BURHAN

Le cercle

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/le-cercle/cours

Chapitre	Semestre
Le cercle	Semestre 2

Entrée

Une chèvre est attachée à un piquet par une **longe** de 5 m. Une longe, c'est la laisse d'un animal.

La chèvre broute l'herbe en tournant autour du piquet. Sa longe reste toujours tendue.

Un arroseur automatique fait la même chose avec l'eau. Il tourne autour d'un point fixe et mouille l'herbe autour de lui.

> **Devine : La trace de la chèvre**
>
> La chèvre fait le tour du piquet, la longe toujours tendue. Prédis : quelle trace laissent ses sabots sur l'herbe ?
>
> **A.** Un carré autour du piquet
>
> **Faux.**
> Un carré a des coins. Un coin est plus loin du centre que le milieu d'un côté. Or la longe garde toujours la même longueur.
>
> **B.** Une ligne droite de 5 m
>
> **Faux.**
> La chèvre tourne autour du piquet : elle ne va pas tout droit.
>
> **C.** Un cercle dont le piquet est le centre
>
> **Juste.**
> Oui : chaque point de la trace est à 5 m du piquet.
>
> **D.** Un cercle qui passe par le piquet
>
> **Faux.**
> La chèvre reste à 5 m du piquet : elle ne passe jamais dessus.
>
> **Correction**
> Chaque point de la trace est à 5 m du piquet, la longueur de la longe. Cette trace est un **cercle**, et le piquet en est le centre.

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à reconnaître un cercle et à le tracer. Tu construiras aussi des droites qui le touchent en un seul point. Enfin, tu sauras justifier chaque tracé par une phrase.

Le cercle et ses points

Des points à la même distance

Devine : Le bout du jet

Un arroseur tourne autour d'un point O. Les gouttes du bout du jet tombent toutes à 4 m de O. On mesure $OA = 4$ m, $OB = 3$ m et $OC = 4$ m. Quels points reçoivent ces gouttes ?

A. A et C seulement

Juste.
Oui : A et C sont à 4 m de O, comme le bout du jet.

B. A, B et C

Faux.
Le point B est à 3 m de O. Il est plus près que le bout du jet.

C. B seulement

Faux.
B est trop près : il est à 3 m, et non à 4 m.

D. Aucun de ces points

Faux.
A et C sont à 4 m de O : les gouttes les atteignent.

Correction
Les gouttes tombent sur les points situés à 4 m de O. C'est le cas de A et de C. Ce n'est pas le cas de B, qui est à 3 m.

Rappel : au primaire, tu as tracé des cercles au compas. Tu piques la **pointe sèche** sur un point, et la mine tourne autour.

L'écart entre la pointe et la mine s'appelle l'**ouverture**. Il ne change pas pendant le tracé.

En clair : tous les points tracés par la mine sont à la même distance de la pointe sèche. Le point où tu piques s'appelle le **centre**. Cette distance commune s'appelle le **rayon**.

La définition du cercle

Définition : Le cercle

Soit O un point et r une longueur non nulle. Le **cercle** de **centre** O et de **rayon** r est formé de tous les points situés à la distance r du point O.

Autrement dit, pour un point M :

- si $OM = r$, le point M est **sur** le cercle ;

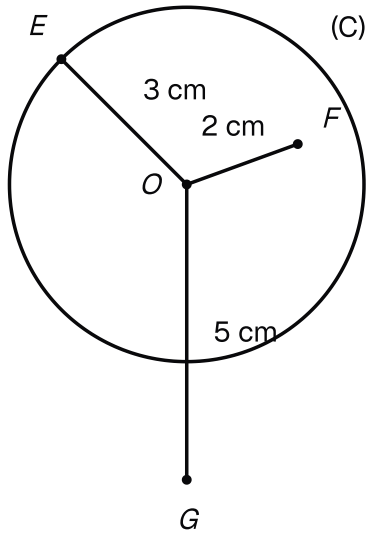
- si $OM < r$, le point M est **à l'intérieur** du cercle ;
- si $OM > r$, le point M est **à l'extérieur** du cercle.

Exemple : situer trois points

Le cercle $(\mathcal{C})$ a pour centre O et pour rayon 3 cm. On mesure $OE = 3$ cm, $OF = 2$ cm et $OG = 5$ cm.

- $OE = 3$ cm, la même longueur que le rayon : E est **sur** le cercle.
- $OF = 2$ cm et $2 < 3$: F est **à l'intérieur** du cercle.
- $OG = 5$ cm et $5 > 3$: G est **à l'extérieur** du cercle.

Pour justifier ces réponses, cite la **définition du cercle**.



Trois distances au centre comparées au rayon de 3 cm : E est sur le cercle (C), F à l'intérieur, G à l'extérieur.

Vérifie : Où est le point P ?

Le cercle $(\mathcal{C})$ a pour centre O et pour rayon 6 cm. Le point P est tel que $OP = 7$ cm. Où se trouve le point P ?

A. Sur le cercle

Faux.

Pour être sur le cercle, il faudrait $OP = 6$ cm. Ici, $OP = 7$ cm.

B. À l'intérieur du cercle

Faux.

À l'intérieur, on aurait $OP < 6$. Or 7 est plus grand que 6.

C. À l'extérieur du cercle

Juste.

Oui : $OP = 7$ cm et $7 > 6$. Le point P est plus loin du centre que le rayon.

Correction

On compare OP et le rayon : $OP = 7$ cm et $7 > 6$. D'après la définition du cercle, P est à l'extérieur du cercle $(\mathcal{C})$.

Le cercle et son centre

Attention aux mots : le **cercle** est seulement la ligne tracée par la mine. Un point à l'intérieur n'est pas un point du cercle. Il est dans la région entourée par le cercle.

Attention : le centre n'est pas sur le cercle

✗ « Le centre O fait partie du cercle. »

✓ Le centre O est à 0 cm de lui-même. Le rayon r, lui, n'est pas nul : $0 < r$.

La distance du centre à lui-même est donc plus petite que le rayon. Le centre se trouve **à l'intérieur** du cercle.

Deux distances à la fois

Une chèvre est attachée au piquet A par une longe de 4 m. Une autre est attachée au piquet B par une longe de 3 m. Les deux piquets sont à 5 m l'un de l'autre.

Les deux chèvres veulent se toucher le museau, longes tendues. Sur ton cahier, 1 cm représente 1 m. Où peuvent-elles se rejoindre ?

Vérifie : Le premier tracé

Tu cherches les points à 4 cm de A et à 3 cm de B, avec $AB = 5$ cm. Par quel tracé commences-tu pour trouver les points à 4 cm de A ?

A. Un segment de 4 cm partant de A, au hasard

Faux.

Ce segment donne un seul point, choisi au hasard. Il y a beaucoup d'autres points à 4 cm de A.

B. Le cercle de centre A et de rayon 4 cm

Juste.

Oui : d'après la définition du cercle, il contient tous les points à 4 cm de A.

