BURHAN

Résumé : Droites perpendiculaires et droites parallèles

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/droites-perpendiculaires-et-paralleles/resume

Chapitre	Semestre
Droites perpendiculaires et droites parallèles	Semestre 1

Droites sécantes et droites perpendiculaires

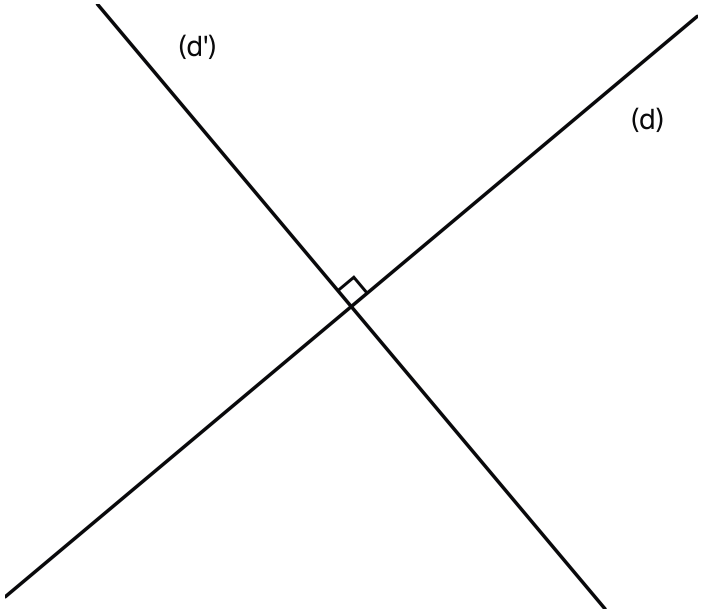
Deux droites qui se croisent sont **sécantes**. Si elles se croisent à angle droit, elles sont aussi perpendiculaires. Ton équerre sert à le contrôler.

Une droite se nomme par une lettre entre parenthèses : (d) se lit « la droite d ». (d') se lit « d prime » : c'est une deuxième droite.

Définition : Droites sécantes, droites perpendiculaires

Deux droites qui ont **un seul point commun** sont dites **sécantes**. Ce point commun est leur **point d'intersection**.

Deux droites sécantes qui forment un **angle droit** sont dites **perpendiculaires**. Si les droites (d) et (d') sont perpendiculaires, on écrit $(d) \perp (d')$ et on lit : « la droite (d) est perpendiculaire à la droite (d') ».

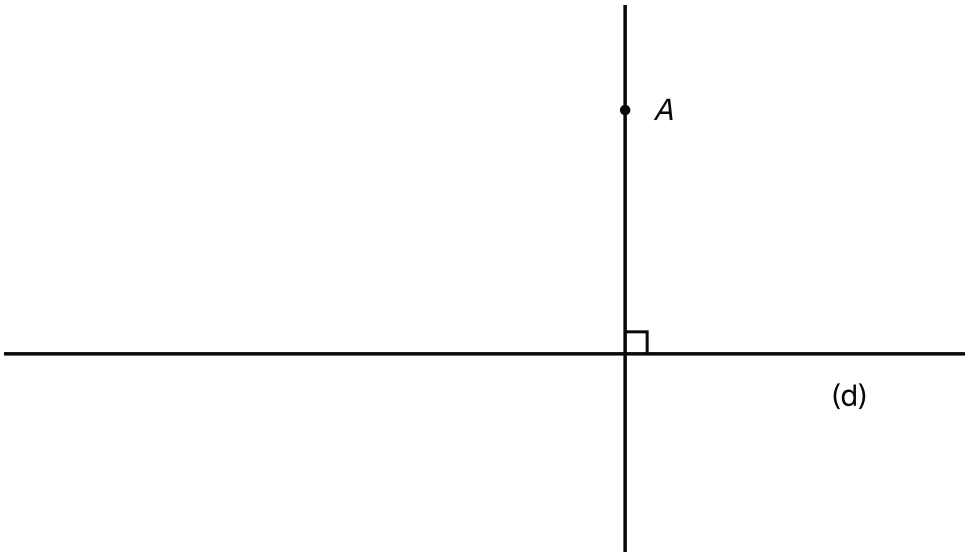


Deux droites sécantes qui se coupent à angle droit : on écrit (d) ⊥ (d').

