**, en F et en G. L'angle en E est l'angle au sommet principal.

Ici, les deux angles à la base se partagent ce qui reste de $180°$:

$$\begin{aligned}\widehat{EFG} &= \widehat{EGF} \\ &= (180° - 50°) \div 2 \\ &= 65°\end{aligned}$$

À toi : Un angle à la base connu

Le triangle UVW est isocèle en U, et $\widehat{UVW} = 72°$. Calcule $\widehat{UWV}$, puis $\widehat{VUW}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Repère la base : le sommet principal est U, la base est $[VW]$.
Indice 2
Les deux angles à la base ont la même mesure.
Indice 3
Point délicat : l'angle au sommet vaut $180° - 2 \times 72°$, et non $180° - 72°$.

Réponse
Angle en W. Le triangle est isocèle en U : ses angles à la base sont en V et en W. Ils sont égaux, donc $\widehat{UWV} = \widehat{UVW} = 72°$.

Angle en U. D'après la somme des angles :

$$\begin{aligned}\widehat{VUW} &= 180° - 2 \times 72° \\ &= 180° - 144° \\ &= 36°\end{aligned}$$

Contrôle. $72° + 72° + 36° = 180°$.

Le triangle rectangle

Un angle droit

Devine : L'échelle et le mur

Une échelle est appuyée contre un mur vertical. Le sol, le mur et l'échelle forment un triangle, avec un angle droit au pied du mur. L'échelle fait un angle de $70°$ avec le sol. Quel angle fait-elle avec le mur ?

A. $110°$
Faux.

Tu as calculé $180° - 70°$: tu as oublié l'angle droit au pied du mur.

B. $70°$

Faux.

Rien n'oblige les deux angles à être égaux.

C. $20°$

Juste.

Juste : $90° + 70° + 20° = 180°$.

D. $290°$

Faux.

Tu as retiré $70°$ d'un tour complet. Un angle d'un triangle mesure moins de $180°$.

Correction

Le triangle a un angle droit, de $90°$, et un angle de $70°$.

D'après la somme des angles, le troisième angle mesure :

$$180° - 90° - 70° = 20°$$

L'échelle fait donc un angle de $20°$ avec le mur.

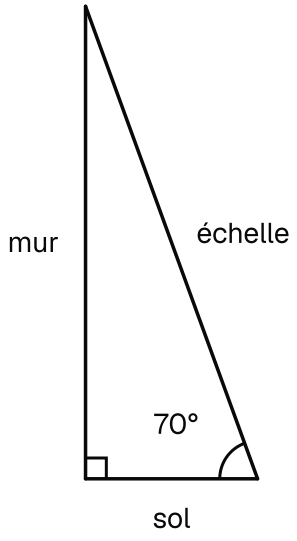


Schéma de l'échelle : avec le mur et le sol, elle forme un triangle rectangle au pied du mur ; elle fait 70 degrés avec le sol.

Rappel du primaire : l'**équerre** sert à tracer et à contrôler un angle droit. Pose-la dans un coin du triangle. Si ses deux bords longent les deux côtés, l'angle est droit.

Les deux autres angles

En clair. Dans un triangle rectangle, l'angle droit prend déjà $90°$ sur les $180°$. Il ne reste que $90°$ pour les deux autres angles.

Pourquoi est-ce vrai ? On écrit la somme des angles, puis on y remplace l'angle droit par sa mesure.

Propriété : Angles d'un triangle rectangle

Si un triangle ABC est rectangle en A, alors la somme des mesures de ses deux autres angles est égale à $90°$:

$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°.$$

Ces deux angles sont donc aigus.

Démonstration

Étape 1. D'après la somme des angles d'un triangle, $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$.

Étape 2. Le triangle est rectangle en A, donc $\widehat{BAC} = 90°$. On obtient $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180° - 90° = 90°$.

Étape 3. Chaque angle d'un triangle mesure plus de $0°$. Donc $\widehat{ABC} = 90° - \widehat{ACB}$ mesure moins de $90°$. De même, $\widehat{ACB} = 90° - \widehat{ABC}$ mesure moins de $90°$. Ces deux angles sont aigus.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve commence par la somme des angles du triangle. Elle y **remplace** l'angle droit par $90°$; une soustraction donne alors le total des deux autres angles.

Il lui reste à expliquer pourquoi chacun de ces deux angles est aigu : à toi de trouver comment, juste en dessous.

Vérifie : Ce que dit la preuve

Quel argument de la preuve montre que les deux autres angles sont aigus ?

A. Leur total vaut $90°$ et aucun n'est nul.

Juste.

Juste : si l'un atteignait $90°$, l'autre mesurerait $0°$.

B. Un triangle rectangle est toujours isocèle.

Faux.

Pas toujours : un triangle rectangle peut avoir des angles de $90°$, $30°$ et $60°$.

C. L'hypoténuse est le côté le plus long.

Faux.

La preuve ne parle pas des longueurs : elle ne travaille que sur les angles.

D. Les deux angles mesurent toujours $45°$.

Faux.
Seul le triangle isocèle rectangle a deux angles égaux.

Correction
D'après la preuve, les deux autres angles ont pour total $90°$.

Chacun mesure plus de $0°$. Donc chacun mesure moins de $90°$: il est aigu.

Exemple : une autre échelle, et une précaution

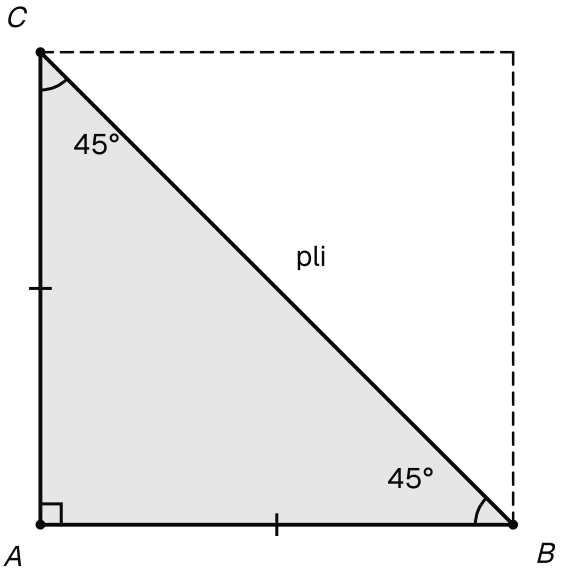
- Une échelle fait un angle de $62°$ avec le sol, contre un mur vertical. Le triangle est rectangle au pied du mur. D'après la propriété des angles d'un triangle rectangle, l'angle avec le mur vaut $90° - 62° = 28°$.
- **L'hypothèse compte.** Sans angle droit, deux angles n'ont aucune raison de totaliser $90°$. Dans le triangle de Salma, $20° + 30° = 50°$.

Isocèle et rectangle, puis à toi

Exemple : le triangle isocèle rectangle

Plie une serviette carrée selon sa diagonale : tu obtiens un triangle ABC isocèle rectangle en A.

- Les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont deux bords de la serviette : ils ont la même longueur. Le triangle est donc isocèle en A, et ses angles à la base, en B et en C, sont égaux.
- Le coin A de la serviette est un angle droit : d'après la propriété des angles d'un triangle rectangle, ces deux angles totalisent $90°$.
- Chacun mesure donc $90° \div 2 = 45°$.



Pliée selon la diagonale [BC], la serviette carrée donne le triangle ABC, rectangle en A, avec deux côtés égaux et deux angles de 45 degrés.

À toi : Un triangle rectangle

Le triangle MNP est rectangle en N.

(a) On a $\widehat{NMP} = 33°$: calcule $\widehat{NPM}$.

(b) Peut-on avoir $\widehat{NMP} = 95°$ dans ce triangle ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Utilise la propriété des angles d'un triangle rectangle.
Indice 2
Pour (a), calcule $90° - 33°$.
Indice 3
Point délicat : en (b), les deux angles autres que l'angle droit sont aigus.

Réponse
(a) Le triangle est rectangle en N. La propriété des angles d'un triangle rectangle s'applique : les angles en M et en P totalisent $90°$.

$$\widehat{NMP} + \widehat{NPM} = 90°$$

On en déduit :

$$\widehat{NPM} = 90° - 33° = 57°$$

(b) Non. L'angle $\widehat{NMP}$ est aigu : il mesure moins de $90°$.

D'ailleurs, $90° + 95° = 185°$ dépasse déjà $180°$.

L'inégalité triangulaire

Trois baguettes

Devine : Fermer un triangle

Tu as trois baguettes de 4 cm, 5 cm et 10 cm. Peux-tu les poser bout à bout pour fermer un triangle ?

A. Oui : $4 + 5 + 10 = 19$ cm de baguettes, c'est assez.

Faux.

Le total des trois ne compte pas : la baguette de 10 cm est plus longue que les deux autres mises bout à bout.

B. Non : $4 + 5 = 9$, moins que 10.

Juste.

Juste : les deux petites baguettes ne se rejoignent pas.

C. Oui, si la baguette de 10 cm est posée en bas.

Faux.

La position ne change rien : les deux petites baguettes restent trop courtes.

D. Non : 4, 5 et 10 sont trois longueurs différentes.

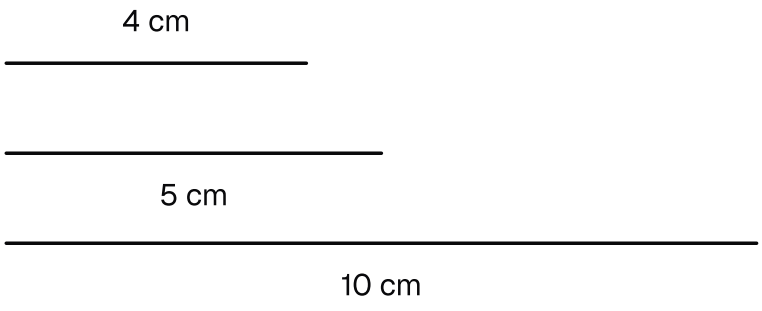
Faux.