C. Le cercle de centre B et de rayon 4 cm

Faux.

Ce cercle contient les points à 4 cm de B, pas de A.

D. Le segment $[AB]$, puis son milieu

Faux.

Le milieu de $[AB]$ est à $2{,}5$ cm de A, pas à 4 cm.

Correction

Les points à 4 cm de A forment le cercle de centre A et de rayon 4 cm. De même, les points à 3 cm de B forment le cercle de centre B et de rayon 3 cm. Les points cherchés sont sur les deux cercles à la fois.

Méthode : trouver un point dont on connaît les distances à deux points

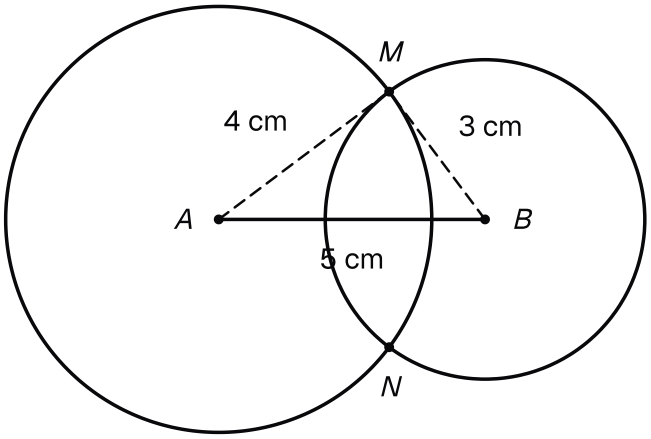
1. **Remplace** chaque distance par un cercle. « À 4 cm de A » devient : « sur le cercle de centre A, de rayon 4 cm ».
2. **Trace** ces deux cercles au compas, sur la même figure.
3. **Conclus** : les points où les deux cercles se croisent répondent à la question. Justifie avec la définition du cercle.

Exemple : le rendez-vous des chèvres

Trace un segment $[AB]$ de 5 cm. Ouvre le compas de 4 cm, pique en A et trace un cercle. Ouvre ensuite le compas de 3 cm, pique en B et trace un second cercle.

Les deux cercles se coupent en deux points, M et N, un de chaque côté de la droite (AB).

D'après la définition du cercle, $AM = AN = 4$ cm et $BM = BN = 3$ cm. Les chèvres peuvent se rejoindre en M ou en N.



Le rendez-vous des chèvres : le cercle de centre A et de rayon 4 cm croise celui de centre B et de rayon 3 cm en M et en N.

À toi : Deux distances données

Sur ton cahier, place deux points P et Q tels que $PQ = 6$ cm. Construis les points R tels que $PR = 5$ cm et $QR = 2$ cm. Combien en trouves-tu ?

Indice 1
Chaque distance donne un cercle.
Indice 2
Trace le cercle de centre P et de rayon 5 cm, puis le cercle de centre Q et de rayon 2 cm.
Indice 3
Point délicat : pique sur le bon centre avec la bonne ouverture. C'est 5 cm en P, et 2 cm en Q.

Réponse
Les deux cercles se coupent en deux points, un de chaque côté de (PQ). D'après la définition du cercle, chacun est à 5 cm de P et à 2 cm de Q.

Il y a donc **deux** points R possibles.

Rayon, corde et diamètre

Trois sortes de segments

Vérifie : Les rayons de la roue

Sur une roue de vélo, les fils de métal qui vont du centre de la roue jusqu'au bord s'appellent des **rayons**. Trace un cercle de centre O sur ton cahier, puis ces trois segments :

- $[DE]$: ses deux bouts D et E sont sur le cercle, et ce segment passe par O ;

- $[OA]$: son bout O est le centre, et son bout A est sur le cercle ;
- $[BC]$: ses deux bouts B et C sont sur le cercle, et ce segment ne passe pas par O.

Lequel de ces trois segments va du centre jusqu'au bord, comme un rayon de la roue ?

A. $[DE]$
Faux.
$[DE]$ passe par le centre, mais il va d'un bord du cercle à l'autre.

B. $[OA]$
Juste.
Oui : $[OA]$ part du centre O et s'arrête sur le cercle, en A.

C. $[BC]$
Faux.
$[BC]$ joint deux points du cercle sans passer par le centre.

Correction
Seul $[OA]$ part du centre et s'arrête sur le cercle. C'est donc un rayon.

Les deux autres segments ont leurs deux extrémités sur le cercle. Ils ont aussi un nom, que tu vas découvrir.

Rappel : au primaire, tu as rencontré les mots « rayon » et « diamètre ». Ici, on leur donne un sens précis. On ajoute un mot nouveau : la **corde**.

En maths, une corde est un segment dont les deux bouts sont sur le cercle. Ce n'est pas la longe de la chèvre !

Définition : Rayon, corde et diamètre

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon r.

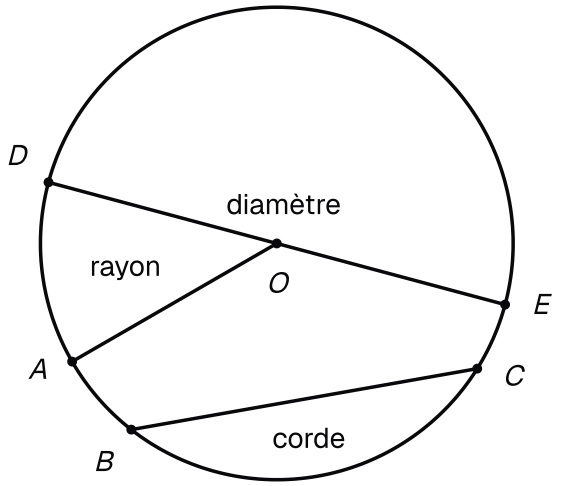
- Un **rayon** est un segment qui joint le centre O à un point du cercle. Sa longueur est r : le mot « rayon » désigne aussi cette longueur.
- Une **corde** est un segment dont les deux extrémités sont des points du cercle.
- Un **diamètre** est une corde qui passe par le centre O. Le mot « diamètre » désigne aussi la longueur de cette corde.

Exemple : nommer les segments

Reprends les trois segments de l'activité.

- $[OA]$ va du centre jusqu'au cercle : c'est un **rayon**.

- $[BC]$ a ses extrémités sur le cercle et ne passe pas par O : c'est une **corde**, mais pas un diamètre.
- $[DE]$ a ses extrémités sur le cercle et passe par O : c'est un **diamètre**. C'est aussi une corde.



Les trois segments de l'activité nommés sur le cercle de centre O : le rayon [OA], la corde [BC] et le diamètre [DE].

Combien mesure un diamètre ?

Devine : Deviner avant de mesurer

Trace un cercle de centre O et de rayon 4 cm, puis un diamètre $[AB]$. Avant de mesurer, devine : combien mesure AB ?

A. 4 cm

Faux.

4 cm est la longueur d'un seul rayon, de O à A.

B. 6 cm

Faux.

