BURHAN

Les équations : Résumé

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/equations/resume

Chapitre	Semestre
Les équations	Semestre 2

Équation, inconnue et membres

Ce Résumé tient l'essentiel du chapitre en quelques pages. Relis-le avant un devoir.

Refais ensuite chaque exemple sur une feuille, sans regarder la rédaction.

Définition : Équation et inconnue

Une **équation** est une égalité dans laquelle une lettre désigne un nombre que l'on ne connaît pas. Cette lettre s'appelle l'**inconnue**.

Par exemple, $3x + 2 = 14$ est une équation d'inconnue x. Ce qui est écrit à gauche du signe $=$ est le **premier membre** : ici $3x + 2$. Ce qui est écrit à droite est le **second membre** : ici 14.

Dans ce chapitre, l'inconnue n'est jamais multipliée par elle-même : ces équations sont des **équations du premier degré à une inconnue**.

Exemple : Repérer les deux membres

Dans l'équation $8x - 3 = 29$, l'inconnue est x.

Le premier membre est $8x - 3$. Le second membre est 29.

L'inconnue peut aussi être à droite : dans $40 = 7 + 3y$, l'inconnue est y, le premier membre est 40 et le second membre est $7 + 3y$.

Remarque : Ce qui n'est pas une équation

Une égalité sans lettre n'est pas une équation : $9 \times 4 - 6 = 30$ est un simple calcul, juste ici.

Une écriture sans signe $=$, comme $2x + 1$, n'en est pas une non plus : c'est une expression.

Solution et vérification

Définition : Solution d'une équation

Un nombre est une **solution** d'une équation lorsque l'égalité est vraie quand on remplace l'inconnue par ce nombre.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes ses solutions.

Par exemple, 4 est une solution de l'équation $3x + 2 = 14$, car $3 \times 4 + 2 = 14$. Le nombre 5 n'est pas une solution, car $3 \times 5 + 2 = 17$, et 17 n'est pas égal à 14.

Méthode : Tester un nombre

1. **Je remplace** l'inconnue par le nombre, partout où elle figure.
2. **Je calcule** chaque membre à part, sans relier les deux calculs par un signe $=$.
3. **Je compare** : résultats égaux, le nombre est solution ; résultats différents, il ne l'est pas.

Exemple : Tester deux nombres

Équation : $6x - 5 = 4x + 9$.

Avec 7 : à gauche, $6 \times 7 - 5 = 37$; à droite, $4 \times 7 + 9 = 37$. Les deux membres valent 37, donc 7 est une solution.

Avec 2 : à gauche, $6 \times 2 - 5 = 7$; à droite, $4 \times 2 + 9 = 17$. Comme $7 \neq 17$, le nombre 2 n'est pas une solution.

À retenir : Conclure par une phrase

Une résolution se termine par une phrase complète, de la forme « La solution de l'équation est … ».

Écris cette phrase après la vérification, jamais avant.

Remarque : Une seule solution dans ce chapitre

Chaque équation du chapitre a exactement une solution. Ce nombre relatif peut être entier, décimal, ou s'écrire comme une fraction simplifiée.

Les deux propriétés des égalités

Une équation est une égalité. Si une égalité est vraie et que tu fais la même opération sur ses deux membres, elle reste vraie. Seule exception : on ne divise jamais par 0.

Les deux propriétés suivantes disent quelles opérations sont permises.

Exemple : si $x + 3 = 10$, alors $x + 3 + 5 = 10 + 5$. Les deux membres restent égaux.

Propriété : Ajouter ou retrancher un même nombre

Soit a, b et c trois nombres. Si $a = b$, alors :

$$a + c = b + c$$
$$a - c = b - c$$

On admet aussi que, quand on **ajoute** un même nombre aux deux membres d'une équation, ou quand on **retranche** un même nombre aux deux membres, on obtient une équation qui a **les mêmes solutions**.

Propriété : Multiplier ou diviser par un même nombre non nul

Soit a, b et c trois nombres, avec c **non nul**. Si $a = b$, alors :

$$a \times c = b \times c$$
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

On admet aussi que, quand on **multiplie** ou quand on **divise** les deux membres d'une équation par un même nombre **non nul**, on obtient une équation qui a **les mêmes solutions**.

Remarque : Deux résultats admis

Ces deux propriétés sont admises : on s'en sert sans les démontrer. Une limite à garder en tête : on ne divise jamais par 0.

Attention : Rien ne change de côté tout seul

Dans $x + 8 = 3$, écrire $x = 3 + 8$ est faux : $11 + 8 = 19$, et non 3.

Le bon geste est de retrancher 8 aux deux membres. On obtient $x = 3 - 8 = -5$, et $-5 + 8 = 3$.