Des longueurs différentes peuvent fermer un triangle : 4 cm, 5 cm et 6 cm, par exemple.

Correction

Pose la baguette de 10 cm, puis une petite baguette à chaque bout.

Même dépliées au maximum, elles couvrent $4 + 5 = 9$ cm : il manque 1 cm. Le triangle ne se ferme pas.



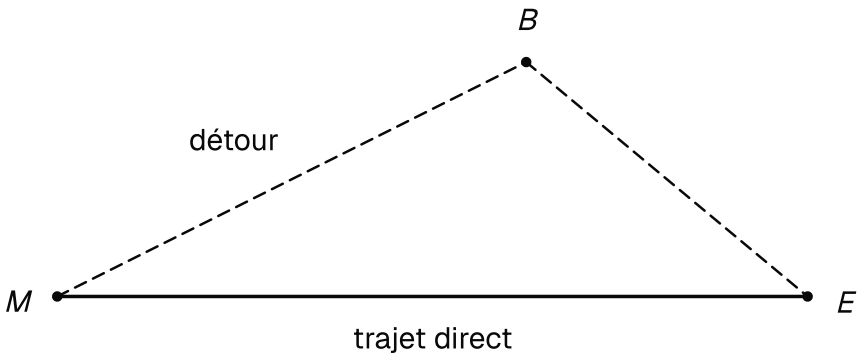
Les trois baguettes de l'activité, dessinées l'une sous l'autre à la même échelle : 4 cm, 5 cm et 10 cm.

En clair. Pour aller de ta maison M à l'école E, tu peux faire un détour par la boulangerie B. Ce détour mesure $MB + BE$.

Le trajet direct, en ligne droite, n'est jamais plus long :

$$ME \leq MB + BE$$

Les deux trajets ont la même longueur seulement si la boulangerie est sur le segment $[ME]$.



Pour relier M à E, le trajet en ligne droite est plus court que le détour qui passe par B.

L'inégalité triangulaire

Propriété : Inégalité triangulaire

Pour trois points A, B et C quelconques :

$$AC \leq AB + BC.$$

L'égalité $AC = AB + BC$ a lieu seulement lorsque le point B appartient au segment $[AC]$.

Dans un triangle ABC, les trois points ne sont pas alignés. Chaque côté est donc strictement plus court que la somme des deux autres : $BC < AB + AC$, $AC < AB + BC$ et $AB < AC + BC$.

Remarque : Un résultat admis

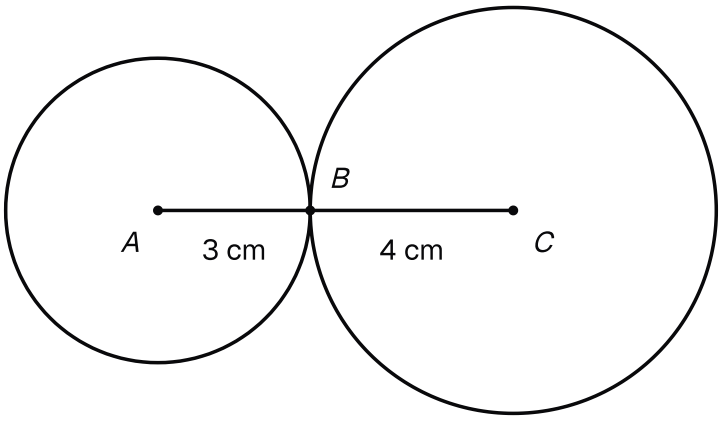
Ce résultat est admis.

Exemple : une observation au compas

Trace sur ton cahier un segment $[AC]$ de 7 cm.

- Trace le cercle de centre A et de rayon 3 cm, puis le cercle de centre C et de rayon 4 cm. Ils ont un seul point commun B, sur $[AC]$: $AB + BC = 3 + 4 = 7$.
- Avec deux rayons de 3 cm, les cercles n'ont aucun point commun, car $3 + 3 = 6$ est plus petit que 7.

- Avec des rayons de 5 cm et 4 cm, ils se coupent en deux points, hors de $[AC]$: chacun forme un triangle avec A et C.



Avec des rayons de 3 cm et de 4 cm sur un segment [AC] de 7 cm, les deux cercles ne se touchent qu'en B, sur le segment.

Un triangle existe-t-il ?

Propriété : Existence d'un triangle de côtés donnés

Soit a, b et c trois longueurs, où c est la plus grande des trois (ou l'une des plus grandes).

- Si $c < a + b$, alors on peut construire un triangle dont les côtés mesurent a, b et c.
- Si $c \geq a + b$, alors un tel triangle n'existe pas. Pour $c = a + b$, les trois points sont alignés.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis.

Exemple : deux essais

- Avec 6 cm, 7 cm et 12 cm : la plus grande longueur est 12, et $6 + 7 = 13$. Comme $12 < 13$, le triangle existe.
- Avec 3 cm, 5 cm et 8 cm : on a $3 + 5 = 8$. Les trois sommets seraient alignés : ce triangle n'existe pas.

Trouve l'erreur, la méthode, puis à toi

Trouve l'erreur : La rédaction d'Ilyas

Ilyas veut savoir si un triangle de côtés 4 cm, 6 cm et 11 cm existe. Il écrit : « $6 < 4 + 11$, donc le triangle existe. » Que penses-tu de sa rédaction ?

A. Elle est juste.

Faux.
L'inégalité $6 < 15$ est vraie, mais elle ne porte pas sur la plus grande longueur.

B. Il devait comparer 4 à $6 + 11$.

Faux.
La plus petite longueur est toujours plus courte que la somme des deux autres : cela ne prouve rien.

C. Le triangle existe, car $4 + 6 + 11$ dépasse 11.

Faux.
Cette somme contient déjà 11 : la comparaison ne prouve rien.

D. Il devait comparer 11 à $4 + 6$: le triangle n'existe pas.

Juste.
Juste : $4 + 6 = 10$, et $11 > 10$.

Correction
La plus grande longueur est 11 cm. On la compare au total des deux autres : $4 + 6 = 10$, et $11 > 10$.

D'après l'existence d'un triangle de côtés donnés, ce triangle n'existe pas.

Attention : la bonne comparaison

✗ « $2 < 5 + 9$, donc un triangle de côtés 2 cm, 5 cm et 9 cm existe. »

✓ On compare toujours la **plus longue** des trois longueurs au total des deux autres. Comparer une petite longueur ne prouve rien.

Ici, $9 > 2 + 5 = 7$: le triangle n'existe pas.

Méthode : savoir si trois longueurs forment un triangle

1. **Repère** la plus longue des trois longueurs.
2. **Additionne** les deux autres.
3. **Compare** : si la plus longue est strictement inférieure à ce total, le triangle existe.

4. **Conclus** sinon qu'il n'existe pas ; en cas d'égalité, les trois points sont alignés.

À toi : Trois essais

Ces longueurs permettent-elles de construire un triangle ?

(a) 5 cm, 8 cm et 12 cm.

(b) $2{,}5$ cm, 4 cm et $6{,}5$ cm.

(c) 7 cm, 7 cm et 15 cm. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : repère d'abord la plus grande longueur.
Indice 2
Pour (b), calcule $2{,}5 + 4$.
Indice 3
Point délicat : une égalité ne donne pas de triangle, car les trois points sont alignés.

Réponse
(a) La plus longue mesure 12 cm. On a $5 + 8 = 13$, et $12 < 13$: le triangle existe.

(b) La plus longue mesure $6{,}5$ cm. On a $2{,}5 + 4 = 6{,}5$: elle est exactement égale au total des deux autres. Les trois points sont alignés, il n'y a pas de triangle.

(c) La plus longue mesure 15 cm. On a $7 + 7 = 14$, et $15 > 14$: le triangle n'existe pas.

Construire un triangle

Par où commencer ?

Pour reproduire un triangle, il suffit de quelques mesures. Il y a trois cas :

- trois côtés connus ;
- un côté et ses deux angles ;
- deux côtés et l'angle entre eux.

Le compas reporte les longueurs, le rapporteur trace les angles.

Vérifie : L'ordre des tracés

Tu dois construire le triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 4$ cm. Quel ordre de tracés convient ?

A. Tracer $[AB]$, puis deux arcs de centres A et B.
Juste.
Juste : le point C est à 5 cm de A et à 4 cm de B, donc sur les deux arcs.

B. Tracer $[AB]$, puis $[AC]$ dans une direction choisie au hasard.

Faux.

Avec une direction au hasard, C ne sera pas à 4 cm de B en général.

C. Tracer les trois côtés séparément, puis les assembler.

Faux.

Sur une feuille, on ne déplace pas des segments : le triangle doit se fermer.

D. Mesurer d'abord les angles au rapporteur.

Faux.

Aucun angle n'est donné : seul le compas reporte les longueurs.

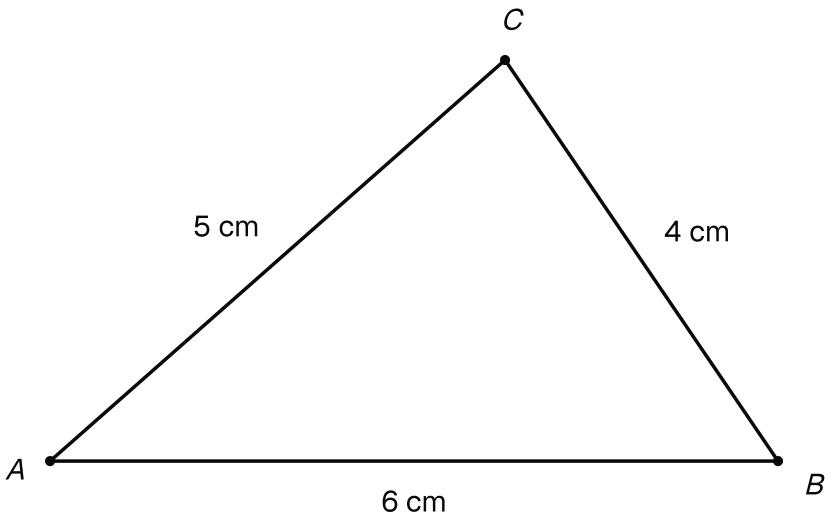
Correction

On trace d'abord un côté, $[AB]$.