Aucune longueur de la figure ne donne 6 cm. Mesure pour vérifier.

C. 16 cm

Faux.

$16 = 4 \times 4$: on ne multiplie pas le rayon par lui-même.

D. 8 cm

Juste.

Oui : de A à O, puis de O à B, cela fait $4 + 4 = 8$ cm.

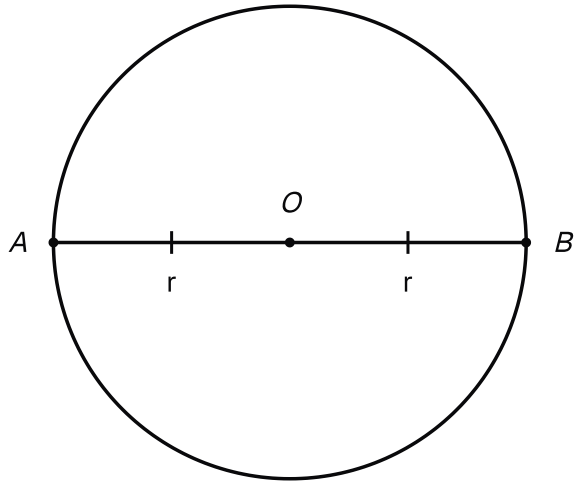
Correction
Le diamètre $[AB]$ passe par O. Il est fait du rayon $[AO]$ et du rayon $[OB]$, donc $AB = 4 + 4 = 8$ cm.

Ta mesure doit donner 8 cm.

Ta mesure donne 8 cm, le double du rayon. Pourquoi est-ce vrai pour tous les cercles ? Une mesure ne peut pas le dire : il faut une preuve.

Une **preuve** est une suite d'étapes courtes, et chaque étape donne sa raison. Elle montre qu'une propriété est vraie pour toutes les figures, sans rien mesurer.

La preuve de la propriété ci-dessous utilise la définition du cercle et celle du diamètre.



Un diamètre [AB] vu comme deux rayons de longueur r posés bout à bout, de part et d'autre du centre O.

La propriété du diamètre

Propriété : Longueur et milieu d'un diamètre

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon r. Si $[AB]$ est un diamètre de ce cercle, alors :

- le centre O est le **milieu** du segment $[AB]$;
- $AB = 2r$: le diamètre est le **double** du rayon.

Démonstration
Étape 1. Les points A et B sont sur le cercle. D'après la définition du cercle, $OA = r$ et $OB = r$.

Étape 2. Le diamètre $[AB]$ passe par le centre : le point O est sur le segment $[AB]$. Donc $AB = AO + OB = r + r = 2r$.

Étape 3. Le point O est sur le segment $[AB]$ et $OA = OB$. Donc O est le milieu de $[AB]$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On l'appelle la **propriété du diamètre**.

Un diamètre est fait de deux rayons, mis bout à bout de part et d'autre du centre. Chaque rayon mesure r, donc le diamètre mesure :

$$r + r = 2r$$

Le centre est à la même distance des deux bouts : c'est le milieu.

Vérifie : Une étape de la preuve

Dans la preuve, l'étape 2 écrit : « le point O est sur le segment $[AB]$ ». Quelle raison permet de l'écrire ?

A. Le diamètre $[AB]$ passe par le centre O.
Juste.
Oui : le diamètre passe par le centre, donc O est sur $[AB]$.

B. $OA = r$ et $OB = r$.
Faux.
Non : c'est vrai aussi pour une corde qui ne passe pas par O.

C. O est le milieu de $[AB]$.
Faux.
Non : c'est ce que la preuve cherche à montrer.

D. A et B sont deux points du cercle.
Faux.
Non : c'est vrai pour toute corde, même loin de O.

Correction
Le diamètre $[AB]$ passe par le centre : c'est sa définition. Le point O est donc sur le segment $[AB]$.

On peut alors ajouter les longueurs : $AB = AO + OB$.

Exemple : du rayon au diamètre, et retour

- Un cercle de rayon $2{,}5$ cm a pour diamètre $2 \times 2{,}5 = 5$ cm.
- Un cercle de diamètre 9 cm a pour rayon $9 \div 2 = 4{,}5$ cm.

- Une corde $[BC]$ qui ne passe pas par le centre n'est pas un diamètre. La propriété ne dit alors rien de sa longueur.

Attention : une corde n'est pas toujours un diamètre

✗ « $[BC]$ est une corde du cercle de rayon r, donc $BC = 2r$. »

✓ Un diamètre est une corde particulière : celle qui passe par le centre. Une autre corde n'a pas forcément cette longueur.

Avant d'écrire $BC = 2r$, vérifie que $[BC]$ passe par le centre.

Tracer un cercle

Méthode : tracer un cercle

1. **Cherche** le centre et le rayon. Avec un diamètre $[AB]$ connu, le centre est le milieu de $[AB]$ et le rayon vaut la moitié de AB.
2. **Règle** l'ouverture du compas sur la règle graduée : elle doit valoir le rayon.
3. **Plante** la pointe sèche au centre, puis fais tourner la mine sans toucher à l'ouverture.

Exemple : un cercle dont on connaît un diamètre

Trace un segment $[AB]$ de 6 cm. Le rayon est la moitié : $6 \div 2 = 3$ cm.

Place le point I sur $[AB]$, à 3 cm de A : c'est le milieu de $[AB]$.

Ouvre le compas de 3 cm, pique en I et trace le cercle. Il passe par A et par B : $[AB]$ en est un diamètre.

Attention : rayon ou diamètre ?

✗ « Pour un cercle de diamètre 10 cm, j'ouvre le compas de 10 cm. »

✓ L'ouverture du compas est le **rayon**. Pour un diamètre de 10 cm, ouvre le compas de $10 \div 2 = 5$ cm.

Avec 10 cm, le diamètre serait de 20 cm : le cercle serait deux fois trop grand.

À toi : Un cercle de diamètre donné

Sur ton cahier, trace un segment $[EF]$ de 7 cm. Trace ensuite le cercle dont $[EF]$ est un diamètre.

Quel est son rayon, et où piques-tu le compas ?

Indice 1
Pense à la propriété du diamètre : le centre est son milieu.
Indice 2
Calcule la moitié de 7 cm, puis place le milieu de $[EF]$ à la règle.
Indice 3
Point délicat : l'ouverture du compas est le rayon, pas le diamètre.

Réponse
Le rayon est $7 \div 2 = 3{,}5$ cm.

Place le milieu O de $[EF]$, à $3{,}5$ cm de E. Ouvre le compas de $3{,}5$ cm, pique en O et trace.

Le cercle passe par E et par F : $[EF]$ en est un diamètre.

La médiatrice d'une corde

Le pliage

Devine : Plier un disque de papier

Trace un cercle au compas sur une feuille. Le petit trou laissé par la pointe sèche marque le centre O. Découpe ensuite le rond : c'est un **disque** de papier.

