BURHAN

Le cercle : exercices, entraînement

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/le-cercle/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Le cercle	Entraînement	7

Exercice 1

La carte au trésor

Sur une carte, deux arbres sont marqués par les points A et B, avec $AB = 6$ cm. Le trésor est caché à 4 cm de l'arbre A et à 5 cm de l'arbre B. Ces distances sont mesurées sur la carte.

1

Où sont tous les points de la carte situés à 4 cm de A ? Et tous ceux situés à 5 cm de B ?

INDICE

Outil : des points tous à la même distance d'un point forment une figure que tu connais.

CORRIGÉ

D'après la définition du cercle, les points situés à 4 cm de A forment le cercle de centre A et de rayon 4 cm.

De la même façon, les points situés à 5 cm de B forment le cercle de centre B et de rayon 5 cm.

Conclusion. Les points à 4 cm de A sont sur le cercle de centre A et de rayon 4 cm ; ceux à 5 cm de B sont sur le cercle de centre B et de rayon 5 cm.

2

Trace $[AB]$ et ces deux cercles sur ton cahier. Combien de points communs ont les deux cercles ? Où peut être le trésor ?

INDICE

Ensuite : le trésor doit être sur les deux cercles à la fois.

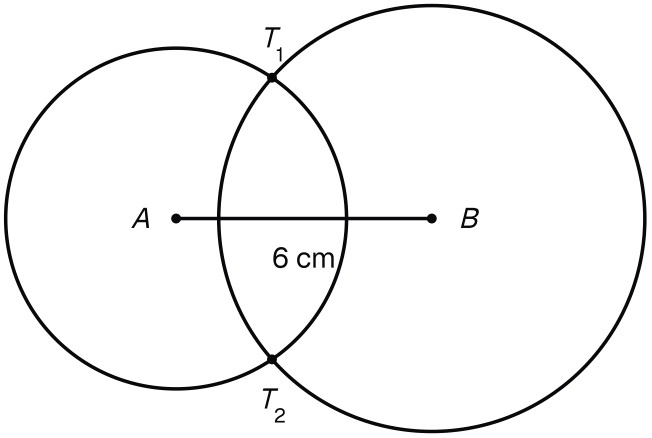
CORRIGÉ

Tracé. On trace $[AB]$ de 6 cm. On trace ensuite le cercle de centre A et de rayon 4 cm, puis le cercle de centre B et de rayon 5 cm.

Figure obtenue : les deux cercles se coupent en deux points, T_1 et T_2. Ces points sont de part et d'autre de la droite (AB).

Le trésor. Le trésor est à 4 cm de A et à 5 cm de B : il est sur les deux cercles à la fois. Seuls T_1 et T_2 sont dans ce cas.

Conclusion. Les deux cercles ont deux points communs, T_1 et T_2 : le trésor est caché en T_1 ou en T_2.



Les deux cachettes possibles du trésor : T1 et T2, communs au cercle de centre A de rayon 4 cm et au cercle de centre B de rayon 5 cm.

3

Justifie que le point T_1 convient.

INDICE

Point délicat : utilise la définition du cercle deux fois, une fois pour chaque cercle.

CORRIGÉ

Distance à A. Le point T_1 est sur le cercle de centre A et de rayon 4 cm. D'après la définition du cercle, $AT_1 = 4$ cm.

Distance à B. Le point T_1 est aussi sur le cercle de centre B et de rayon 5 cm. Pour la même raison, $BT_1 = 5$ cm.

Conclusion. Le point T_1 est à 4 cm de l'arbre A et à 5 cm de l'arbre B : il convient.

Exercice 2

Le centre du massif

Dans un jardin, un massif de fleurs est rond : son bord est un cercle. Le jardinier veut planter un rosier exactement au centre, mais il ne sait plus où il est. Il plante quatre bâtons A, B, E et G sur le bord du massif. Les cordes $[AB]$ et $[EG]$ ne sont pas parallèles.