Le point C doit être à 5 cm de A : il est sur le cercle de centre A et de rayon 5 cm.

Il doit aussi être à 4 cm de B : il est sur le cercle de centre B et de rayon 4 cm.

Deux arcs suffisent donc à le placer.



Le triangle ABC à obtenir, avec ses trois longueurs : 6 cm, 5 cm et 4 cm.

Trois côtés connus

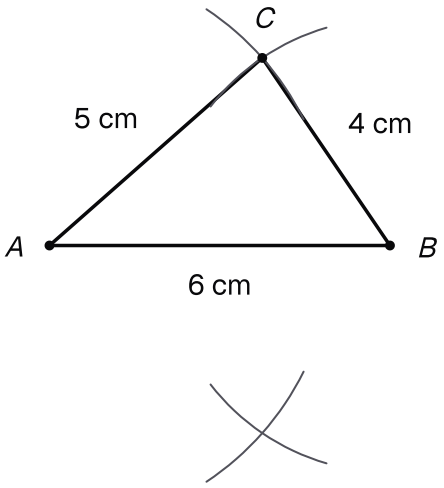
Méthode : trois côtés connus

1. **Vérifie** que le triangle existe, avec l'inégalité triangulaire.
2. **Trace** à la règle le premier côté, par exemple $[AB]$.
3. **Reporte** au compas les deux autres longueurs : un arc de centre A, puis un arc de centre B.

4. **Nomme** C un point commun aux deux arcs, puis trace $[AC]$ et $[BC]$.

Exemple : un triangle de côtés 6 cm, 5 cm et 4 cm

- **Existence** : la plus grande longueur est 6, et $5 + 4 = 9$. Comme $6 < 9$, le triangle existe.
- **Tracé** : trace $[AB]$ de 6 cm. Écarte le compas de 5 cm, pointe en A et trace un arc. Écarte-le de 4 cm, pointe en B et trace un second arc.
- **Fin** : tu obtiens deux points d'intersection, situés de part et d'autre de $[AB]$. Choisis-en un, nomme-le C, puis trace $[AC]$ et $[BC]$.



Les arcs de rayons 5 cm (centre A) et 4 cm (centre B) se coupent au-dessus et au-dessous de [AB] ; on garde le point du haut, nommé C.

Avec le rapporteur

Méthode : construire avec le rapporteur

1. **Un côté et ses deux angles** : contrôle d'abord que leur total reste sous $180°$. Trace le côté. À chaque extrémité, trace au rapporteur une demi-droite, du même côté du segment. Leur point de rencontre est le troisième sommet.
2. **Deux côtés et l'angle entre eux** : trace un côté. À une extrémité, trace la demi-droite qui fait l'angle donné. Reporte la seconde longueur sur cette demi-droite, puis ferme le triangle.
3. **Contrôle** chaque mesure donnée sur ta figure.

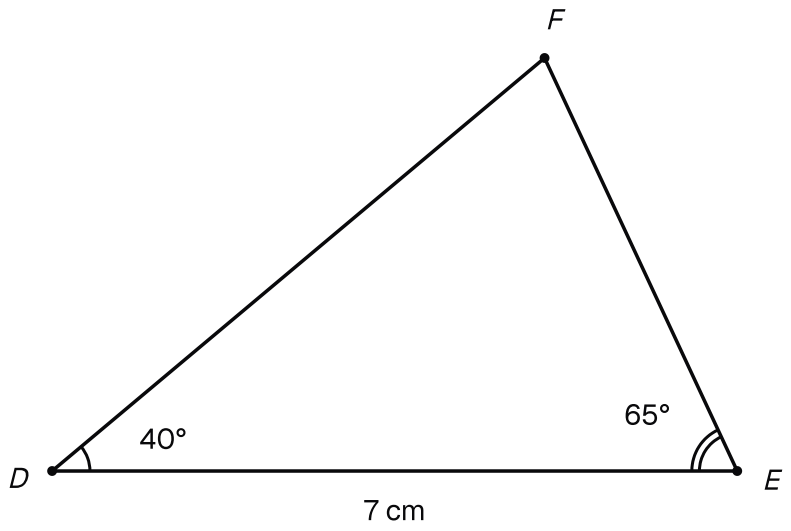
Exemple : les deux cas au rapporteur

Un côté et deux angles. Construis DEF avec $DE = 7$ cm, $\widehat{FDE} = 40°$ et $\widehat{DEF} = 65°$.

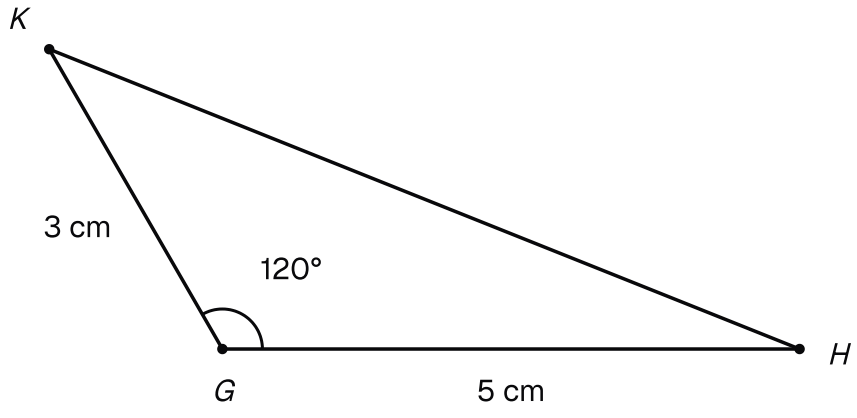
On a $40° + 65° = 105°$, moins que $180°$: c'est possible. D'après la somme des angles, l'angle en F mesurera $75°$, car $180° - 105° = 75°$: contrôle-le.

Deux côtés et l'angle compris. Construis GHK avec $GH = 5$ cm, $GK = 3$ cm et $\widehat{HGK} = 120°$.

Trace $[GH]$, puis en G la demi-droite à $120°$. Place K dessus, à 3 cm de G, et trace $[HK]$. Mesure HK : tu dois trouver 7 cm.



Premier cas : sur [DE], long de 7 cm, les demi-droites tracées à 40 degrés en D et à 65 degrés en E se rencontrent en F.



Second cas : à partir de [GH], de 5 cm, la demi-droite tracée à 120 degrés en G porte le point K, à 3 cm de G.

Vérifie : Deux angles donnés

Peut-on construire un triangle RST avec $RS = 5$ cm, $\widehat{SRT} = 100°$ et $\widehat{RST} = 85°$?

A. Oui, il suffit de tracer les deux demi-droites.

Faux.

Ces demi-droites ne se rencontrent pas au-dessus de $[RS]$: $100° + 85°$ dépasse $180°$.

B. Non, car $100° + 85° = 185°$.

Juste.

Juste : avec le troisième angle, le total dépasserait $180°$.

C. Non, car le côté de 5 cm est trop court.

Faux.

La longueur du côté ne change pas les angles : avec 10 cm, ce serait aussi impossible.

D. Oui, car un angle obtus est permis.

Faux.

Un angle obtus est permis, mais le total des angles doit rester $180°$.

Correction

Les deux angles donnés totalisent :

$$100° + 85° = 185°$$

C'est plus que $180°$. Or, d'après la somme des angles, les trois angles ensemble font $180°$.

Il ne resterait rien pour le troisième angle : il manque même $5°$. Ce triangle n'existe pas.

Contrôler et rédiger

Contrôler sa figure. Une construction se vérifie toujours. Mesure à la règle chaque longueur donnée, et au rapporteur chaque angle donné.

Un écart d'un millimètre ou d'un degré vient de l'épaisseur du trait : ce n'est pas une faute.

Remarque : Coin devoir : rédiger un programme de construction

En devoir, tu peux avoir à écrire les étapes avant de tracer : c'est un **programme de construction**. Commence par l'existence, puis décris chaque tracé avec son instrument.

Par exemple : « D'après l'inégalité triangulaire, $6 < 5 + 4$: le triangle existe. Je trace à la règle le segment $[AB]$ de 6 cm. Au compas, je trace l'arc de centre A et de rayon 5 cm, puis l'arc de centre B et de rayon 4 cm. Ils se coupent en C. Je trace $[AC]$ et $[BC]$. »

Les hauteurs d'un triangle

Rejoindre une route

Devine : Le chemin de la ferme

Une ferme F se trouve à l'écart d'une route droite. Le fermier veut tracer le chemin le plus court de F jusqu'à la route. Comment doit être ce chemin ?

A. Il fait un angle de $45°$ avec la route.

Faux.

Un tel chemin arrive en biais : il est plus long que le chemin perpendiculaire.

B. Il est parallèle à la route.

Faux.

Un chemin parallèle à la route ne la rejoint jamais.

C. Il est perpendiculaire à la route.

Juste.

Juste : c'est le chemin le plus court entre un point et une droite.