Propriété : Une seule perpendiculaire passant par un point

Soit (d) une droite et A un point. Par le point A, il passe **une et une seule** droite perpendiculaire à la droite (d).

Cela reste vrai que le point A soit sur la droite (d) ou en dehors.



Un point A hors de (d) et l'unique droite qui passe par A en coupant (d) à angle droit.

Remarque

Ce résultat est admis : tu l'utilises sans le démontrer.

Méthode : Tracer une perpendiculaire à l'équerre

1. **Poser** : un bord de l'angle droit de l'équerre suit la droite (d).
2. **Glisser** : déplace l'équerre sur (d) jusqu'à ce que l'autre bord touche le point A.
3. **Tracer et coder** : trace le long de ce bord, prolonge à la règle, puis dessine le petit carré de l'angle droit.

Attention : Perpendiculaire, pas forcément verticale

Tourne ton cahier : deux droites perpendiculaires le restent. L'angle droit se lit entre les deux droites. Le bord de la feuille ne compte pas.

Attention : Trois écritures à ne pas mélanger

- (RS) est une droite, sans fin des deux côtés.
- $[RS]$ est le morceau de droite qui va de R à S.
- RS est un nombre : sa longueur.

Écris $RS = 4{,}5$ cm, et jamais $[RS] = 4{,}5$ cm.

Exemple : Un premier tracé

Trace sur ton cahier un segment $[EF]$ avec $EF = 7$ cm. Avec l'équerre, trace la droite (d) qui passe par E et forme un angle droit avec (EF). Code cet angle droit.

Tu peux alors écrire $(d) \perp (EF)$.

Droites parallèles

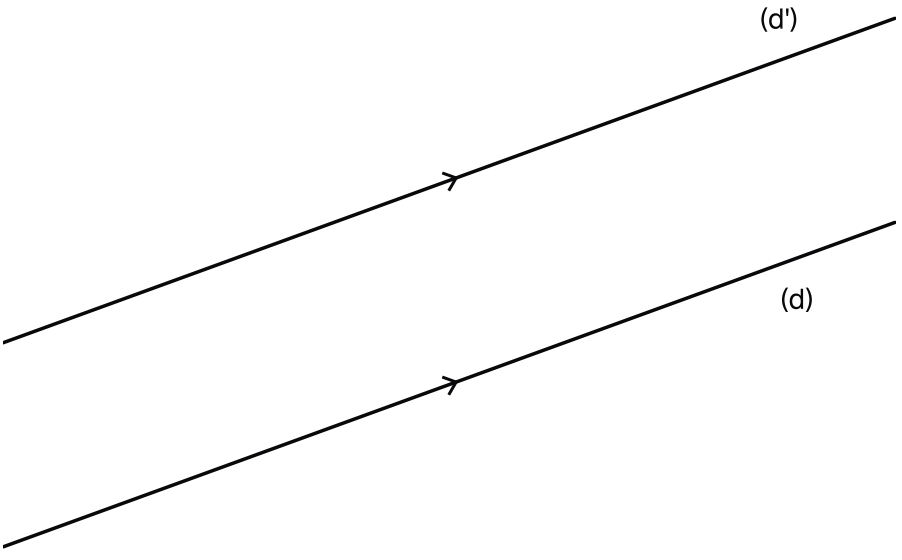
Deux droites parallèles **distinctes** ne se rencontrent jamais, même très loin de ta feuille. Une même droite tracée deux fois compte aussi parmi les parallèles : c'est le seul cas où deux parallèles ont des points communs.

Le **plan** désigne ici la surface plate sur laquelle on trace, prolongée sans limite. Dans ce chapitre, on travaille toujours dans un seul plan.

Définition : Droites parallèles

Deux droites d'un même plan qui n'ont **aucun point commun** sont dites **parallèles**. Deux droites **confondues**, c'est-à-dire une même droite tracée deux fois, sont aussi dites parallèles. Si les droites (d) et (d') sont parallèles, on écrit $(d) \parallel (d')$.