1

Quelles droites doit-il construire pour trouver le centre ?

INDICE

Outil : une droite liée à chaque corde passe toujours par le centre.

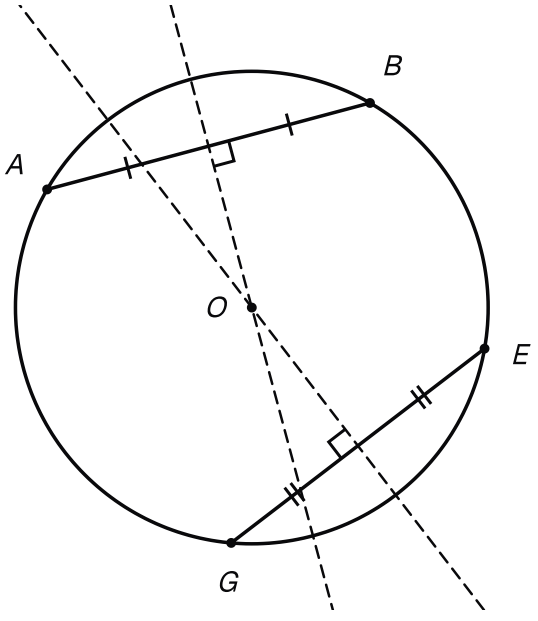
CORRIGÉ

Une propriété du cours, la propriété de la médiatrice d'une corde, dit que la médiatrice d'une corde passe par le centre. Le jardinier construit donc :

- la médiatrice de la corde $[AB]$;
- la médiatrice de la corde $[EG]$.

Les deux cordes ne sont pas parallèles : leurs médiatrices ne le sont pas non plus, et elles se coupent en un point. On l'appelle O.

Conclusion. Il doit construire les médiatrices des cordes $[AB]$ et $[EG]$; elles se coupent en O.



Le massif rond et ses quatre bâtons : les médiatrices des cordes [AB] et [EG] se rencontrent au point O, où planter le rosier.

2

Pourquoi le point O est-il le centre du massif ?

INDICE

Début : quelle propriété du cours dit par quel point passe la médiatrice de chaque corde ?

CORRIGÉ

D'après la propriété de la médiatrice d'une corde, le centre du massif est sur la médiatrice de $[AB]$. Pour la même raison, il est aussi sur la médiatrice de $[EG]$.

Or ces deux médiatrices n'ont qu'un seul point commun, le point O. Le centre, placé sur les deux droites, ne peut être que O.

Conclusion. Le point O est le centre du massif : c'est là que le jardinier plante le rosier.

3

Il mesure ensuite $OA = 2$ m. Quel est le diamètre du massif ?

INDICE

Ensuite : $[OA]$ joint le centre à un point du bord ; pense au double.

CORRIGÉ

Le point A est sur le bord, et O est le centre. D'après la définition, $[OA]$ est un rayon : le rayon du massif mesure 2 m.

D'après la propriété du diamètre, le diamètre est le double du rayon :

$$2 \times 2 = 4$$

Conclusion. Le diamètre du massif mesure 4 m.

Exercice 3

Des cercles qui passent par deux points

Trace un segment $[AB]$ de longueur 5 cm.

1

Où doit se trouver le centre O d'un cercle qui passe par A et par B ? Justifie.

INDICE

Outil : si un cercle de centre O passe par A et par B, compare OA et OB.

CORRIGÉ

Prenons un cercle de centre O qui passe par A et par B. D'après la définition du cercle, OA et OB sont alors égales au rayon : $OA = OB$.

Le point O est donc à la même distance de A et de B. D'après la propriété de la médiatrice d'un segment, O est sur la médiatrice de $[AB]$.

Conclusion. Le centre d'un cercle qui passe par A et par B se trouve sur la médiatrice du segment $[AB]$.

2

Construis un cercle de rayon 4 cm qui passe par A et par B. Explique ta construction et justifie. Combien de cercles de ce rayon conviennent ?