D. Peu importe : tous les chemins droits ont la même longueur.

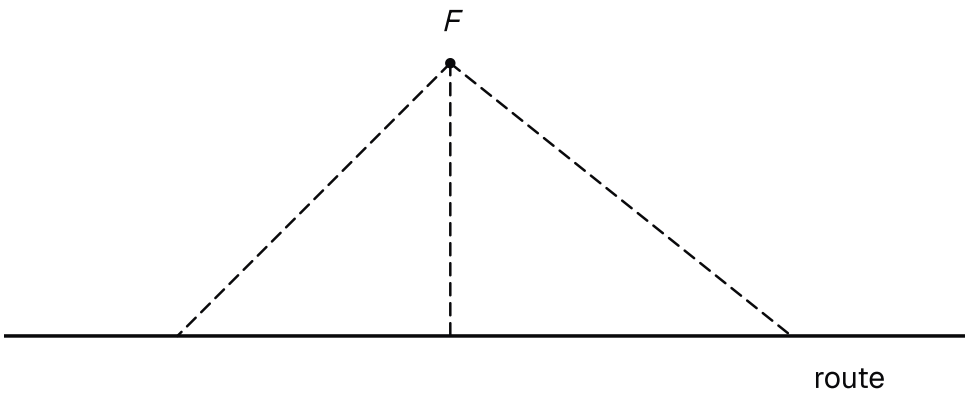
Faux.

Plus le chemin est penché, plus il est long.

Correction

Le chemin le plus court part de F et arrive perpendiculairement à la route. Sa longueur est la distance de la ferme à la route.

Une hauteur d'un triangle suit la même idée.



La ferme F, la route droite et trois chemins rectilignes qui la relient à la route : à toi de choisir le plus court.

Rappel (chapitre « Droites perpendiculaires et droites parallèles ») : trace la perpendiculaire à une droite (d) passant par un point A. Elle coupe (d) en un point H. La longueur AH est la **distance** du point A à la droite (d).

La hauteur d'un triangle

Définition : Hauteurs d'un triangle

Soit ABC un triangle. La **hauteur issue de** A est la droite qui passe par le sommet A et qui est perpendiculaire à la droite (BC), qui porte le côté opposé à A.

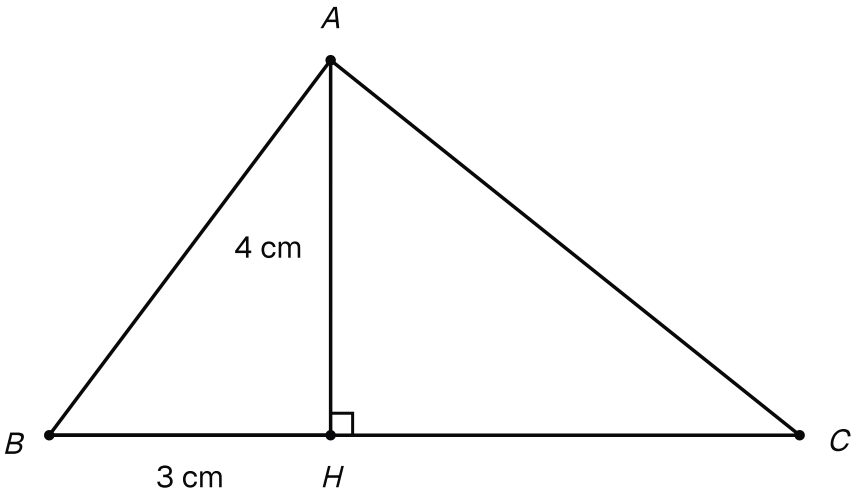
Le point d'intersection H de cette hauteur et de la droite (BC) est le **pied de la hauteur**. La longueur AH, distance du point A à la droite (BC), s'appelle aussi la hauteur issue de A.

Un triangle a trois hauteurs : une issue de chaque sommet.

Exemple : une hauteur et son pied

Trace sur ton cahier un segment $[BC]$ de 8 cm. Place le point H sur $[BC]$, à 3 cm de B.

- À l'équerre, trace la perpendiculaire à (BC) en H. Place A sur cette droite, à 4 cm de H, puis trace le triangle ABC.
- La droite (AH) est la hauteur issue de A. Son pied est H, et la hauteur mesure $AH = 4$ cm.
- Mesure AB : tu dois trouver 5 cm.



Le triangle ABC construit sur un côté [BC] de 8 cm : la hauteur [AH] tombe perpendiculairement sur ce côté, à 3 cm de B.

Trois hauteurs, un point

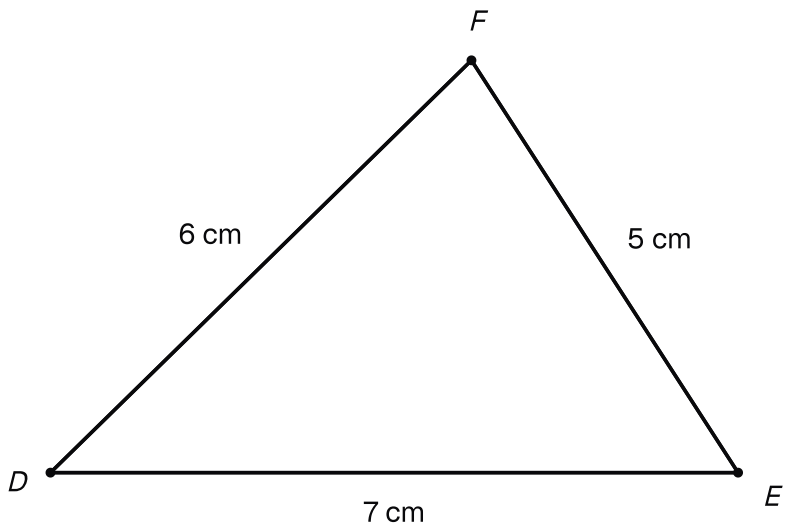
> **Devine : Trois hauteurs à tracer**

Trace sur ton cahier un triangle DEF avec $DE = 7$ cm, $DF = 6$ cm et $EF = 5$ cm. Ses trois angles sont aigus.

Trace ses trois hauteurs à l'équerre. Que remarques-tu ?

Réponse
Les trois hauteurs passent par un même point, situé à l'intérieur du triangle.

Si elles forment un petit triangle, reprends tes tracés : l'équerre a sans doute glissé.



Le triangle DEF à reproduire sur ton cahier avant d'y tracer ses trois hauteurs : ses côtés mesurent 7 cm, 6 cm et 5 cm.

Propriété : Concours des hauteurs d'un triangle

Les trois hauteurs d'un triangle sont **concourantes** : elles passent par un même point. Ce point s'appelle l'**orthocentre** du triangle.

Remarque : Un résultat admis

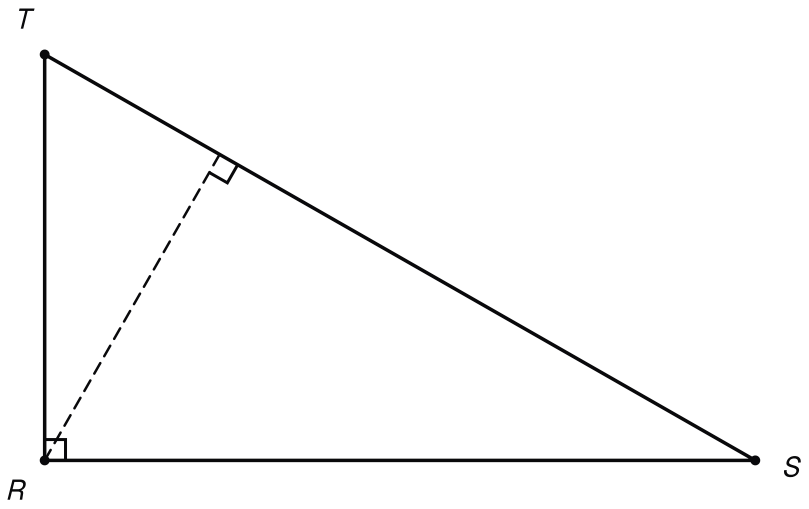
Ce résultat est admis.

Exemple : l'orthocentre d'un triangle rectangle

Soit RST un triangle rectangle en R.

- La droite (RS) passe par S et elle est perpendiculaire à (RT) : c'est la hauteur issue de S.
- De même, la droite (RT) est la hauteur issue de T.

- Ces deux hauteurs se coupent en R. L'orthocentre est donc le sommet de l'angle droit.



Dans le triangle RST rectangle en R, les côtés de l'angle droit servent eux-mêmes de hauteurs : elles se rencontrent au sommet R.

Tracer à l'équerre

Méthode : tracer une hauteur et l'orthocentre

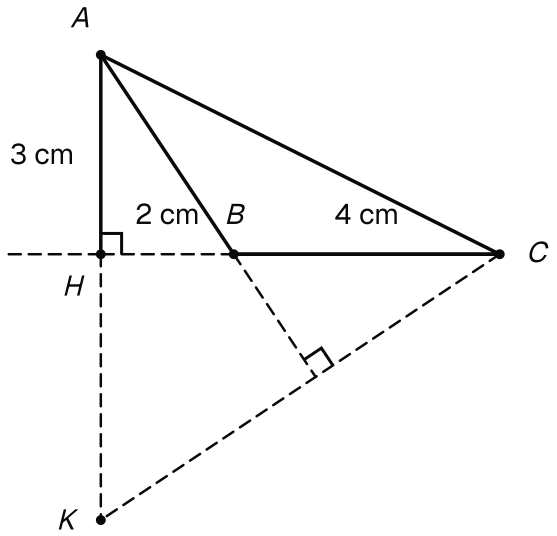
1. **Place** l'équerre : un bord de son angle droit contre la droite du côté opposé au sommet.
2. **Glisse**-la contre cette droite, jusqu'à ce que son autre bord touche le sommet.
3. **Trace** la droite qui passe par le sommet. Si le pied sort du côté, prolonge d'abord ce côté en pointillés.
4. **Orthocentre** : trace deux hauteurs, nomme leur point de rencontre, puis contrôle avec la troisième.

Exemple : un triangle à angle obtus

Trace $[BC]$ de 4 cm, puis prolonge-le au-delà de B. Place H sur ce prolongement, à 2 cm de B. Place A sur la perpendiculaire à (BC) en H, à 3 cm de H.

