BURHAN

Le cercle

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/le-cercle/resume

Chapitre	Semestre
Le cercle	Semestre 2

Le cercle et ses points

Un **cercle** se trace au compas. Tous ses points sont à la même distance d'un point fixe : son **centre**. Cette distance s'appelle le **rayon**.

Définition : Le cercle

Soit O un point et r une longueur non nulle. Le **cercle** de **centre** O et de **rayon** r est formé de tous les points situés à la distance r du point O.

Autrement dit, pour un point M :

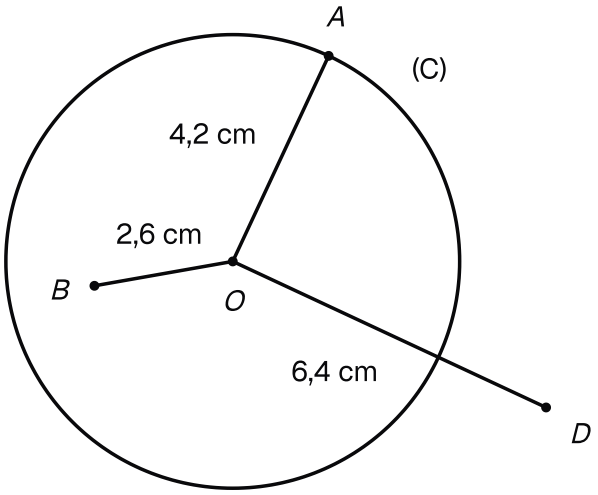
- si $OM = r$, le point M est **sur** le cercle ;
- si $OM < r$, le point M est **à l'intérieur** du cercle ;
- si $OM > r$, le point M est **à l'extérieur** du cercle.

Exemple : Situer un point

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon $4{,}2$ cm.

- $OA = 4{,}2$ cm, donc $OA = r$: le point A est sur le cercle.
- $OB = 2{,}6$ cm, donc $OB < r$: le point B est à l'intérieur du cercle.
- $OD = 6{,}4$ cm, donc $OD > r$: le point D est à l'extérieur du cercle.

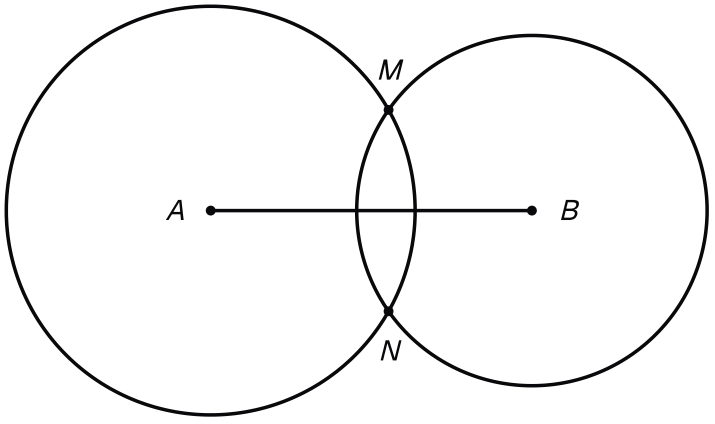
À chaque fois, tu compares la distance au centre et le rayon. Tu justifies par la définition du cercle.



Situer A, B et D : chaque distance à O se compare au rayon de 4,2 cm du cercle (C).

Méthode : Placer un point à des distances données de deux points

1. **Traduire** chaque distance par un cercle : les points situés à $3{,}2$ cm de A sont sur le cercle de centre A et de rayon $3{,}2$ cm.
2. **Tracer** les deux cercles, un autour de chaque point.
3. **Conclure** : les points cherchés sont les points communs aux deux cercles. Il peut y en avoir deux, un seul ou aucun. Tu justifies par la définition du cercle.



Deux distances, deux cercles : M et N, communs aux cercles de centres A et B, conviennent tous les deux.

Attention : Le centre n'est pas un point du cercle

✗ « Le centre O est un point du cercle. »

✓ Entre le centre et lui-même, la distance est nulle : elle vaut 0. Le rayon, lui, n'est jamais nul.