Résoudre en une étape

Méthode : Résoudre x + a = b ou x − a = b

1. **Je repère** le nombre collé à l'inconnue par un signe $+$ ou un signe $-$.
2. **Je fais l'opération contraire** sur les deux membres : je retranche ce qui est ajouté, j'ajoute ce qui est retranché.
3. **Je lis** la valeur de x, je vérifie, puis j'écris la phrase de conclusion.

Exemple : Un nombre ajouté à l'inconnue

$x + 13 = 4$.

Je retranche 13 aux deux membres, puis je réduis :

$$x + 13 - 13 = 4 - 13$$
$$x = -9$$

Vérification : $-9 + 13 = 4$.

La solution de l'équation est -9.

Exemple : Un nombre retranché à l'inconnue

$x - 2{,}6 = 5$.

J'ajoute $2{,}6$ aux deux membres, puis je réduis :

$$x - 2{,}6 + 2{,}6 = 5 + 2{,}6$$
$$x = 7{,}6$$

Vérification : $7{,}6 - 2{,}6 = 5$.

La solution de l'équation est $7{,}6$.

Méthode : Résoudre ax = b

1. **Je repère** le nombre qui multiplie l'inconnue. Il doit être non nul.
2. **Je divise** les deux membres par ce nombre.
3. **J'écris** le quotient simplifié, ou son écriture décimale si elle est exacte. Je vérifie, puis je conclus.

Exemple : Diviser par le coefficient

$8x = 26$.

Je divise les deux membres par 8, puis je simplifie le quotient :

$$x = \frac{26}{8}$$
$$= \frac{13}{4}$$
$$= 3{,}25$$

Vérification : $8 \times 3{,}25 = 26$.

La solution de l'équation est $3{,}25$.

Exemple : Une solution écrite en fraction

$-9x = 15$.

Je divise les deux membres par -9, puis je simplifie :

$$x = \frac{15}{-9}$$
$$= -\frac{5}{3}$$

Ce quotient n'a pas d'écriture décimale exacte, alors la fraction reste.

Vérification : $-9 \times \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{45}{3} = 15$. Rappel : le produit de deux nombres négatifs est positif.

La solution de l'équation est $-\frac{5}{3}$.

Attention : Le coefficient se divise

Dans $5x = 35$, le 5 multiplie l'inconnue. Le retrancher conduirait à $x = 30$, or $5 \times 30 = 150$.

Il faut diviser les deux membres par 5 : $x = 7$, et $5 \times 7 = 35$.

Attention : Le signe moins devant l'inconnue

$-x$ veut dire $-1 \times x$. Dans $-x = 11$, je multiplie les deux membres par -1 : $x = -11$.

Contrôle : $-(-11) = 11$. Répondre 11 serait faux, car l'opposé de 11 est -11, et $-11 \neq 11$.

Résoudre en plusieurs étapes

Méthode : L'ordre des gestes

1. **Je développe** les parenthèses, puis je réduis chaque membre.
2. **Je rassemble** les termes en x à gauche : j'ajoute ou je retranche le même terme des deux côtés.
3. **Je rassemble** les nombres à droite, de la même manière.
4. **Je divise** les deux membres par le coefficient de x, qui doit être non nul.
5. **Je vérifie** dans l'équation de départ, puis je conclus.

Remarque : Rappel : développer

Rappel : pour développer, on multiplie le facteur par chaque terme de la parenthèse. Ainsi $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$.

Exemple : Un nombre, puis un coefficient

$-3x + 8 = 29$.

Je retranche 8 aux deux membres :

$$-3x = 21$$

Je divise les deux membres par -3 :

$$x = -7$$

Vérification : $-3 \times (-7) + 8 = 21 + 8 = 29$.

La solution de l'équation est -7.

Exemple : L'inconnue dans les deux membres

$9x - 4 = 2x + 17$.

Je retranche $2x$ aux deux membres :

$$7x - 4 = 17$$

J'ajoute 4 aux deux membres :

$$7x = 21$$

Je divise les deux membres par 7 :

$$x = 3$$

Vérification : $9 \times 3 - 4 = 23$ et $2 \times 3 + 17 = 23$.

La solution de l'équation est 3.

Exemple : Avec une parenthèse

$3(x - 4) = x + 5$.

Je développe le premier membre :

$$3x - 12 = x + 5$$

Je retranche x aux deux membres :

$$2x - 12 = 5$$

J'ajoute 12 aux deux membres :

$$2x = 17$$

Je divise les deux membres par 2 :

$$x = 8{,}5$$

Vérification : $3 \times (8{,}5 - 4) = 3 \times 4{,}5 = 13{,}5$ et $8{,}5 + 5 = 13{,}5$.

La solution de l'équation est $8{,}5$.

Exemple : Des coefficients décimaux

$1{,}5x + 2 = 0{,}5x - 3$.

Je retranche $0{,}5x$ aux deux membres :

$$x + 2 = -3$$

Je retranche 2 aux deux membres :

$$x = -5$$

Vérification : $1{,}5 \times (-5) + 2 = -5{,}5$ et $0{,}5 \times (-5) - 3 = -5{,}5$.