- L'angle $\widehat{ABC}$ est obtus. Le pied H de la hauteur issue de A est en dehors du segment $[BC]$.
- Trace aussi la hauteur issue de C. Prolonge d'abord $[AB]$ au-delà de B. Pose ensuite l'équerre sur la droite (AB) et fais-la glisser jusqu'à C.

- Cette hauteur coupe la droite (AH) en un point K, l'orthocentre. Il est à l'extérieur du triangle, de l'autre côté de (BC) par rapport à A.



Avec un angle obtus en B, les pieds des hauteurs issues de A et de C sortent du triangle, et l'orthocentre K se retrouve dehors.

Attention : le pied d'une hauteur

✗ « Le pied de la hauteur issue de A est toujours sur le segment $[BC]$. »

✓ Si l'angle en B ou en C est obtus, le pied tombe en dehors du segment. La hauteur est perpendiculaire à la **droite** (BC) : prolonge le côté avant de poser l'équerre.

Un piège, puis à toi

Trouve l'erreur : Le tracé de Hiba

Pour tracer la hauteur issue de A du triangle ABC, Hiba place le milieu J de $[BC]$. Puis elle trace la perpendiculaire à (BC) passant par J. A-t-elle tracé la hauteur ?

(Rappel : la médiatrice de $[BC]$ coupe $[BC]$ en son milieu, en formant un angle droit.)

A. Oui, car sa droite est perpendiculaire à (BC).
Faux.
Être perpendiculaire à (BC) ne suffit pas : la hauteur doit aussi passer par A.

B. Oui, car une hauteur passe toujours par le milieu du côté.
Faux.
Pas en général : dans l'exemple du pied H, il est à 3 cm de B, et le milieu à 4 cm.

C. Non : c'est la médiatrice de $[BC]$.

Juste.

Juste : la médiatrice passe par le milieu, la hauteur par le sommet A ; en général, ces deux droites sont différentes.

D. Non, car une hauteur est parallèle à (BC).

Faux.

Une hauteur est perpendiculaire à (BC), jamais parallèle.

Correction

Hiba a tracé la perpendiculaire à (BC) qui passe par le milieu J de $[BC]$: c'est la médiatrice de $[BC]$.

La hauteur issue de A est elle aussi perpendiculaire à (BC), mais elle passe par le sommet A.

Ces deux droites sont donc parallèles. Elles ne sont confondues que si le pied de la hauteur est le milieu J.

À toi : Un triangle à angle obtus

Trace un triangle UVW avec $VU = 3$ cm, $VW = 4$ cm et $\widehat{UVW} = 120°$.

(a) Pour quelles hauteurs dois-tu prolonger un côté ?

(b) L'orthocentre est-il à l'intérieur du triangle ?

Fais ta figure sur ton cahier et écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Repère d'abord l'angle obtus du triangle.

Indice 2

Pour la hauteur issue de U, pose l'équerre sur la droite (VW) et regarde où tombe le pied.

Indice 3

Point délicat : la hauteur issue de V, sommet de l'angle obtus, a son pied sur le côté $[UW]$.

Réponse

(a) L'angle obtus est en V.

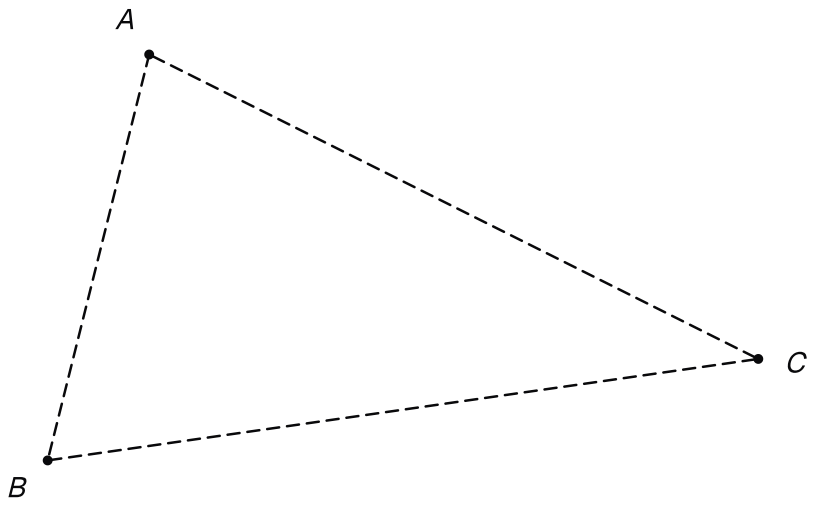
- La hauteur issue de U a son pied sur la droite (VW), au-delà de V : il faut prolonger $[VW]$.
- De même, la hauteur issue de W oblige à prolonger $[VU]$ au-delà de V.
- La hauteur issue de V a son pied sur $[UW]$: aucun côté n'est à prolonger.

(b) Non. Les hauteurs issues de U et de W se coupent à l'extérieur du triangle : l'orthocentre est dehors.

Médiatrices et cercle circonscrit

Un puits pour trois maisons

Trois maisons A, B et C ne sont pas alignées. Les familles veulent creuser un puits commun, à la même distance des trois maisons. Où doivent-elles le creuser ?



Les trois maisons A, B et C, qui ne sont pas sur une même droite : le puits commun reste à placer.

Devine : Deux égalités

Le puits P est à la même distance de A et de B : $PA = PB$. Il est aussi à la même distance de B et de C : $PB = PC$. Que peux-tu dire de PA et de PC ?

A. On ne peut rien dire sans les mesurer.

Faux.

Les deux égalités suffisent : aucune mesure n'est nécessaire.

B. $PA = PC$, car toutes deux sont égales à PB.

Juste.

Juste : deux longueurs égales à une même troisième sont égales.

C. $PA = PC$ seulement si le triangle est isocèle.

Faux.

Aucune hypothèse sur le triangle n'est utile : $PA = PB$ et $PB = PC$ donnent $PA = PC$.

D. $PA + PC = PB$.

Faux.

Les données sont des égalités de longueurs, pas des sommes.

Correction

> On a $PA = PB$ et $PB = PC$. Donc $PA = PC$: le puits est à la même distance des trois maisons.
>
> Il reste à trouver un tel point : c'est le rôle des médiatrices.

Rappel (chapitre « Droites perpendiculaires et droites parallèles ») : la **médiatrice** de $[AB]$ est la perpendiculaire à (AB) en son milieu.

Règle 1 : tout point de la médiatrice est aussi loin de A que de B.

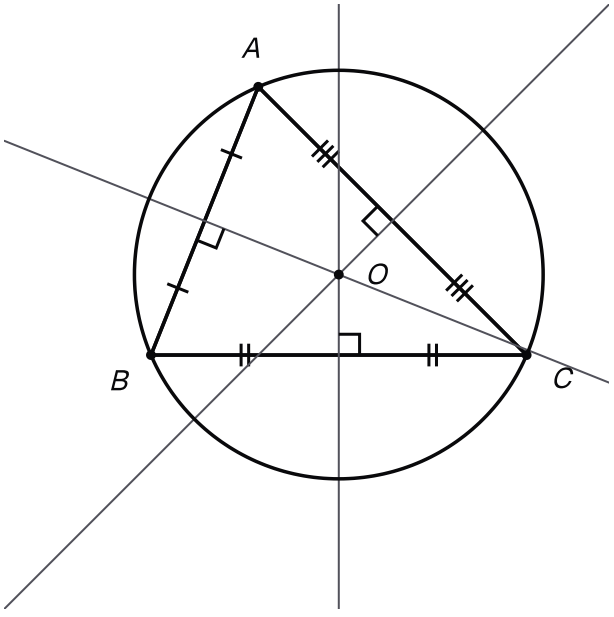
Règle 2 : tout point aussi loin de A que de B est sur la médiatrice.

Ensemble : la **propriété caractéristique**.

Les trois médiatrices

En clair. Dans un triangle, les trois médiatrices se croisent en un seul point, nommé O. Ce point est aussi loin d'un sommet que des deux autres : c'est la place du puits, et le centre d'un cercle qui passe par les trois sommets.

Pourquoi est-ce vrai ? On se sert deux fois de la règle 1, puis une fois de la règle 2.



Les médiatrices des côtés du triangle ABC se rejoignent en O, centre du cercle qui passe par ses trois sommets.

Propriété : Médiatrices d'un triangle et cercle circonscrit

Dans un triangle ABC, les **médiatrices** des trois côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ sont concourantes en un point O. Ce point est à la même distance des trois sommets : $OA = OB = OC$.

Le cercle de centre O et de rayon OA passe donc par A, B et C : c'est le **cercle circonscrit** au triangle ABC.

Démonstration

Étape 1. On admet que les médiatrices de $[AB]$ et de $[BC]$ se coupent. On appelle O leur point d'intersection.

Étape 2. Le point O est sur la médiatrice de $[AB]$. D'après la propriété caractéristique de la médiatrice, $OA = OB$.

Étape 3. Le point O est aussi sur la médiatrice de $[BC]$. De même, $OB = OC$.

Étape 4. Donc $OA = OC$: le point O est à la même distance de A et de C. D'après la propriété caractéristique de la médiatrice, utilisée dans l'autre sens, O est sur la médiatrice de $[AC]$.

Étape 5. Les trois médiatrices passent donc par O, et $OA = OB = OC$. Le cercle de centre O et de rayon OA passe par les trois sommets.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve fait deux allers et un retour.

- **Aller** : la règle 1, employée deux fois, donne $OA = OB$, puis $OB = OC$.
- **Retour** : il reste à placer O sur la troisième médiatrice, celle de $[AC]$; la question suivante te demande avec quel argument.

Le fait que deux médiatrices se rencontrent est admis.

Vérifie : La troisième médiatrice

Dans la preuve, pourquoi le point O est-il sur la médiatrice de $[AC]$?

A. Car O est déjà sur les médiatrices de $[AB]$ et de $[BC]$.
Faux.
Cela donne $OA = OB$ et $OB = OC$; il faut encore un argument.