INDICE

Début : le centre est sur la médiatrice de $[AB]$ et à 4 cm de A : il est donc aussi sur un cercle de centre A.

CORRIGÉ

Construction.

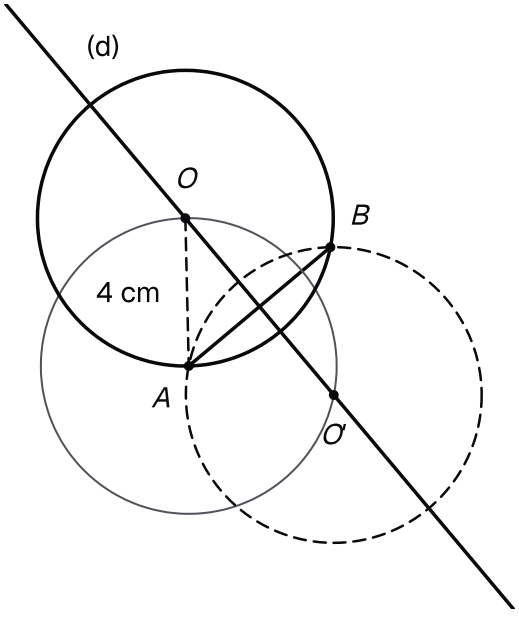
1. On construit la médiatrice (d) de $[AB]$.
2. On trace le cercle de centre A et de rayon 4 cm. Il coupe (d) en deux points ; on en choisit un, O.
3. On trace le cercle de centre O et de rayon 4 cm.

Justification. Le point O est sur le cercle de centre A et de rayon 4 cm, donc $OA = 4$ cm. Le point O est aussi sur la médiatrice de $[AB]$; la propriété de la médiatrice d'un segment donne alors $OB = OA = 4$ cm.

D'après la définition du cercle, le cercle de centre O et de rayon 4 cm passe donc par A et par B. Figure obtenue : un cercle de rayon 4 cm dont $[AB]$ est une corde.

Nombre de cercles. D'après la question 1, le centre d'un tel cercle est sur (d) ; il est aussi à 4 cm de A. C'est donc l'un des deux points communs de (d) et du cercle de centre A. Le second point donne un autre cercle, qui convient aussi.

Conclusion. Exactement deux cercles de rayon 4 cm conviennent.



Les deux cercles de rayon 4 cm qui passent par A et B : leurs centres O et O' sont sur la médiatrice (d), à 4 cm de A.

3

Le cercle de diamètre $[AB]$ passe lui aussi par A et par B. Donne son centre et son rayon.

INDICE

Point délicat : le centre d'un cercle est le milieu de chacun de ses diamètres.

CORRIGÉ

D'après la propriété du diamètre, le centre du cercle de diamètre $[AB]$ est le milieu I de $[AB]$. Son rayon est la moitié de AB :

$$5 \div 2 = 2{,}5$$

Le point I est bien sur la médiatrice de $[AB]$, comme l'annonce la question 1.

Conclusion. Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre le milieu I de $[AB]$, et son rayon mesure $2{,}5$ cm.

Exercice 4

La portée d'une antenne

Une antenne de radio est placée au point A. Son signal va jusqu'à 8 km autour d'elle, pas plus loin. Trois villages sont placés aux points V, W et Z, avec $AV = 5$ km, $AW = 8$ km et $AZ = 11$ km.

1

Décris la zone où le signal arrive. Est-ce seulement le bord d'un cercle, ou aussi son intérieur ?

INDICE

Outil : les points situés à 8 km de A forment une figure que tu connais.

CORRIGÉ

D'après la définition du cercle, les points situés à 8 km de A forment le cercle de centre A et de rayon 8 km.

Le signal arrive partout où la distance à A est plus petite que 8 km ou égale à 8 km. Ce sont les points sur ce cercle et à l'intérieur de ce cercle.

Conclusion. Ce n'est pas seulement le bord : la zone couverte est formée du cercle de centre A et de rayon 8 km, et de tout son intérieur.