Trace une corde $[AB]$ qui ne passe pas par O, puis plie le disque pour que A vienne exactement sur B. Par où passe le pli ?

A. Par le centre O
Juste.
Oui : le pli passe par le trou de la pointe sèche. Refais l'essai avec une autre corde.

B. Par le point A
Faux.
Le pli amène A sur B. S'il passait par A, le point A resterait en place.

C. Par O seulement si $[AB]$ est un diamètre
Faux.
Ta corde ne passe pas par O, et le pli passe quand même par le trou.

D. Par le milieu de $[OA]$
Faux.
Le milieu de $[OA]$ ne joue aucun rôle ici. Fais le pliage pour le constater.

Correction
Rouvre le disque : le pli est une droite.

> Regarde où se trouve le trou de la pointe sèche : il est sur le pli, quelle que soit la corde. Le pli passe donc par le centre O.

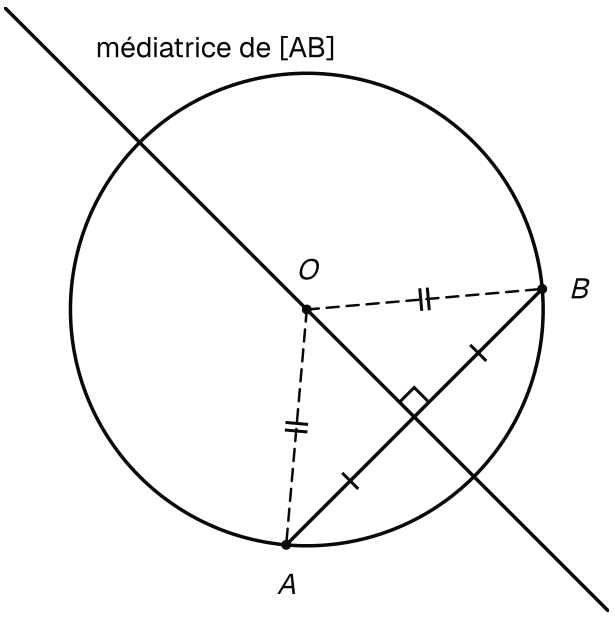
Rappel : la **médiatrice** de $[AB]$ coupe ce segment en son milieu, à angle droit. Pour la construire, place le milieu de $[AB]$ avec la règle graduée. Trace ensuite à l'équerre la perpendiculaire à (AB) qui passe par ce milieu.

Deux choses sont vraies. Tout point de la médiatrice est aussi loin de A que de B. Tout point aussi loin de A que de B est sur la médiatrice.

On l'appelle la **propriété de la médiatrice d'un segment**.

Le pli fait tomber A exactement sur B : c'est la médiatrice de $[AB]$. Et ce pli passe toujours par le centre du disque.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve tient en deux étapes, sous la propriété.



Le pli du disque : la médiatrice de la corde [AB] traverse le centre O, qui est à égale distance de A et de B.

La médiatrice passe par le centre

Propriété : La médiatrice d'une corde passe par le centre

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O. Si $[AB]$ est une corde de ce cercle, alors la **médiatrice** du segment $[AB]$ passe par le centre O.

Démonstration

Étape 1. Les points A et B sont sur le cercle. D'après la définition du cercle, $OA = r$ et $OB = r$, où r est le rayon. Donc $OA = OB$.

Étape 2. Le point O est à la même distance de A et de B. D'après la propriété caractéristique de la médiatrice, le point O est sur la médiatrice du segment $[AB]$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On l'appelle la **propriété de la médiatrice d'une corde**.

Le centre est à la même distance des deux extrémités d'une corde, car ce sont deux points du cercle. Or un point situé à la même distance des deux bouts d'un segment se trouve sur sa médiatrice.

Vérifie : La raison de l'étape 1

Dans la preuve, l'étape 1 se termine par : « Donc $OA = OB$. » Quelle raison donne-t-elle ?

A. O est le milieu de $[AB]$.

Faux.
Non : O n'est le milieu de $[AB]$ que pour un diamètre.

B. La médiatrice de $[AB]$ passe par O.

Faux.
Non : c'est ce que la preuve cherche à montrer.

C. A et B sont sur le cercle, donc $OA = r$ et $OB = r$.

Juste.
Oui : c'est la définition du cercle, pour A puis pour B.

D. La droite (AB) passe par le centre O.

Faux.
Non : la corde ne passe pas forcément par O.

Correction
La preuve s'appuie sur la définition du cercle. Les points A et B sont sur le cercle de rayon r, donc $OA = r$ et $OB = r$.

Ainsi, $OA = OB$.

Exemple : une corde et sa médiatrice

Trace un cercle de centre O et de rayon 5 cm, puis une corde $[AB]$ de 6 cm. Place son milieu I : $AI = IB = 6 \div 2 = 3$ cm.

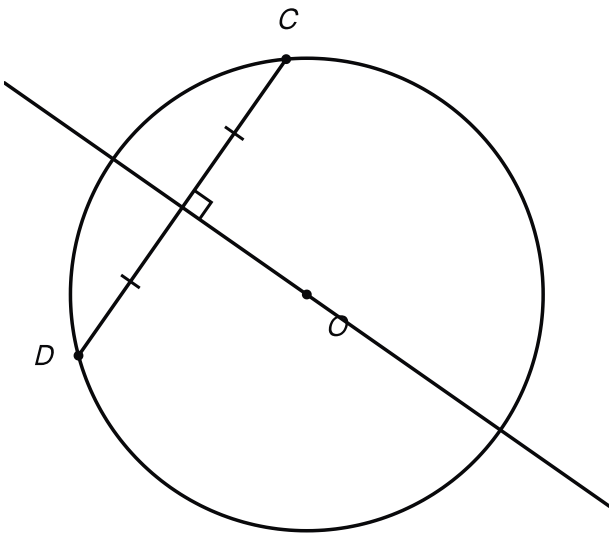
La médiatrice de $[AB]$ passe par I. D'après la propriété de la médiatrice d'une corde, elle passe aussi par O : vérifie-le sur ta figure.

Il faut que A et B soient sur le cercle. Sinon, on n'aurait plus $OA = OB$, et rien ne dirait que la médiatrice passe par O.

Une perpendiculaire qui passe par le centre

Sur ton cercle, trace une corde $[CD]$. Trace ensuite à l'équerre la droite qui passe par O et qui est perpendiculaire à (CD). Mesure : elle semble couper $[CD]$ en son milieu.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve, sous la propriété, utilise la propriété de la médiatrice d'une corde.



La perpendiculaire à (CD) menée par le centre O tombe sur la corde [CD] en son milieu.

Propriété : Droite perpendiculaire à une corde et passant par le centre

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et $[AB]$ une corde de ce cercle. Si une droite (d) passe par O et est perpendiculaire à la droite (AB), alors (d) est la **médiatrice** de la corde $[AB]$. En particulier, (d) coupe la corde $[AB]$ en son **milieu**.