B. Car O est le milieu de $[AC]$.
Faux.
En général, O n'est même pas sur le segment $[AC]$.

C. Car (OA) est perpendiculaire à (AC).
Faux.
Rien ne le dit, et ce n'est pas vrai en général.

D. Car $OA = OC$: c'est la règle 2.
Juste.
Juste : un point à égale distance de A et de C est sur la médiatrice de $[AC]$.

Correction

D'abord, $OA = OB$ et $OB = OC$, donc $OA = OC$. Le point O est à égale distance de A et de C.

La règle 2, c'est-à-dire la propriété caractéristique de la médiatrice lue dans l'autre sens, place alors O sur la médiatrice de $[AC]$.

Exemple : pourquoi trois points non alignés ?

Prends trois points A, B et C alignés, dans cet ordre. Les médiatrices de $[AB]$ et de $[BC]$ sont perpendiculaires à la même droite (AC). Elles sont donc parallèles, et distinctes : elles ne se coupent pas.

Aucun point n'est alors à égale distance de A, B et C. Trois maisons alignées n'ont pas de puits commun.

Construire le cercle circonscrit

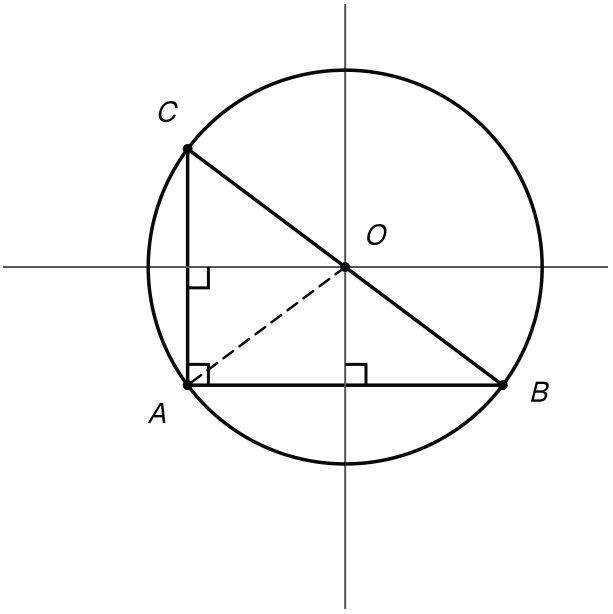
Méthode : le cercle circonscrit

1. **Trace** au compas la médiatrice de $[AB]$. Ouvre le compas de plus de la moitié de AB, puis trace avec ce rayon un arc centré en A et un arc centré en B. Ces deux arcs se croisent en deux points : la règle les relie.
2. **Trace** de la même façon la médiatrice de $[BC]$.
3. **Nomme** O le point de rencontre des deux médiatrices.
4. **Trace** le cercle de centre O qui passe par A : il passe aussi par B et par C.

Exemple : un triangle rectangle

Trace $[AB]$ de 8 cm, puis $[AC]$ de 6 cm, perpendiculaire à $[AB]$ en A. Trace $[BC]$: tu mesures $BC = 10$ cm.

- Construis les médiatrices de $[AB]$ et de $[AC]$. Elles se coupent en O.
- Tu constates que O est le milieu de $[BC]$. Le rayon OA mesure 5 cm.



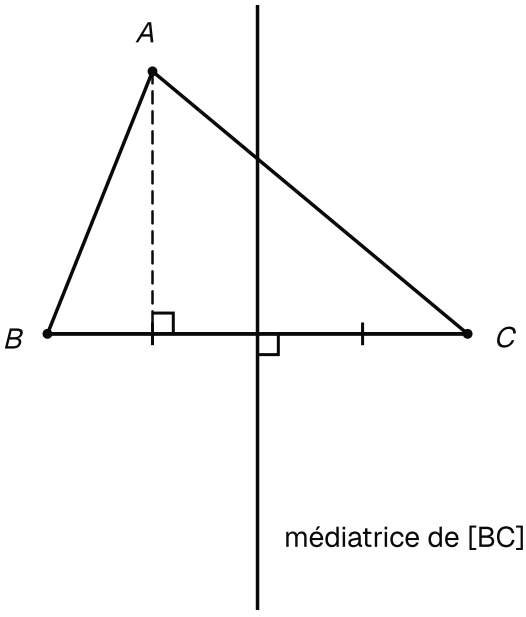
Pour ce triangle rectangle en A, les deux médiatrices tracées se coupent au milieu O de l'hypoténuse, centre d'un cercle de rayon 5 cm.

Attention : hauteur ou médiatrice ?

✗ « La médiatrice de $[BC]$ passe par le sommet A. »

✓ La médiatrice de $[BC]$ passe par le **milieu** de $[BC]$. Elle ne passe par A que si $AB = AC$, c'est-à-dire si le triangle est isocèle en A.

Dans ce cas seulement, elle est aussi la hauteur issue de A.



Dans ce triangle qui n'est pas isocèle en A, la médiatrice de [BC] passe par son milieu, loin de A, alors que la hauteur, en pointillés, part de A.

Coin devoir, puis à toi

Remarque : Coin devoir : justifier le centre du cercle circonscrit

En devoir, la figure ne suffit pas : il faut justifier. Par exemple :

« On sait que O appartient à la médiatrice de $[AB]$: il est donc à égale distance de A et de B, $OA = OB$ (propriété caractéristique de la médiatrice). Pour la même raison, avec la médiatrice de $[BC]$, $OB = OC$. Ainsi $OA = OB = OC$. Le cercle de centre O passant par A passe donc aussi par B et C : c'est le cercle circonscrit. »

À toi : Un triangle isocèle

Trace $[AB]$ de 8 cm et son milieu J. Place C sur la perpendiculaire à (AB) en J, à 8 cm de J.

(a) Pourquoi la droite (CJ) est-elle la médiatrice de $[AB]$?

(b) Construis le centre O du cercle circonscrit, puis mesure OJ et OA.

Fais ta figure sur ton cahier et écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La droite (CJ) est perpendiculaire à $[AB]$: où passe-t-elle ?
Indice 2
Pour (b), O est déjà sur (CJ) : trace seulement la médiatrice de $[BC]$.
Indice 3
Point délicat : O se trouve entre J et C, plus près de J.

Réponse
(a) La droite (CJ) est perpendiculaire à (AB) et passe par le milieu J de $[AB]$: c'est la médiatrice de $[AB]$.

(b) Le centre O est donc sur (CJ). La médiatrice de $[BC]$ coupe (CJ) en O.

Tu dois mesurer $OJ = 3$ cm et $OA = 5$ cm. Contrôle : $OC = 8 - 3 = 5$ cm, comme OA.

Bissectrices d'un angle

Partager un angle en deux

Devine : La moitié d'un angle

Notation : $[Ox)$ désigne une demi-droite qui part du point O, et $\widehat{xOy}$ l'angle formé par les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$.

Un angle $\widehat{xOy}$ mesure $76°$. Une demi-droite $[Oz)$, tracée entre $[Ox)$ et $[Oy)$, le partage en deux angles égaux. Combien mesure $\widehat{xOz}$?

A. $38°$

Juste.

Juste : $76° \div 2 = 38°$.

B. $152°$

Faux.

Tu as doublé l'angle au lieu de le partager.

C. $104°$

Faux.

Tu as calculé $180° - 76°$: ce n'est pas demandé ici.

D. $76°$

Faux.

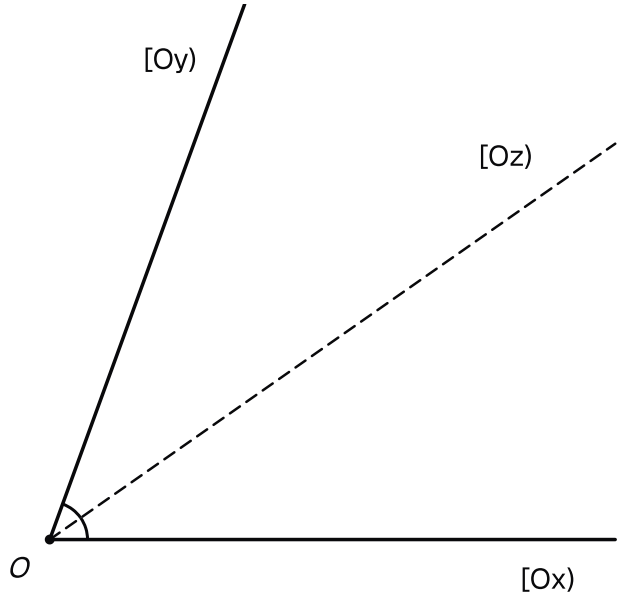
C'est la mesure de l'angle entier, pas d'une de ses moitiés.

Correction

Les deux angles $\widehat{xOz}$ et $\widehat{zOy}$ sont égaux, et ensemble ils forment $\widehat{xOy}$.

Chacun mesure donc $76° \div 2 = 38°$.

En clair. Découpe un angle dans du papier. Plie-le pour amener le bord $[Ox)$ exactement sur le bord $[Oy)$. Le pli partage l'angle en deux parts égales : il s'appelle la **bissectrice** de l'angle.



Le pli du papier suit la demi-droite [Oz), qui découpe l'angle xOy en deux angles de même mesure.

La bissectrice

Définition : Bissectrice d'un angle

La **bissectrice** d'un angle $\widehat{xOy}$ est la demi-droite $[Oz)$ qui partage cet angle en deux angles de même mesure : $\widehat{xOz} = \widehat{zOy}$. Chacun de ces deux angles mesure la moitié de $\widehat{xOy}$.

Dans un triangle ABC, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ s'appelle la **bissectrice issue de** A. Un triangle a trois bissectrices : une issue de chaque sommet.