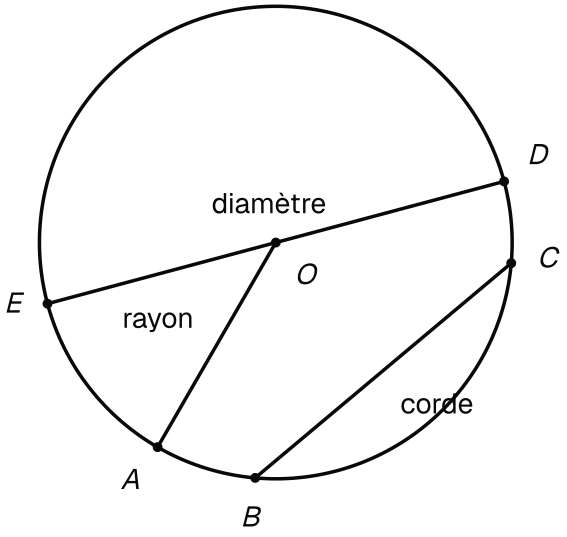
Le centre est donc **à l'intérieur** du cercle.

Rayon, corde et diamètre

Définition : Rayon, corde et diamètre

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon r.

- Un **rayon** est un segment qui joint le centre O à un point du cercle. Sa longueur est r : le mot « rayon » désigne aussi cette longueur.
- Une **corde** est un segment dont les deux extrémités sont des points du cercle.
- Un **diamètre** est une corde qui passe par le centre O. Le mot « diamètre » désigne aussi la longueur de cette corde.



Sur un même cercle de centre O : un rayon [OA], une corde [BC] qui évite le centre, un diamètre [DE] qui le traverse.

Propriété : Longueur et milieu d'un diamètre

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon r. Si $[AB]$ est un diamètre de ce cercle, alors :

- le centre O est le **milieu** du segment $[AB]$;
- $AB = 2r$: le diamètre est le **double** du rayon.

Le diamètre est le double du rayon

$$AB = 2r$$

Le rayon est la moitié du diamètre

$$r = AB \div 2$$

Le centre est le milieu du diamètre

$$AO = OB = AB \div 2$$

Exemple : Du rayon au diamètre, et retour

- Un cercle a pour rayon $3{,}8$ cm. Son diamètre mesure le double : $2 \times 3{,}8 = 7{,}6$. Le diamètre mesure $7{,}6$ cm.
- Un cercle a pour diamètre $9{,}2$ cm. Son rayon mesure la moitié : $9{,}2 \div 2 = 4{,}6$. Le rayon mesure $4{,}6$ cm.

Méthode : Tracer un cercle

1. **Repérer** le centre et le rayon. Si tu connais un diamètre $[AB]$, le centre est le milieu de $[AB]$ et le rayon est la moitié de AB.
2. **Ouvrir** le compas de la longueur du rayon, mesurée sur la règle graduée.
3. **Piquer** la pointe sèche sur le centre. Trace le cercle sans changer l'ouverture.

Attention : Rayon ou diamètre ?

✗ Pour un cercle de diamètre $8{,}6$ cm, ouvrir le compas de $8{,}6$ cm.

✓ L'ouverture du compas est le **rayon**, pas le diamètre. Tu ouvres donc le compas de $4{,}3$ cm.

Avec $8{,}6$ cm, le cercle serait deux fois trop grand.

Attention : Une corde n'est pas toujours un diamètre

✗ « $[AB]$ est une corde, donc $AB = 2r$. »

✓ Tout diamètre est une corde. Mais une corde n'est un diamètre que si elle passe par le **centre**.

Avant d'écrire $AB = 2r$, vérifie que $[AB]$ passe par le centre.

La médiatrice d'une corde

Rappel : la **médiatrice** d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu. On l'utilise dans les deux sens :