2

Quels villages reçoivent le signal ? Justifie.

INDICE

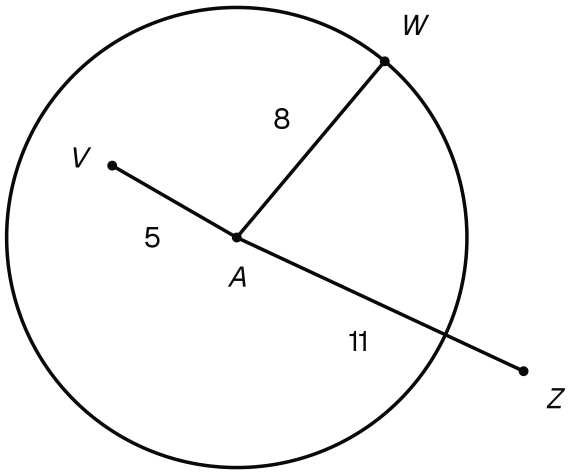
Ensuite : compare chaque distance au rayon de 8 km.

CORRIGÉ

Le bord de la zone est un cercle de rayon 8 km. D'après la définition du cercle, on situe chaque village en comparant sa distance à l'antenne avec 8 km :

- $AV = 5$ km et $5 < 8$: V est à l'intérieur du cercle, il reçoit le signal ;
- $AW = 8$ km : W est sur le cercle, il reçoit le signal, tout juste ;
- $AZ = 11$ km et $11 > 8$: Z est à l'extérieur du cercle, il ne reçoit pas le signal.

Conclusion. Les villages V et W reçoivent le signal ; le village Z ne le reçoit pas.



La zone couverte par l'antenne A, bord compris : V et W reçoivent le signal, Z, plus loin que 8 km, ne le reçoit pas.

3

Sur un plan, 1 cm représente 2 km. De combien ouvres-tu le compas pour tracer le bord de la zone ?

INDICE

Point délicat : l'ouverture du compas est le rayon, mesuré sur le plan.

CORRIGÉ

L'ouverture du compas est le rayon de la zone, mesuré sur le plan. Le rayon réel est 8 km.

Sur le plan, 1 cm représente 2 km. Les 8 km sont donc représentés par $8 \div 2 = 4$ cm.

On ouvre le compas de 4 cm, on pique la pointe sèche sur le point A du plan et on trace le cercle.

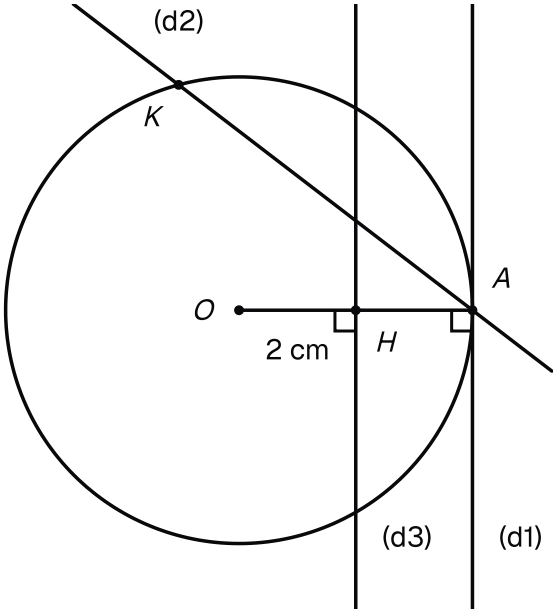
Conclusion. Il faut ouvrir le compas de 4 cm.

Exercice 5

Laquelle est la tangente ?

Le cercle $(\mathcal{C})$ a pour centre O et pour rayon 4 cm. Le point A est sur $(\mathcal{C})$. On a tracé trois droites :

- (d_1) passe par A et $(d_1) \perp (OA)$;
- (d_2) passe par A et coupe aussi le cercle en un autre point K ;
- (d_3) est perpendiculaire à (OA) au point H du segment $[OA]$, avec $OH = 2$ cm.