Démonstration

Étape 1. D'après la propriété de la médiatrice d'une corde, la médiatrice de $[AB]$ passe par le centre O. Par définition de la médiatrice, elle est perpendiculaire à (AB).

Étape 2. La droite (d) et la médiatrice de $[AB]$ passent toutes les deux par O, et elles sont toutes les deux perpendiculaires à (AB). Or, par un point donné, il passe une seule droite perpendiculaire à une droite donnée. Donc (d) est la médiatrice de $[AB]$.

Étape 3. Par définition, la médiatrice de $[AB]$ passe par le milieu de $[AB]$. Donc (d) coupe la corde $[AB]$ en son milieu.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On l'appelle la **propriété de la perpendiculaire à une corde**.

Rappel : par un point, il passe une seule perpendiculaire à une droite.

Ici, la droite (d) et la médiatrice de la corde passent par O, et elles sont perpendiculaires à la même droite : ce sont donc la même droite.

Vérifie : Le point de l'étape 2

Dans la preuve, l'étape 2 dit que par un point « il passe une seule droite perpendiculaire » à une droite donnée. Ici, quel est ce point ?

A. Le milieu de $[AB]$

Faux.
Non : que (d) passe par le milieu, c'est ce que la preuve cherche à montrer.

B. Le centre O

Juste.
Oui : (d) et la médiatrice passent toutes les deux par O.

C. Le point A

Faux.
Non : la droite (d) ne passe pas forcément par A.

D. Un point du cercle pris au hasard

Faux.
Non : le point doit être sur les deux droites.

Correction
La droite (d) et la médiatrice de $[AB]$ passent par O et sont perpendiculaires à (AB). Par O, il n'y a qu'une perpendiculaire à (AB). Les deux droites sont donc la même droite.

Exemple : le milieu d'une corde à l'équerre

Trace un cercle de centre O et de rayon 5 cm, puis une corde $[CD]$ de 8 cm. Trace à l'équerre la droite (d) qui passe par O, avec $(d) \perp (CD)$; elle coupe $[CD]$ en H.

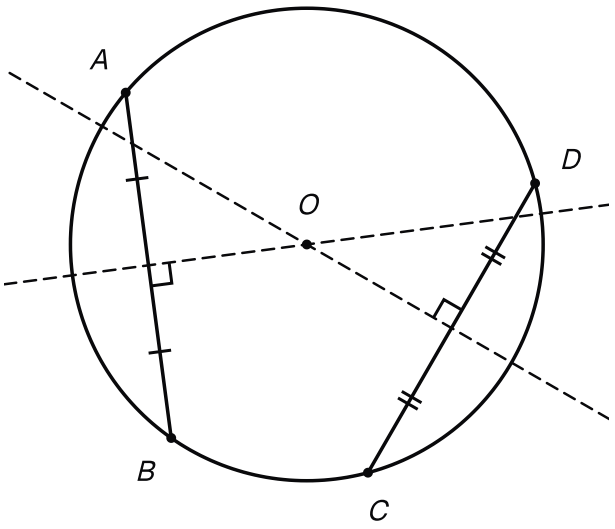
D'après la propriété de la perpendiculaire à une corde, H est le milieu de $[CD]$:
$CH = HD = 8 \div 2 = 4$ cm.

Le passage par O compte : la perpendiculaire à (CD) qui passe par C coupe $[CD]$ en C, pas en son milieu.

Retrouver le centre

Méthode : retrouver le centre d'un cercle

1. **Trace** deux cordes du cercle, choisies non parallèles.
2. **Construis** leurs deux médiatrices.
3. **Conclus** : le centre est le point où les deux médiatrices se croisent. La raison est la propriété de la médiatrice d'une corde : chacune passe par le centre.



Deux cordes non parallèles, [AB] et [CD], et leurs médiatrices : elles se croisent au centre O du cercle.

Attention : deux cordes parallèles ne suffisent pas

✗ Chercher le centre avec deux cordes parallèles.

✓ Avec deux cordes parallèles, on n'obtient qu'une seule droite. Chaque médiatrice passe par O, et elle est perpendiculaire à sa corde, donc aussi à l'autre corde, qui lui est parallèle.

Or par O, il ne passe qu'une perpendiculaire à une droite : les deux médiatrices sont la même droite.

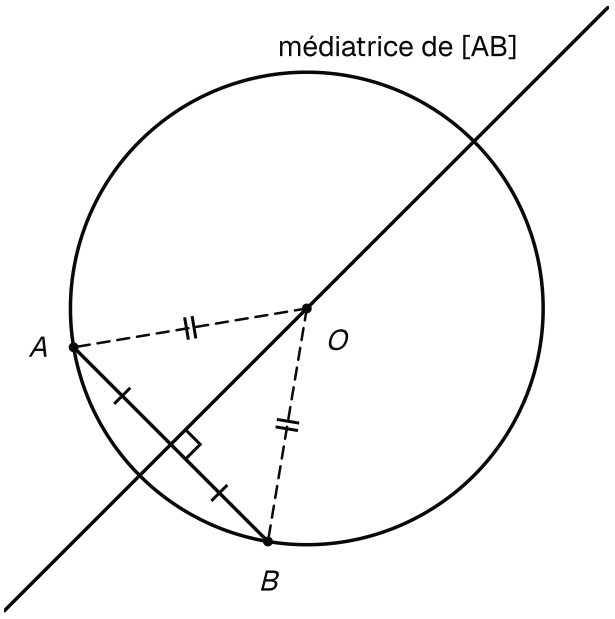
Cette droite contient bien le centre, mais rien n'indique où il se trouve sur elle. Il faut deux cordes **non parallèles** : leurs médiatrices se croisent alors au centre.

Un cercle qui passe par deux points

Méthode : tracer un cercle qui passe par deux points

1. **Construis** la médiatrice de $[AB]$.

2. **Choisis** un point O où tu veux sur cette médiatrice.
3. **Trace** le cercle de centre O qui passe par A. D'après la propriété de la médiatrice d'un segment, $OB = OA$: ce cercle passe aussi par B.



Un point O choisi sur la médiatrice de [AB] : le cercle de centre O qui passe par A passe aussi par B.

À toi : Le morceau d'assiette

Tu as trouvé un morceau d'assiette ronde. Tu veux retrouver le centre de l'assiette entière. Sur le bord du morceau, tu marques trois points A, B et C. Que traces-tu, et où est le centre ?

Indice 1
Les segments $[AB]$ et $[BC]$ sont deux cordes du bord de l'assiette.
Indice 2
Construis la médiatrice de $[AB]$, puis celle de $[BC]$.
Indice 3
Point délicat : les deux cordes ne doivent pas être parallèles. Ici, les droites (AB) et (BC) sont deux droites différentes qui se coupent en B : les cordes ne sont pas parallèles.

Réponse
Trace les médiatrices de $[AB]$ et de $[BC]$. D'après la propriété de la médiatrice d'une corde, chacune passe par le centre de l'assiette. Le centre est donc leur point commun.