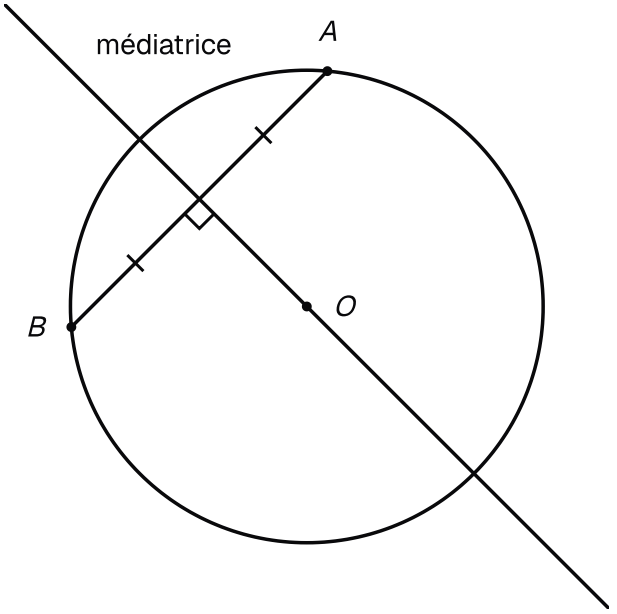
- si un point est sur la médiatrice, alors il est à égale distance des deux extrémités du segment ;

- si un point est à égale distance des deux extrémités, alors il est sur la médiatrice.

C'est la propriété de la médiatrice d'un segment.

Propriété : La médiatrice d'une corde passe par le centre

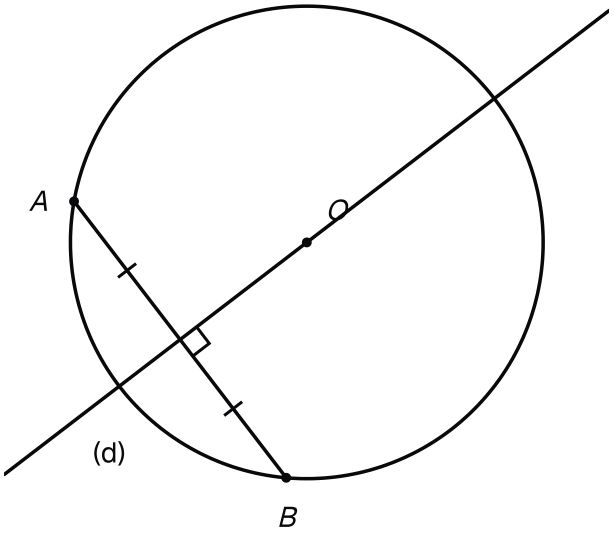
Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O. Si $[AB]$ est une corde de ce cercle, alors la **médiatrice** du segment $[AB]$ passe par le centre O.



Une corde [AB] en haut à gauche du cercle et sa médiatrice, qui file jusqu'au centre O et le traverse.

Propriété : Droite perpendiculaire à une corde et passant par le centre

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et $[AB]$ une corde de ce cercle. Si une droite (d) passe par O et est perpendiculaire à la droite (AB), alors (d) est la **médiatrice** de la corde $[AB]$. En particulier, (d) coupe la corde $[AB]$ en son **milieu**.



La droite (d) mène du centre O une perpendiculaire à la corde [AB] et la partage en deux moitiés égales.

À retenir : En clair

Le centre d'un cercle est sur la médiatrice de **chaque** corde. Une droite qui passe par le centre et qui est perpendiculaire à une corde coupe cette corde en son milieu.

Exemple : Trouver le milieu d'une corde

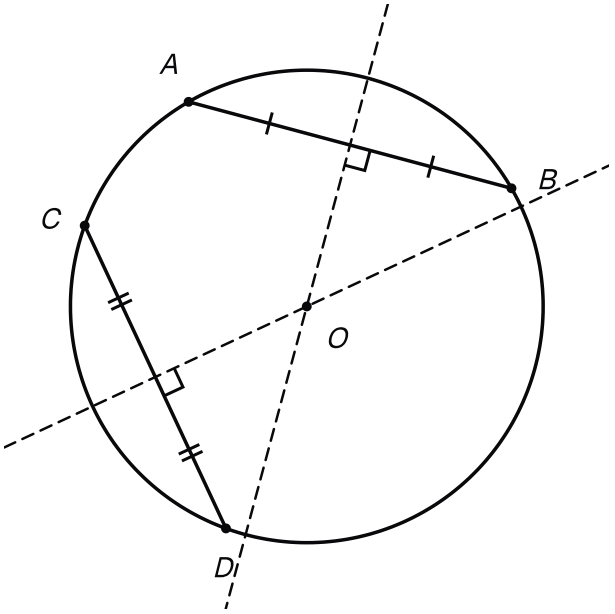
Dans un cercle de centre O, la corde $[EF]$ mesure $5{,}2$ cm. La droite (d) passe par O et $(d) \perp (EF)$. Elle coupe $[EF]$ au point H.