Méthode : construire une bissectrice

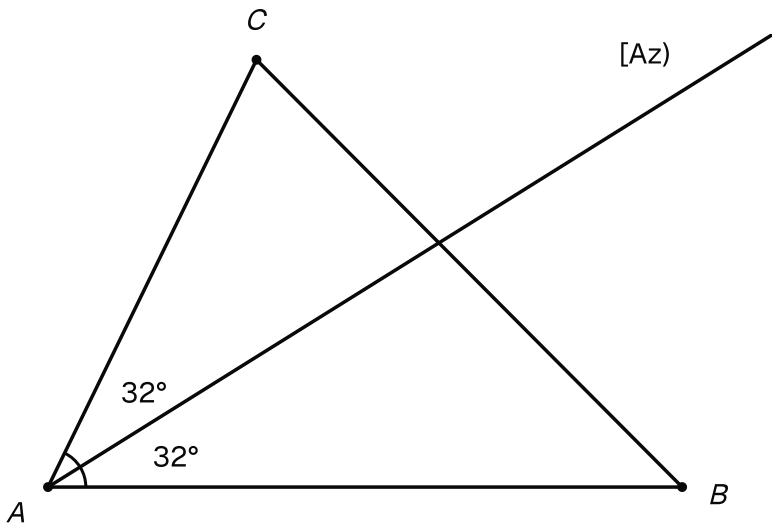
1. **Au rapporteur** : mesure l'angle et divise sa mesure par 2. Trace la demi-droite qui fait ce demi-angle avec un côté.
2. **Au compas** : pointe en O et trace un arc. Il coupe $[Ox)$ en P et $[Oy)$ en Q.
3. **Garde** un même écartement, plus grand que la moitié de PQ : trace un arc de centre P et un arc de centre Q. Nomme R un point commun aux deux arcs, situé à l'intérieur de l'angle $\widehat{xOy}$ et différent de O.
4. **Trace** la demi-droite $[OR)$: c'est la bissectrice. Cette construction est admise dans ce chapitre : contrôle-la au rapporteur.

Exemple : une bissectrice dans un triangle

Dans le triangle ABC, l'angle $\widehat{BAC}$ mesure $64°$. Soit $[Az)$ la bissectrice issue de A.

D'après la définition de la bissectrice, elle partage $\widehat{BAC}$ en deux angles égaux :

$$\begin{aligned}\widehat{BAz} &= \widehat{zAC} \\ &= 64° \div 2 \\ &= 32°\end{aligned}$$



La bissectrice [Az) coupe l'angle de 64 degrés du sommet A du triangle ABC en deux moitiés de 32 degrés.

Les points de la bissectrice

Devine : Deux distances à mesurer

Trace un angle $\widehat{xOy}$ de $60°$ et sa bissectrice. Place un point M sur la bissectrice, à 6 cm de O.

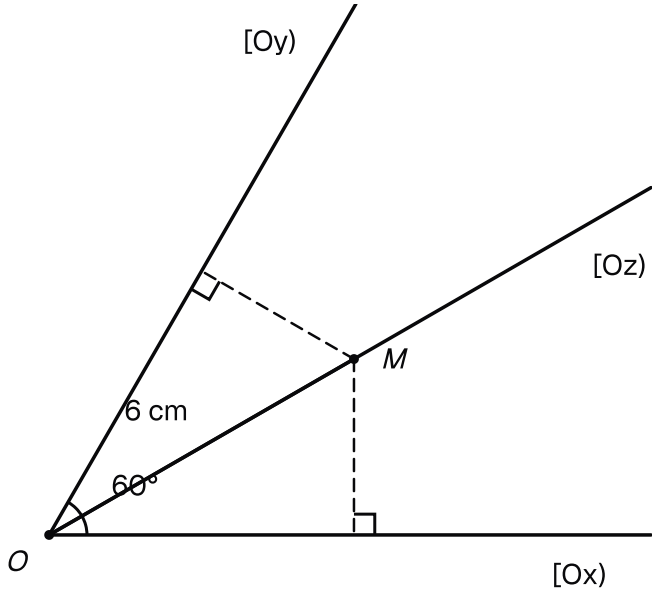
Trace à l'équerre la perpendiculaire à (Ox) passant par M, puis la perpendiculaire à (Oy).

Mesure les distances de M aux deux droites. Que remarques-tu ?

Réponse

Les deux distances sont égales : tu dois trouver 3 cm pour chacune.

Recommence avec un autre point de la bissectrice : les deux distances restent égales entre elles.



La construction demandée : un angle de 60 degrés, sa bissectrice, le point M placé à 6 cm de O et les deux perpendiculaires issues de M.

Propriété : Propriété caractéristique de la bissectrice

Soit M un point situé à l'intérieur d'un angle $\widehat{xOy}$.

- Si M est sur la bissectrice de cet angle, alors M est à la même distance des droites (Ox) et (Oy).
- Réciproquement, si M est à la même distance des droites (Ox) et (Oy), alors M est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis.

Exemple : un arrêt de bus, et une précaution

- Deux routes droites partent d'un carrefour O, le long de $[Ox)$ et de $[Oy)$. Un arrêt de bus M, entre les deux routes, doit être à la même distance de chacune. D'après la propriété caractéristique de la bissectrice, M est sur la bissectrice de $\widehat{xOy}$.
- **L'hypothèse compte.** Le point doit être à l'intérieur de l'angle. Un point situé hors de l'angle peut être à égale distance des deux droites sans être sur la bissectrice.

À toi : Un angle et deux distances

(a) L'angle $\widehat{xOy}$ mesure $130°$, et $[Oz)$ est sa bissectrice. Combien mesure $\widehat{xOz}$?

(b) Un point M de $[Oz)$ est à $2{,}5$ cm de la droite (Ox). À quelle distance est-il de la droite (Oy) ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour (a), utilise la définition de la bissectrice.
Indice 2
La bissectrice partage l'angle en deux angles égaux : divise $130°$ par 2.
Indice 3
Point délicat : pour (b), c'est la propriété caractéristique qui sert, car M est à l'intérieur de l'angle.

Réponse
(a) D'après la définition de la bissectrice :

$$\widehat{xOz} = 130° \div 2 = 65°$$

(b) Le point M est sur la bissectrice, et il est situé dans l'angle. D'après la propriété caractéristique de la bissectrice, il est aussi à $2{,}5$ cm de la droite (Oy).

Bissectrices et cercle inscrit

La plus grande table ronde

Une pièce a la forme d'un triangle. Tu veux y poser la plus grande table ronde possible. Son bord doit toucher les trois murs, sans les dépasser. Où placer le centre de la table ?

Devine : Le centre de la table

Le centre de la table doit être à la même distance des trois murs. Sur quelles droites doit-il se trouver ?

A. Sur les médiatrices des trois murs de la pièce.
Faux.
Un point d'une médiatrice est à égale distance des deux **coins** d'un mur, pas de deux murs.

B. Sur les hauteurs issues des coins de la pièce.
Faux.
Une hauteur part d'un coin, perpendiculairement au mur opposé : elle ne donne aucune égalité de distances.

C. Au milieu du plus long mur.
Faux.
Un point d'un mur est à une distance nulle de ce mur, mais pas des deux autres.

D. Sur les bissectrices des angles de la pièce.
Juste.
Juste : un point de la bissectrice d'un coin est à la même distance des deux murs de ce coin.

Correction

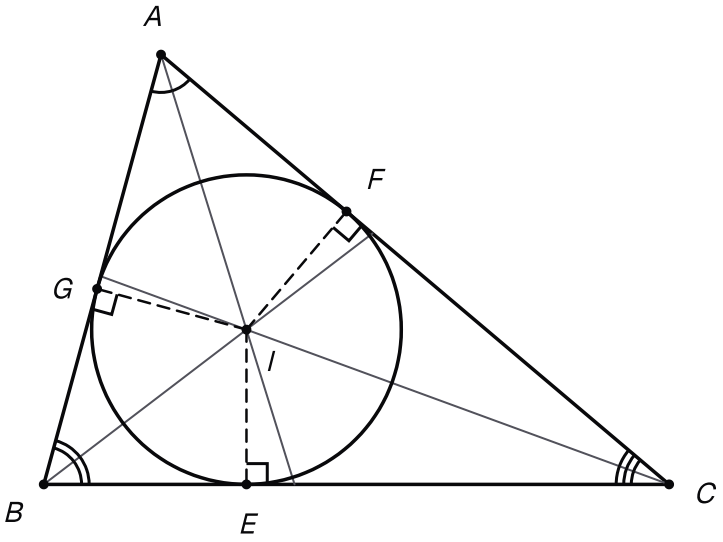
Un point à égale distance de deux murs, à l'intérieur de leur angle, est sur la bissectrice de cet angle : c'est la propriété caractéristique de la bissectrice.

Le centre de la table est donc sur les bissectrices des trois coins.

Les trois bissectrices

En clair. Dans un triangle, les trois bissectrices se croisent en un seul point I, à l'intérieur du triangle. Ce point est aussi loin d'un côté que des deux autres : c'est le centre de la plus grande table ronde.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve reprend le plan suivi pour les médiatrices ; la propriété caractéristique de la bissectrice y prend la place des règles 1 et 2.



Les bissectrices des trois angles du triangle ABC se rejoignent en I, centre d'un cercle qui effleure chaque côté en E, F et G.

Propriété : Bissectrices d'un triangle et cercle inscrit

Dans un triangle ABC, les trois bissectrices sont concourantes en un point I, situé à l'intérieur du triangle. Ce point est à la même distance des trois droites (BC), (AC) et (AB).

Soit E, F et G les pieds des perpendiculaires menées de I aux droites (BC), (AC) et (AB). On a $IE = IF = IG$. Le cercle de centre I et de rayon IE passe par E, F et G : c'est le **cercle inscrit** dans le triangle ABC.

Démonstration

Étape 1. On admet que les bissectrices issues de A et de B se coupent en un point I situé à l'intérieur du triangle, donc à l'intérieur de chacun de ses trois angles.