Rappel : tu connais le cercle circonscrit au triangle ABC. Il passe par A, B et C, et son centre est le point de rencontre des médiatrices des côtés.

Le centre de l'assiette est donc le centre de ce cercle.

La tangente en un point

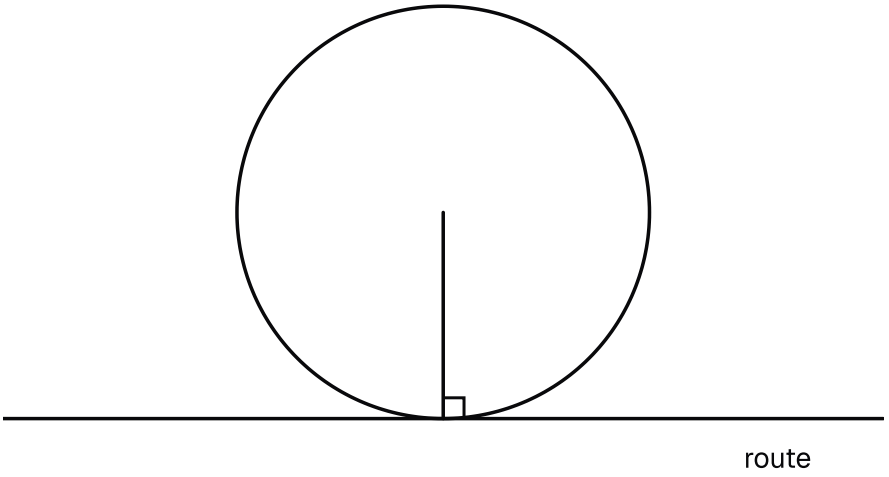
Une droite qui touche le cercle

> **Devine : La roue sur la route**
>
> Une roue de vélo est posée sur une route plate. Regarde-la de côté : le bord de la roue dessine un cercle, et la route une droite. Combien de points communs ont ce cercle et cette droite ?
>
> **A.** Aucun
>
> **Faux.**
> La roue repose sur la route : elle la touche au moins en un point.
>
> **B.** Deux
>
> **Faux.**
> Avec deux points communs, la route entrerait dans la roue.
>
> **C.** Une infinité
>
> **Faux.**
> Le bord de la roue est arrondi : il quitte la route juste après le point de contact.
>
> **D.** Un seul
>
> **Juste.**
> Oui : la roue touche la route en un seul point, juste sous le centre de la roue.
>
> **Correction**
> La roue touche la route en un seul point, le point de contact. Partout ailleurs, le bord de la roue est au-dessus de la route.

Le point de contact est juste sous le **moyeu**, le centre de la roue. Le rayon qui va du moyeu à ce point est vertical, et la route est horizontale. Ils forment donc un angle droit.

Une droite qui touche un cercle de cette façon, comme la route touche la roue, s'appelle une **tangente**.

Attention : en maths, la définition ci-dessous se sert de l'angle droit. Le fait qu'il n'y ait qu'un seul point commun viendra ensuite, avec une preuve.



La roue vue de côté : la route touche le cercle en un seul point, juste sous le moyeu, et le rayon vertical y fait un angle droit avec elle.

Rappel : par un point d'une droite, il passe une seule perpendiculaire à cette droite. Tu la traces avec l'équerre, en plaçant l'angle droit sur ce point.

Définition : Tangente à un cercle en un point

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et A un point de ce cercle. La **tangente** au cercle $(\mathcal{C})$ au point A est la droite qui passe par A et qui est **perpendiculaire** à la droite (OA).

Exemple : reconnaître la tangente

Trace un cercle de centre O et place un point A sur ce cercle. Trace trois droites qui passent par A.

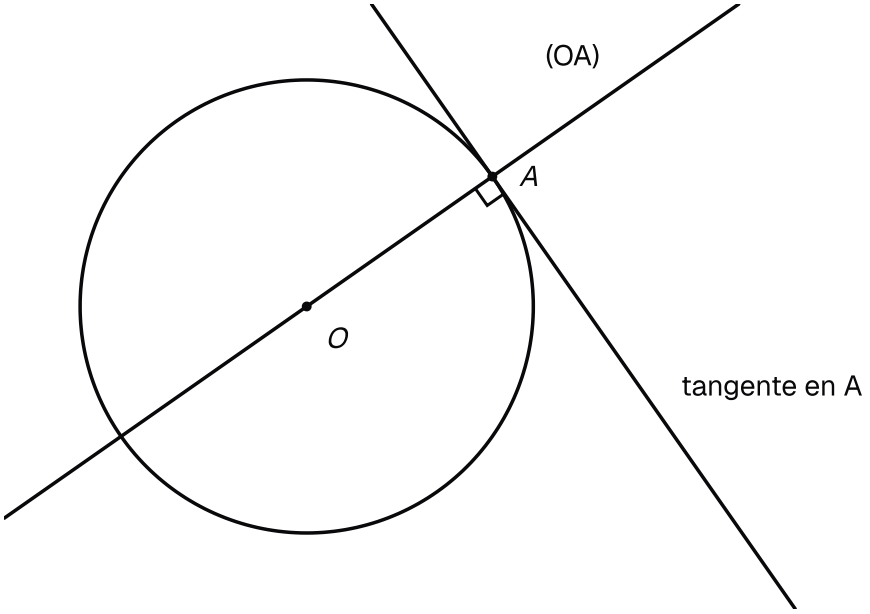
- (d) est perpendiculaire à (OA) : d'après la définition de la tangente, c'est la tangente au cercle en A.
- (d') passe aussi par O : c'est la droite (OA) elle-même, pas une tangente.
- (d'') n'est pas perpendiculaire à (OA) : ce n'est pas la tangente. Regarde ta figure : (d'') coupe le cercle une deuxième fois, en un point autre que A.

Construire une tangente

Méthode : construire la tangente en un point

1. **Relie** le centre O au point A du cercle par la droite (OA).

2. **Pose** l'équerre : un côté de l'angle droit sur (OA), le sommet en A. Trace la droite le long de l'autre côté.
3. **Justifie** : cette droite passe par A et elle est perpendiculaire à (OA). D'après la définition de la tangente, c'est la tangente en A.



La tangente en A tracée à l'équerre : elle passe par A et coupe la droite (OA) à angle droit.

Trouve l'erreur : Le tracé de Sara

Sara veut la tangente au cercle de centre O au point A. Elle trace la droite (OA). Puis elle trace la perpendiculaire à (OA) qui passe par le milieu de $[OA]$. Qu'en penses-tu ?

A. C'est bien la tangente en A.

Faux.
La tangente en A doit passer par A. La droite de Sara passe par le milieu de $[OA]$.

B. Ce n'est pas la tangente : sa droite ne passe pas par A.

Juste.
Oui : la perpendiculaire doit être tracée au point A, pas ailleurs.

C. Ce n'est pas la tangente : il fallait une parallèle à (OA).

Faux.
La parallèle à (OA) qui passe par A est la droite (OA) elle-même.