D'après la propriété de la perpendiculaire à une corde, H est le milieu de $[EF]$.

Donc $EH = HF$, et chacune mesure la moitié de $5{,}2$ cm : $EH = 2{,}6$ cm.

Méthode : Retrouver le centre d'un cercle

1. **Tracer** deux cordes du cercle qui ne sont pas parallèles.
2. **Construire** la médiatrice de chacune de ces cordes.
3. **Conclure** : le centre est le point commun des deux médiatrices, car la médiatrice d'une corde passe par le centre.



Centre perdu, centre retrouvé : les médiatrices de deux cordes non parallèles se coupent en O.

Méthode : Tracer un cercle qui passe par deux points

1. **Construire** la médiatrice du segment $[AB]$.
2. **Choisir** un point O sur cette médiatrice.
3. **Tracer** le cercle de centre O et de rayon OA. Il passe par B, car O est sur la médiatrice de $[AB]$, donc $OA = OB$.

Attention : Deux cordes parallèles ne suffisent pas

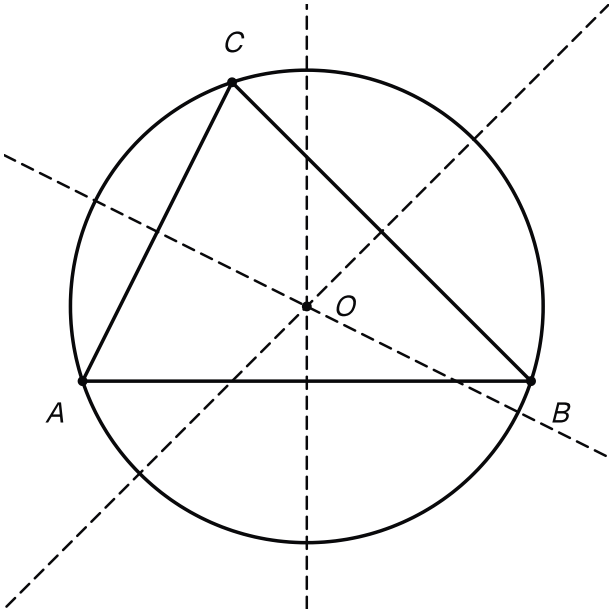
✗ Tracer deux cordes parallèles et leurs médiatrices pour trouver le centre.

✓ Deux cordes parallèles ne donnent qu'une droite. Leurs médiatrices passent toutes les deux par le centre, et elles sont perpendiculaires aux deux cordes.

Par le centre, on ne peut tracer qu'une seule droite perpendiculaire à ces cordes : les deux médiatrices se confondent. Il faut deux cordes **non parallèles** pour avoir un seul point commun.

Remarque : Lien avec le cercle circonscrit

Rappel : le **cercle circonscrit** à un triangle passe par ses trois sommets. Son centre est le point commun des médiatrices des côtés. Les côtés du triangle sont alors des cordes de ce cercle.