La solution de l'équation est -5.

Attention : Le facteur multiplie toute la parenthèse

$4(x - 2)$ n'est pas égal à $4x - 2$: le 4 multiplie aussi le 2. On écrit $4(x - 2) = 4x - 8$.

Ainsi, $4(x - 2) = 20$ devient $4x - 8 = 20$.

J'ajoute 8 aux deux membres : $4x = 28$. Je divise les deux membres par 4 : $x = 7$.

Mettre un problème en équation

Méthode : Les six gestes d'un problème

1. **Je lis** l'énoncé et je repère ce que l'on cherche.
2. **Je nomme l'inconnue** par une phrase, « Soit x … », avec son unité.
3. **Je traduis** les données par une équation.
4. **Je résous** cette équation.
5. **Je contrôle** la valeur trouvée avec les phrases de l'énoncé.
6. **Je réponds** par une phrase qui porte l'unité.

Exemple : Le prix d'un pack

Énoncé : trois packs identiques de bouteilles d'eau et un sac à 4 DH coûtent 52 DH en tout. Quel est le prix d'un pack ?

Soit p le prix d'un pack, en dirhams. L'énoncé se traduit par l'équation :

$$3p + 4 = 52$$

Je retranche 4 aux deux membres :

$$3p = 48$$

Je divise les deux membres par 3 :

$$p = 16$$

La solution de l'équation est 16.

Contrôle dans l'énoncé : trois packs à 16 DH font $3 \times 16 = 48$ DH, et $48 + 4 = 52$.

Réponse : un pack coûte 16 DH.

Exemple : Répondre à la question posée

Énoncé : on achète des packs de 6 bouteilles d'eau. Avec les 4 bouteilles déjà au frais, on en a 46. Combien de bouteilles a-t-on achetées ?

Soit n le nombre de packs achetés. On compte les bouteilles :

$$6n + 4 = 46$$

Je retranche 4 aux deux membres :

$$6n = 42$$

Je divise les deux membres par 6 :

$$n = 7$$

La solution de l'équation est 7.

La question porte sur les bouteilles, pas sur les packs : $6 \times 7 = 42$.

Contrôle dans l'énoncé : $42 + 4 = 46$.

Réponse : on a acheté 42 bouteilles d'eau.

Attention : La solution n'est pas toujours la réponse

Relis la question avant de répondre. Si l'inconnue compte des packs et que l'on demande des bouteilles, un calcul reste à faire.

Regarde aussi si la réponse est possible : un nombre de packs ne peut pas valoir $7{,}5$.

À retenir : Contrôler dans l'énoncé

Contrôle la réponse avec les phrases de l'énoncé, pas seulement avec l'équation. Une équation mal traduite peut avoir une solution juste, mais pour un autre problème.

Quelle technique pour quelle équation ?

Méthode : Quelle technique pour quelle équation ?

- $x + a = b$: je retranche a aux deux membres. Exemple : $x + 17 = 25$ donne $x = 8$.
- $x - a = b$: j'ajoute a aux deux membres. Exemple : $x - 14 = 6$ donne $x = 20$.
- $ax = b$, avec a non nul : je divise les deux membres par a. Exemple : $7x = 63$ donne $x = 9$.
- $-x = b$: je multiplie les deux membres par -1. Exemple : $-x = 13$ donne $x = -13$.
- $ax + b = c$, avec a non nul : je retranche b aux deux membres, puis je divise les deux membres par a. Exemple : $2x + 15 = 41$ donne $2x = 26$, puis $x = 13$.
- $ax + b = cx + d$: je retranche cx aux deux membres, puis b. Je divise ensuite les deux membres par le coefficient de x obtenu, s'il est non nul. Exemple : $5x + 3 = 2x + 27$ donne $3x + 3 = 27$, puis $3x = 24$, puis $x = 8$.
- Une parenthèse : je développe d'abord. Exemple : $6(x + 2) = 42$ devient $6x + 12 = 42$.
- Un problème : je nomme l'inconnue, je traduis, je résous, je contrôle dans l'énoncé, je réponds.

Retrancher a aux deux membres

$$x + a = b \text{ donne } x = b - a$$

Ajouter a aux deux membres

$$x - a = b \text{ donne } x = b + a$$

Diviser par a, non nul

$$ax = b \text{ donne } x = \frac{b}{a}$$

Multiplier par –1

$$-x = b \text{ donne } x = -b$$

Développer avant de résoudre

$$k(x + a) = kx + ka$$

> **À retenir : Ce qu'il faut retenir**
>
> Même opération sur les deux membres, une seule opération par ligne. On ne divise jamais par 0. Toute résolution finit par une vérification, puis par la phrase de conclusion.

Tu sais maintenant résoudre une équation et t'en servir pour un problème. Garde cette fiche près de toi pendant les exercices.