Étape 2. Le point I est sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$. D'après la propriété caractéristique de la bissectrice, ses distances aux droites (AB) et (AC) sont égales : $IG = IF$.

Étape 3. Le point I est sur la bissectrice de $\widehat{ABC}$. De même, $IG = IE$.

Étape 4. Donc $IF = IE$. Le point I est à l'intérieur de l'angle $\widehat{ACB}$: d'après la propriété caractéristique, utilisée dans l'autre sens, il est sur la bissectrice issue de C.

Étape 5. Les trois bissectrices passent par I, et $IE = IF = IG$: le cercle de centre I et de rayon IE passe par E, F et G.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Même schéma que pour le cercle circonscrit : deux allers, puis un retour. Ici, les **distances aux droites** remplacent les distances aux sommets.

Le retour demande une précaution sur la position du point I : laquelle ? La question suivante te la fait trouver.

Vérifie : Une condition à vérifier

Dans la preuve, pourquoi faut-il savoir que I est à l'intérieur de l'angle $\widehat{ACB}$?

A. Pour que le cercle inscrit passe par le sommet C.

Faux.

Le cercle inscrit ne passe par aucun sommet du triangle.

B. Pour employer la propriété caractéristique dans l'autre sens.

Juste.

Juste : ce sens exige un point situé à l'intérieur de l'angle.

C. Pour que la distance IE soit égale à IC.

Faux.

La preuve compare des distances à des droites, jamais la distance au sommet C.

D. Pour que les médiatrices se coupent en I.

Faux.

Les médiatrices ne servent pas ici : elles donnent le centre d'un autre cercle.

Correction

À l'étape du retour, on sait que $IF = IE$: le point I est à égale distance des droites (AC) et (BC).

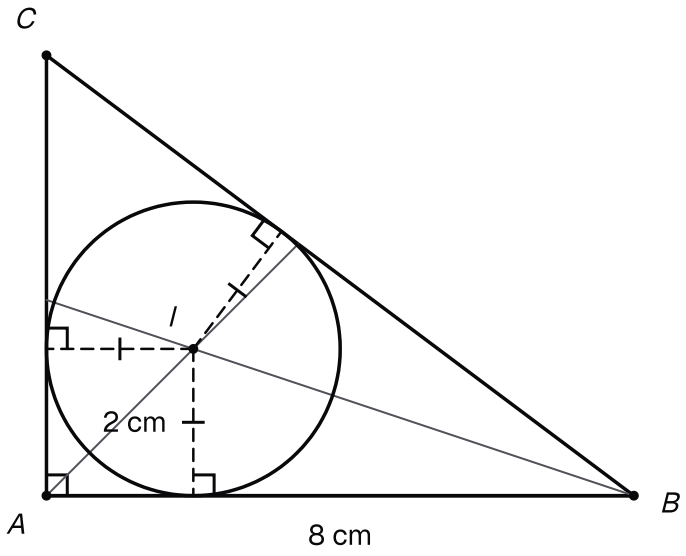
La propriété caractéristique de la bissectrice, dans l'autre sens, ne s'applique qu'à un point intérieur à l'angle.

> Comme I est à l'intérieur du triangle, il est à l'intérieur de $\widehat{ACB}$: la propriété s'applique, et I est sur la bissectrice issue de C.

Exemple : la table dans une pièce

Dessine la pièce : un triangle ABC rectangle en A, avec $AB = 8$ cm et $AC = 6$ cm.

- Construis au compas les bissectrices issues de A et de B. Elles se coupent en I.
- Trace à l'équerre les perpendiculaires menées de I aux trois côtés. Elles mesurent toutes 2 cm.
- Sur ton dessin, la table a donc un rayon de 2 cm.



Dans la pièce schématisée par le triangle ABC rectangle en A, le point I est à 2 cm de chaque côté : c'est le rayon de la table.

Construire le cercle inscrit

Méthode : le cercle inscrit

1. **Trace** au compas les bissectrices de deux angles du triangle.
2. **Nomme** I leur point de rencontre ; la troisième bissectrice sert de contrôle.
3. **Trace** à l'équerre la perpendiculaire à (BC) passant par I. Elle coupe (BC) en E.
4. **Trace** le cercle de centre I et de rayon IE.

Une observation. Regarde ton cercle de près. Il **touche** les trois côtés, en E, en F et en G, et ne les coupe nulle part ailleurs. Ce fait sera justifié au chapitre « Le cercle ».

Trouve l'erreur, Coin devoir et à toi

Trouve l'erreur : Le cercle d'Adam

Pour construire le cercle inscrit du triangle RST, Adam trace les médiatrices de $[RS]$ et de $[ST]$. Il pointe le compas en leur point de rencontre et trace le cercle qui passe par R. Qu'a-t-il construit ?

A. Le cercle circonscrit : il fallait des bissectrices.

Juste.

Juste : ce cercle passe par les trois sommets.

B. Le cercle inscrit, comme demandé.

Faux.

Ce cercle passe par le sommet R : le cercle inscrit ne passe par aucun sommet.

C. Le cercle inscrit, mais avec un rayon trop grand.

Faux.

Le centre lui-même ne convient pas : ce n'est pas le point de rencontre des bissectrices.

D. Un cercle sans nom, au centre mal placé.

Faux.

Son centre est à égale distance des trois sommets : ce cercle a un nom.

Correction

Le point de rencontre des médiatrices est à égale distance de R, S et T. Le cercle d'Adam passe donc par les trois sommets : c'est le cercle circonscrit.

Pour le cercle inscrit, il fallait tracer deux bissectrices, puis prendre pour rayon la distance du centre à un côté.

Attention : circonscrit ou inscrit ?

✗ « Le cercle inscrit passe par les trois sommets du triangle. »

✓ C'est le cercle **circonscrit** qui passe par les sommets ; son centre est sur les **médiatrices**.

Le cercle **inscrit** reste à l'intérieur du triangle et touche ses trois côtés (tu l'as observé sur ta figure ; la raison viendra au chapitre « Le cercle ») ; son centre est sur les **bissectrices**.

Remarque : Coin devoir : justifier le cercle inscrit

En devoir, une justification courte est attendue. Par exemple :

« Le point I est sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$, à l'intérieur de cet angle. La propriété caractéristique de la bissectrice donne alors $IG = IF$. Il est aussi sur la bissectrice de $\widehat{ABC}$, à l'intérieur de cet angle, donc $IG = IE$. Ainsi $IE = IF = IG$: le cercle de centre I de rayon IE est le cercle inscrit. »

Ici, E, F et G sont les pieds des perpendiculaires issues de I sur (BC), (AC) et (AB).

À toi : Le centre du cercle inscrit

Le point I est le centre du cercle inscrit dans le triangle KLM.

(a) Sa distance à la droite (KL) vaut $1{,}5$ cm. Quelles sont ses distances aux droites (LM) et (KM) ?

(b) On a $\widehat{LKM} = 70°$. Combien mesure $\widehat{LKI}$? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le centre du cercle inscrit est sur les trois bissectrices du triangle.
Indice 2
Pour (b), la bissectrice issue de K partage $\widehat{LKM}$ en deux.
Indice 3
Point délicat : en (a), on parle de distances à des droites, mesurées le long des perpendiculaires.

Réponse
(a) Le point I est sur les trois bissectrices : il est à la même distance des trois côtés. Il est donc à $1{,}5$ cm de (LM) et $1{,}5$ cm de (KM). Cette distance est le rayon du cercle inscrit.

(b) Le point I est sur la bissectrice issue de K. D'après la définition de la bissectrice :

$$\widehat{LKI} = 70° \div 2 = 35°$$

Bilan : les droites remarquables

Trois familles de droites traversent ce chapitre. Chacune répond à une question différente. Avant de lire le tableau, teste-toi.

Vérifie : Le bon point

Dans tout triangle, quel point est à égale distance des trois sommets ?

A. Le point de rencontre des hauteurs.
Faux.
L'orthocentre n'a pas cette propriété en général.

B. Le milieu du plus grand côté.
Faux.
Dans l'exemple du triangle rectangle du cours, tu l'as constaté sur ta figure ; mais ce n'est pas le cas dans tout triangle.

C. Le point de rencontre des médiatrices.

Juste.

Juste : c'est le centre du cercle circonscrit.

D. Le point de rencontre des bissectrices.

Faux.

Ce point est à égale distance des trois côtés, pas des trois sommets.

Correction

Le point de rencontre des médiatrices est le centre O du cercle circonscrit : $OA = OB = OC$.

Celui des bissectrices est le centre I du cercle inscrit, à égale distance des trois côtés.

	Hauteurs	Médiatrices	Bissectrices
Passe par	un sommet	le milieu d'un côté	un sommet
Direction	perpendiculaire au côté opposé	perpendiculaire au côté	partage l'angle en deux
Point de rencontre	l'orthocentre	le centre O du cercle circonscrit	le centre I du cercle inscrit
Propriété du point	aucune	$OA = OB = OC$	même distance aux trois côtés
Se rencontrent en un point (concours)	admis	démontré	démontré

À retenir : Démontré ou admis ?

Démontrés dans ce chapitre : les angles du triangle équilatéral, les angles du triangle rectangle, le concours des médiatrices, le concours des bissectrices.

Admis : la somme des angles, démontrée au chapitre « Deux parallèles et une sécante » ; les angles du triangle isocèle ; l'inégalité triangulaire ; l'existence d'un triangle de côtés donnés ; le concours des hauteurs ; la propriété caractéristique de la bissectrice.

Le mot du prof. Tu sais maintenant calculer un angle, dire si un triangle existe et construire les points où ses droites remarquables se rencontrent.

Avant chaque calcul, nomme la règle que tu utilises. Une figure tracée à la main peut tromper ; seule une règle permet de prouver.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Le triangle : angles, droites remarquables et cercles » (1ac · general · mathematiques)