Les trois droites de l'énoncé autour du point A du cercle de centre O et de rayon 4 cm : (d1), (d2) et (d3).

1

Laquelle de ces droites est la tangente au cercle en A ? Justifie.

INDICE

Outil : la tangente en A remplit deux conditions : elle passe par A, et elle est perpendiculaire à (OA).

CORRIGÉ

La tangente en A doit remplir deux conditions : passer par A et être perpendiculaire à (OA).

La droite (d_1) passe par A, et $(d_1) \perp (OA)$: elle remplit les deux conditions. D'après la définition de la tangente, (d_1) est la tangente au cercle en A.

Conclusion. La tangente au cercle en A est la droite (d_1).

2

Pourquoi (d_3) n'est-elle pas la tangente en A ?

INDICE

Point délicat : regarde où se trouve l'angle droit.

CORRIGÉ

La droite (d_3) est bien perpendiculaire à (OA), mais au point H.

Or $OH = 2$ cm et $OA = 4$ cm : le point H n'est pas le point A. La droite (d_3) ne rencontre (OA) qu'en H, donc elle ne passe pas par A.

D'après la définition de la tangente, la tangente en A passe par A.

Conclusion. La droite (d_3) ne passe pas par A : ce n'est pas la tangente en A.

3

Pourquoi (d_2) n'est-elle pas une tangente au cercle ?

INDICE

Ensuite : compte les points communs de (d_2) et du cercle.

CORRIGÉ

La droite (d_2) coupe le cercle en A et en K : elle a deux points communs avec le cercle.

D'après la propriété de la tangente, une tangente n'a qu'un seul point commun avec le cercle.

Conclusion. La droite (d_2) n'est pas une tangente au cercle.

Exercice 6

La piste circulaire

Une piste de course a la forme d'un cercle de centre O et de rayon 50 m. Deux coureurs sont aux points A et B de la piste, et le segment $[AB]$ passe par O.

1

Que représente le segment $[AB]$ pour le cercle ? Quelle est sa longueur ?

INDICE

Outil : une corde qui passe par le centre porte un nom précis.

CORRIGÉ

Nature. Les points A et B sont sur le cercle, et $[AB]$ passe par le centre O. D'après la définition, $[AB]$ est un diamètre.

Longueur. D'après la propriété du diamètre, le diamètre est le double du rayon : $AB = 2 \times 50 = 100$, donc $AB = 100$ m. Le centre O est aussi le milieu de $[AB]$.

Conclusion. Le segment $[AB]$ est un diamètre de la piste, et il mesure 100 m.

2

Un arbitre se tient au point E, avec $OE = 30$ m. Un spectateur se tient au point S, avec $OS = 65$ m. Situe chacun d'eux par rapport au cercle de la piste.

INDICE

Ensuite : compare chaque distance au centre et le rayon de la piste.

CORRIGÉ

Le rayon de la piste est 50 m. D'après la définition du cercle, la place de chaque personne dépend de sa distance au centre :

- $OE = 30$ m et $30 < 50$, donc E est à l'intérieur du cercle ;
- $OS = 65$ m et $65 > 50$, donc S est à l'extérieur du cercle.