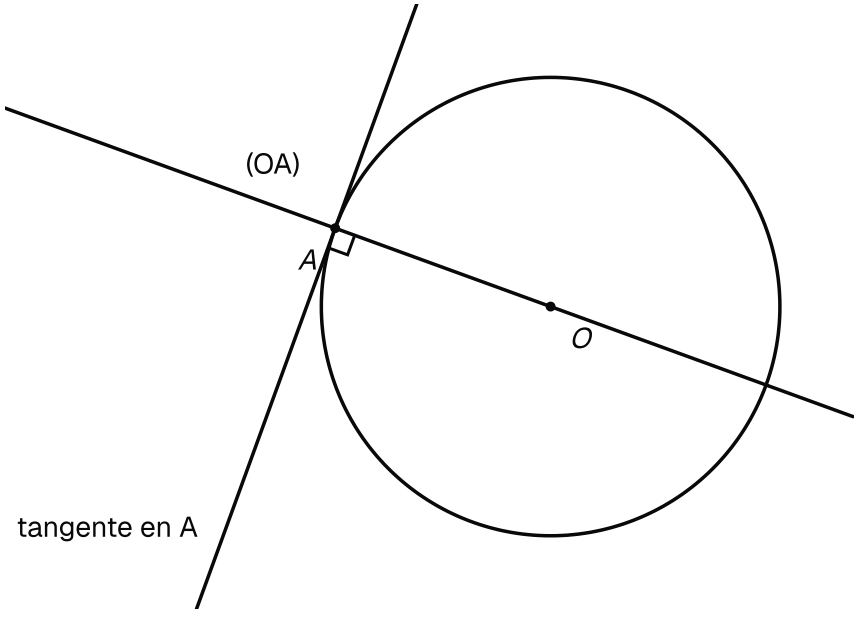


Le triangle ABC, les médiatrices de ses trois côtés concourantes en O et le cercle circonscrit de centre O.

La tangente en un point

Définition : Tangente à un cercle en un point

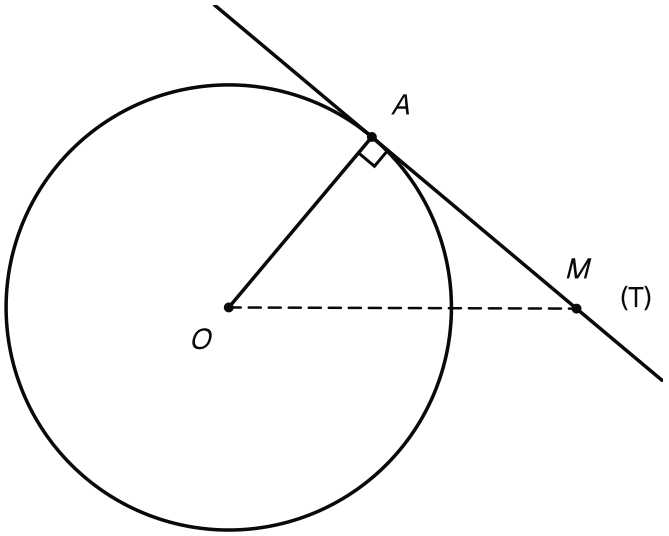
Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et A un point de ce cercle. La **tangente** au cercle $(\mathcal{C})$ au point A est la droite qui passe par A et qui est **perpendiculaire** à la droite (OA).



La tangente en A au cercle de centre O : la droite qui passe par A à angle droit avec (OA).

Propriété : La tangente n'a qu'un point commun avec le cercle

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon r, et A un point de ce cercle. La tangente (T) au cercle au point A n'a qu'**un seul point commun** avec le cercle : le point A. Tous les autres points de (T) sont **à l'extérieur** du cercle.



Hormis A, chaque point de la tangente (T) est plus éloigné de O que le rayon : ici M, hors du cercle.

Méthode : Construire la tangente à un cercle en un point

1. **Tracer** la droite (OA) qui joint le centre O au point A du cercle.
2. **Tracer**, avec l'équerre, la perpendiculaire à (OA) qui passe par A.
3. **Justifier** : cette droite est la tangente en A, d'après la définition de la tangente.

Exemple : Une tangente construite et justifiée

Le cercle $(\mathcal{C})$ a pour centre O et pour rayon $1{,}5$ cm. Le point K est sur $(\mathcal{C})$.

Tu traces la droite (OK), puis la droite (T) perpendiculaire à (OK) en K. D'après la définition de la tangente, (T) est la tangente au cercle en K.

D'après la propriété de la tangente, K est le seul point commun de (T) et du cercle. Tout autre point M de (T) vérifie $OM > 1{,}5$ cm.

Attention : La tangente se trace au point de contact

✗ Tracer une perpendiculaire à (OA) en un autre point que A, et l'appeler tangente en A.

✓ La tangente en A est perpendiculaire à (OA) **au point** A.

Une droite qui coupe le cercle en deux points n'est jamais une tangente.

Les constructions

Remarque : Les instruments

Le **compas** trace les cercles ; il sert aussi à recopier une longueur. La **règle graduée** mesure les longueurs et trace les droites. L'**équerre** trace les angles droits, donc les perpendiculaires.