D. C'est la tangente, car elle est perpendiculaire à (OA).

Faux.
Être perpendiculaire à (OA) ne suffit pas : il faut aussi passer par A.

Correction

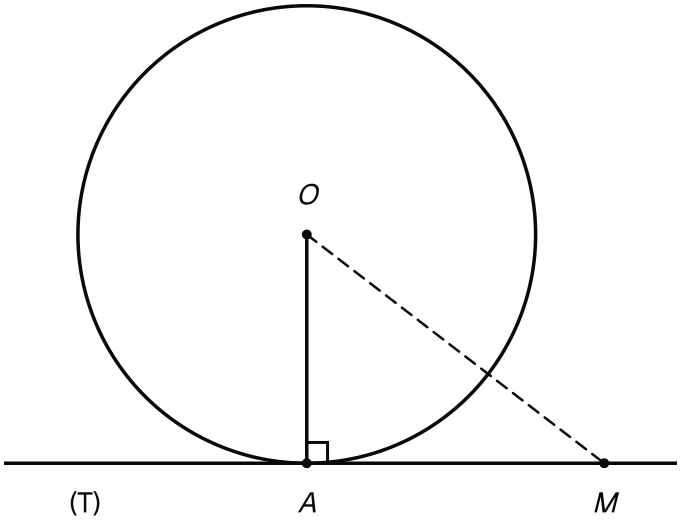
D'après la définition de la tangente, la tangente en A passe par A et est perpendiculaire à (OA).

La droite de Sara est perpendiculaire à (OA), mais elle passe par le milieu de $[OA]$. Ce n'est donc pas la tangente en A.

Un seul point commun

La roue ne touche la route qu'en un point. Pourquoi est-ce vrai pour toute tangente ? La preuve, sous la propriété, s'appuie sur un rappel.

Rappel : pour aller d'un point à une droite, le chemin le plus court arrive sur la droite à angle droit. Son point d'arrivée s'appelle le **pied** de la perpendiculaire. Tous les autres points de la droite sont plus loin.



A est le pied de la perpendiculaire menée de O à la tangente (T) ; le point M de (T) est plus loin de O, hors du cercle.

Propriété : La tangente n'a qu'un point commun avec le cercle

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon r, et A un point de ce cercle. La tangente (T) au cercle au point A n'a qu'**un seul point commun** avec le cercle : le point A. Tous les autres points de (T) sont **à l'extérieur** du cercle.

Démonstration

Étape 1. La droite (T) passe par A et elle est perpendiculaire à (OA). Donc la droite (OA) est la perpendiculaire à (T) qui passe par O. Elle coupe (T) en A, appelé le **pied** de cette perpendiculaire. La distance du point O à la droite (T) est donc OA, c'est-à-dire r.

Étape 2. Soit M un point de (T) autre que A. La distance d'un point à une droite est la plus courte des distances de ce point aux points de la droite, et elle n'est obtenue qu'au pied de la perpendiculaire. Donc $OM > OA$, c'est-à-dire $OM > r$.

Étape 3. D'après la définition du cercle, le point M est à l'extérieur du cercle. Le seul point commun à (T) et au cercle est donc le point A.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On l'appelle la **propriété de la tangente**.

La droite (OA) arrive à angle droit sur la tangente, au point A : A est donc le pied de la perpendiculaire. Le point de la tangente le plus proche de O est A.

Tout autre point de la tangente est plus loin de O que A : il est à l'extérieur du cercle.

Vérifie : L'argument de l'étape 2

Dans la preuve, l'étape 2 prend un point M de (T), autre que A. Elle conclut : « Donc $OM > OA$ ». Quel argument permet cette conclusion ?

A. M est à l'extérieur du cercle, d'après la définition du cercle.
Faux.
Non : c'est ce que la preuve cherche à montrer.

B. $OM = r$, car M est un point de la tangente (T).
Faux.
Non : M est sur la tangente, pas sur le cercle.

C. La droite (T) passe par le centre O du cercle.
Faux.
Non : la tangente passe par A, pas par O.

D. A est le pied de la perpendiculaire : le point de (T) le plus proche de O.
Juste.
Oui : tout autre point M de (T) est donc plus loin de O que A.

Correction
À l'étape 1, (OA) est la perpendiculaire à (T) qui passe par O, et A en est le pied.

Le chemin le plus court de O jusqu'à (T) arrive donc en A. Ainsi, pour tout autre point M de (T), on a $OM > OA$.

Exemple : un point de la tangente

Trace un cercle de centre O et de rayon 3 cm, place un point A du cercle, puis la tangente (T) en A. Sur (T), place le point M à 4 cm de A.

Mesure : $OM = 5$ cm. Comme $5 > 3$, M est à l'extérieur du cercle, comme l'annonce la propriété de la tangente.

L'angle droit compte. Trace une autre droite qui passe par A, sans angle droit avec (OA). Sur ta figure, elle coupe le cercle en un deuxième point : ce n'est pas une tangente.

À toi de construire

Attention : la tangente se trace au point de contact

✗ Tracer une perpendiculaire à (OA) qui ne passe pas par A.

✓ L'angle droit de la tangente se place **au point** A lui-même.

Une droite qui traverse le cercle en deux points n'en est jamais une tangente.

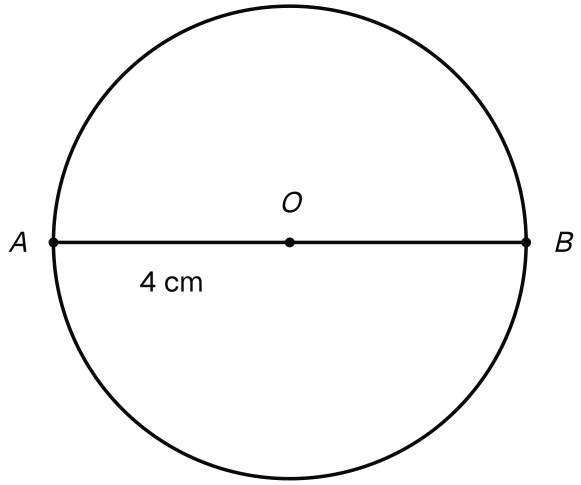
À toi : Deux tangentes

Trace un cercle de centre O et de rayon 4 cm, et un diamètre $[AB]$. Construis la tangente (T) en A et la tangente (T') en B.

1. Combien mesure AB ?
2. Que remarques-tu sur (T) et (T') ?

Indice 1
La tangente en un point est perpendiculaire au rayon qui arrive en ce point.
Indice 2
Les droites (OA) et (OB) sont toutes les deux la droite (AB), car $[AB]$ passe par O.
Indice 3
Point délicat : deux droites perpendiculaires à une même droite sont **parallèles**. Or (T) et (T') sont toutes les deux perpendiculaires à (AB).