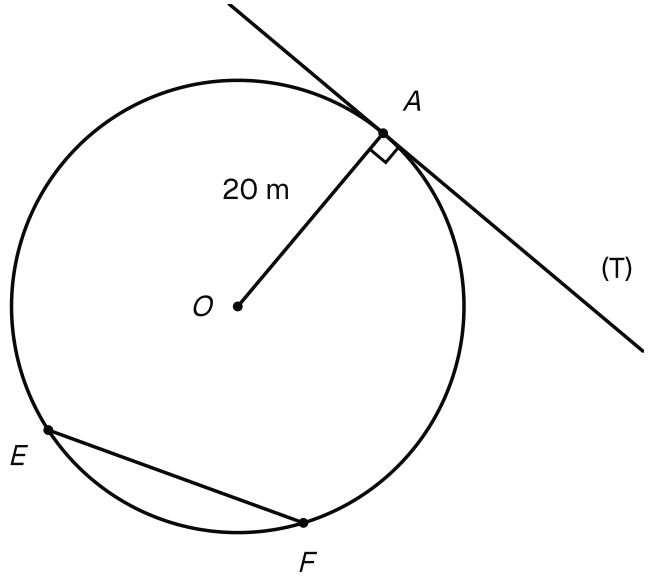
Conclusion. L'arbitre, en E, est à l'intérieur du cercle de la piste ; le spectateur, en S, est à l'extérieur.

Exercice 7

La fontaine et les allées

Une place est ronde : son bord est un cercle de centre O et de rayon 20 m. La fontaine est au centre O.

- Une allée droite (T) passe par le point A du bord, et $(T) \perp (OA)$.
- Un chemin droit traverse la place, du point E au point F du bord, avec $EF = 24$ m.



Le plan de la place ronde : le bord de rayon 20 m, l'allée (T) perpendiculaire à (OA) en A et le chemin [EF] de 24 m.

1

Justifie en deux phrases que l'allée (T) est la tangente au bord de la place en A.

INDICE

Outil : vérifie les deux conditions de la définition de la tangente.

CORRIGÉ

La droite (T) passe par le point A du cercle, et $(T) \perp (OA)$. D'après la définition de la tangente, (T) est donc la tangente au cercle en A.

Conclusion. L'allée (T) est la tangente au bord de la place en A.

2

Un banc est placé au point K de l'allée (T), avec K différent de A. Le banc est-il à l'intérieur du bord de la place ?

INDICE

Ensuite : où sont les points de (T) autres que A ? Une propriété du cours le dit.

CORRIGÉ

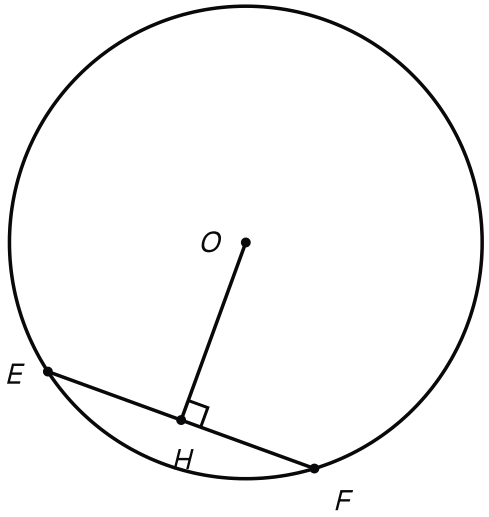
D'après la question 1, l'allée (T) est la tangente en A. Le banc K est sur (T), et K est différent de A.

D'après la propriété de la tangente, tous les points de (T) autres que A sont à l'extérieur du cercle. Donc K est à l'extérieur, et $OK > 20$ m.

Conclusion. Non : le banc est à l'extérieur du bord de la place.

3

On creuse un petit canal droit depuis la fontaine, perpendiculaire au chemin (EF). Il coupe $[EF]$ au point H. Calcule EH.



Le petit canal part de la fontaine O, perpendiculaire au chemin (EF), et l'atteint au point H.

INDICE

Point délicat : le petit canal part du centre, et il est perpendiculaire à une corde.

CORRIGÉ

Une corde. Les points E et F sont sur le bord : $[EF]$ est une corde du cercle.

Le milieu. Le petit canal est porté par une droite qui passe par O et qui est perpendiculaire à (EF). D'après la propriété de la perpendiculaire à une corde, cette droite coupe la corde en son milieu : H est le milieu de $[EF]$.

Le calcul. La longueur EH est donc la moitié de EF : $EH = 24 \div 2 = 12$, soit $EH = 12$ m.

Conclusion. On a $EH = 12$ m.