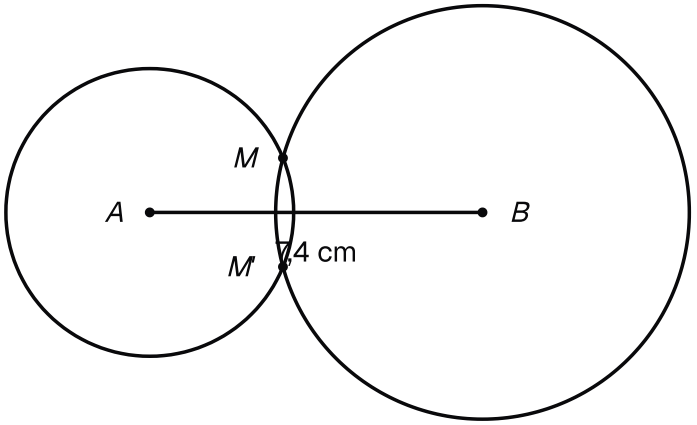
Méthode : Quelle construction pour quelle question ?

- **Placer un point à des distances données de deux points** : tracer deux cercles et prendre leurs points communs.
- **Tracer un cercle de diamètre donné** : prendre le milieu du diamètre comme centre, et la moitié du diamètre comme rayon.
- **Retrouver le centre d'un cercle** : tracer les médiatrices de deux cordes non parallèles.
- **Tracer un cercle qui passe par deux points** : choisir son centre sur la médiatrice du segment.
- **Trouver le milieu d'une corde** : tracer la perpendiculaire à la corde qui passe par le centre.
- **Construire la tangente en un point** : tracer la droite qui joint le centre à ce point, puis la perpendiculaire en ce point.

Exemple : Placer un point avec deux cercles

On a $AB = 7{,}4$ cm. On cherche un point M tel que $AM = 3{,}2$ cm et $BM = 4{,}6$ cm.

1. Trace le cercle de centre A et de rayon $3{,}2$ cm.
2. Trace le cercle de centre B et de rayon $4{,}6$ cm.
3. Les deux cercles se coupent en deux points, de part et d'autre de la droite (AB). D'après la définition du cercle, chacun de ces deux points convient.



Avec AB = 7,4 cm, les cercles de rayons 3,2 cm autour de A et 4,6 cm autour de B donnent deux positions, M et M'.

Justifier une construction

Méthode : Justifier une construction

1. **Nommer** ce que tu as tracé : cercle, médiatrice, perpendiculaire, et les points obtenus.
2. **Citer** la définition ou la propriété employée : « D'après la définition du cercle… », « D'après la propriété de la médiatrice d'une corde… ».
3. **Conclure** par une phrase qui répond à la question posée.

À retenir : Les phrases à citer

- « D'après la définition du cercle… » : un point est sur le cercle, à l'intérieur ou à l'extérieur.
- « D'après la propriété du diamètre… » : le centre est le milieu du diamètre, et le diamètre est le double du rayon.
- « D'après la propriété de la médiatrice d'un segment… » : pour passer de « sur la médiatrice » à « à égale distance des deux bouts », ou l'inverse.
- « D'après la propriété de la médiatrice d'une corde… » : cette médiatrice passe par le centre.
- « D'après la propriété de la perpendiculaire à une corde… » : la droite qui passe par le centre et qui est perpendiculaire à une corde coupe cette corde en son milieu.
- « D'après la définition de la tangente… » : elle est perpendiculaire au rayon, au point de contact.
- « D'après la propriété de la tangente… » : elle n'a qu'un seul point commun avec le cercle.

Exemple : Une rédaction modèle

Question : la droite (T) passe par le point A du cercle de centre O, et $(T) \perp (OA)$. Que représente (T) ?

Rédaction : « La droite (T) passe par le point A du cercle et elle est perpendiculaire à (OA). D'après la définition de la tangente, (T) est la tangente au cercle en A. »

Synthèse

À retenir : Ce qu'il faut retenir

- Un point M est sur le cercle de centre O et de rayon r quand $OM = r$.
- Le diamètre est le double du rayon, et le centre est son milieu.
- La médiatrice d'une corde passe par le centre.
- La tangente en un point est perpendiculaire au rayon en ce point. Elle n'a qu'un seul point commun avec le cercle.

Ce que tu sais faire.

- Situer un point par rapport à un cercle.
- Passer du rayon au diamètre, et du diamètre au rayon.
- Retrouver le centre d'un cercle et tracer un cercle qui passe par deux points.
- Construire une tangente et justifier chaque construction par une propriété nommée.