Réponse
1. D'après la propriété du diamètre, $AB = 2 \times 4 = 8$ cm.
2. Le diamètre $[AB]$ passe par O, donc les droites (OA) et (OB) sont la droite (AB). D'après la définition de la tangente, $(T) \perp (AB)$ et $(T') \perp (AB)$. Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles : $(T) \parallel (T')$.



Les données de l'activité : le cercle de centre O, de rayon 4 cm, et son diamètre [AB] ; les tangentes restent à construire.

Construire et justifier

Vérifie : La bonne justification

Kenza a tracé le cercle de centre A et de rayon 5 cm. Le point M est sur ce cercle. Quelle phrase justifie que $AM = 5$ cm ?

A. D'après la définition du cercle, $AM = 5$ cm.

Juste.

Oui : la définition du cercle donne directement $AM = 5$ cm, la longueur du rayon.

B. On mesure AM sur la figure, et on trouve 5 cm.

Faux.

Une mesure n'est pas une justification : le tracé peut être imprécis.

C. D'après la propriété de la médiatrice d'une corde, $AM = 5$ cm.

Faux.

Aucune corde ni médiatrice n'intervient ici.

D. $AM = 5$ cm, car M est à l'intérieur du cercle.

Faux.

Un point à l'intérieur serait à moins de 5 cm de A. Or M est sur le cercle.

Correction

« M est un point du cercle de centre A et de rayon 5 cm. D'après la définition du cercle, $AM = 5$ cm. »

Une construction est juste quand chaque tracé a une raison. Justifier, c'est écrire cette raison en une phrase, avec le nom de la définition ou de la propriété.

Une mesure ne suffit pas, car le tracé peut être imprécis.

Méthode : justifier une construction

1. **Nomme** les tracés faits : cercles, médiatrices, perpendiculaires, et les points obtenus.
2. **Cite** la raison par son nom : « D'après la définition de la tangente… », « D'après la propriété de la médiatrice d'une corde… ».
3. **Conclus** par une phrase qui répond exactement à la question.

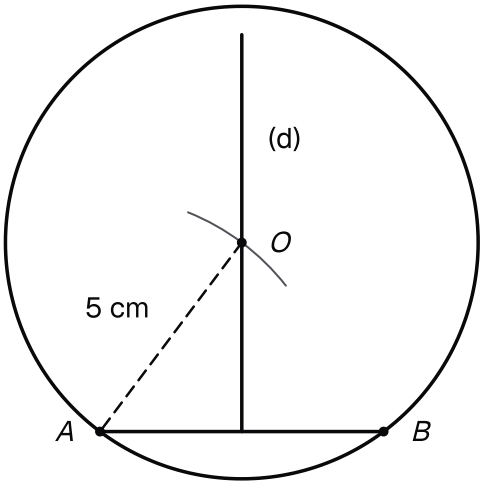
Exemple : un cercle de rayon donné par deux points

Énoncé. Le segment $[AB]$ mesure 6 cm. Construis un cercle de rayon 5 cm qui passe par A et par B.

Construction. Trace $[AB]$, puis sa médiatrice (d).

Ouvre le compas de 5 cm, pique en A et trace un morceau de cercle, appelé **arc**. Il coupe (d) en deux points : appelle O l'un d'eux.

Trace le cercle de centre O et de rayon 5 cm. Il reste à justifier que ce cercle passe par A et par B.



La construction de l'exemple : la médiatrice (d) de [AB], l'arc de rayon 5 cm piqué en A qui la coupe en O, puis le cercle de centre O.

Vérifie : Pourquoi le cercle passe par B

Dans l'exemple, pourquoi le cercle de centre O et de rayon 5 cm passe-t-il par B ?

A. Car O est le milieu du segment $[AB]$, donc $OB = 3$ cm.

Faux.

O n'est pas sur $[AB]$: $OA = 5$ cm, alors que la moitié de AB vaut 3 cm.

B. Car $[AB]$ est un diamètre de ce cercle, donc $AB = 10$ cm.

Faux.

$AB = 6$ cm, et non 10 cm : $[AB]$ n'est pas un diamètre de ce cercle.

C. Car O est sur la médiatrice de $[AB]$, donc $OB = OA = 5$ cm.

Juste.

Oui : la propriété de la médiatrice d'un segment donne $OB = OA$, et $OA = 5$ cm.

D. Car on a tracé ce cercle avec le compas ouvert de 5 cm.

Faux.

L'ouverture donne le rayon, mais ne dit pas que B est à 5 cm de O.

Correction

O est sur la médiatrice de $[AB]$. D'après la propriété de la médiatrice d'un segment, $OB = OA$.

Or O est sur l'arc de centre A et de rayon 5 cm, donc $OA = 5$ cm. Ainsi $OB = 5$ cm.

Le cercle de centre O et de rayon 5 cm passe donc par A et par B, d'après la définition du cercle.

Remarque **: Coin devoir : retrouver le centre d'un cercle**

En devoir, on te demande de retrouver le centre d'un cercle et de justifier. Voici une rédaction modèle.

« Je trace deux cordes non parallèles $[AB]$ et $[CD]$, puis leurs médiatrices, qui se coupent en O. D'après la propriété de la médiatrice d'une corde, chaque médiatrice passe par le centre du cercle. Le centre est donc leur point commun, le point O. »

À toi : Construire et justifier

Sur ton cahier, trace un cercle de centre O et de rayon 3 cm, et place un point A du cercle. Construis la tangente (T) en A. Rédige ensuite la justification en une phrase.

Indice 1

Commence par la droite (OA), puis utilise l'équerre.

Indice 2

Écris ce que tu as tracé : (T) passe par A et $(T) \perp (OA)$.

Indice 3

Point délicat : cite la définition de la tangente, et non la propriété de la médiatrice d'une corde.

Réponse

> « La droite (T) passe par A et elle est perpendiculaire à (OA). D'après la définition de la tangente, (T) est la tangente au cercle en A. »

Tu sais maintenant construire au compas, à la règle et à l'équerre. Surtout, tu sais dire pourquoi ta construction est juste. C'est ce que l'on attend de toi en devoir.

Synthèse

> **À retenir : Ce qu'il faut retenir du chapitre**
>
> - Un point est sur le cercle de centre O et de rayon r quand sa distance à O vaut r. Plus près, il est à l'intérieur ; plus loin, à l'extérieur.
> - Un diamètre mesure le double du rayon, et son milieu est le centre.
> - La médiatrice d'une corde passe par le centre. Les médiatrices de deux cordes non parallèles se coupent au centre.
> - La tangente en A est perpendiculaire au rayon $[OA]$, au point A. Elle ne touche le cercle qu'en A.

Ce que tu sais faire :

- dire si un point est sur un cercle, à l'intérieur ou à l'extérieur, grâce à sa distance au centre ;
- trouver le diamètre quand tu connais le rayon, et l'inverse ;
- retrouver le centre perdu d'un cercle, et faire passer un cercle par deux points donnés ;
- construire la tangente en un point, et expliquer chaque tracé par une phrase.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Le cercle » (1ac · general · mathematiques)