Ainsi, deux droites d'un même plan sont toujours soit sécantes, soit parallèles.

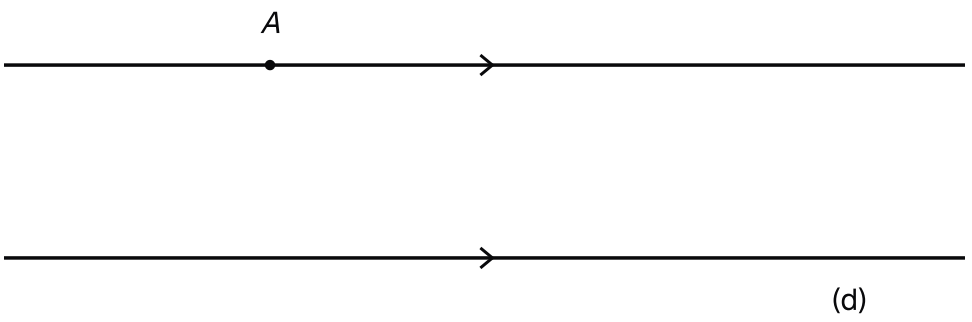


Deux droites parallèles distinctes : elles ne se rencontrent nulle part, on écrit (d) ∥ (d').

Propriété : Une seule parallèle passant par un point

Soit (d) une droite et A un point. Par le point A, il passe **une et une seule** droite parallèle à la droite (d).

Si le point A est sur la droite (d), cette parallèle est la droite (d) elle-même.



Par le point A, extérieur à la droite (d), on ne peut faire passer qu'une parallèle à (d).

Remarque

Ce résultat est admis : on ne le démontre pas au collège.

Attention : Prolonger avant de conclure

Sur ta feuille, une droite n'est qu'un morceau. Deux traits sans point commun sur la page peuvent se rencontrer au-delà de son bord. Prolonge-les à la règle, ou cherche une propriété qui justifie le parallélisme.

Exemple : Une seule parallèle par un point

Les deux bords d'une règle donnent deux droites (d) et (d') : $(d) \parallel (d')$.

Trace une autre droite (Δ) qui coupe (d) en un point K. Le nom (Δ) se lit « delta » : c'est une lettre grecque.

Par K, la seule parallèle à (d') est (d). Or (Δ) passe par K et n'est pas (d). Donc (Δ) n'est pas parallèle à (d') : elle la coupe.

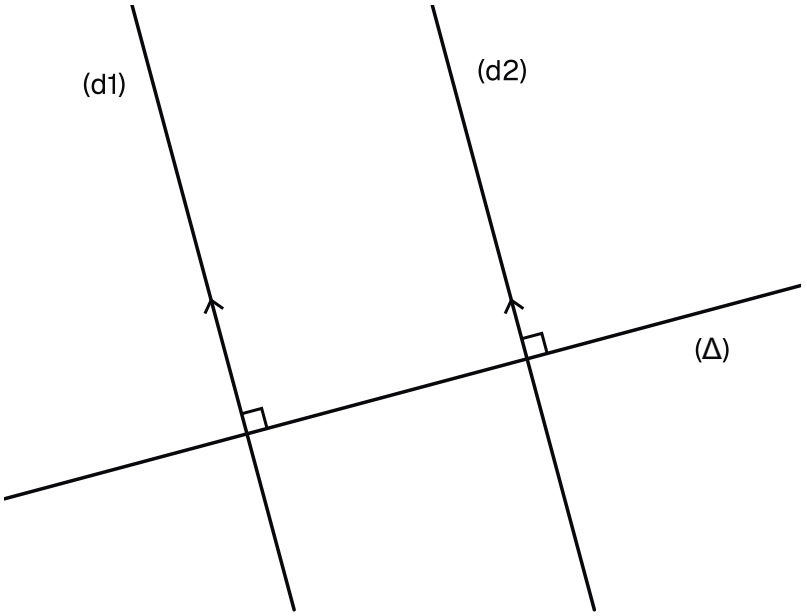
Passer de perpendiculaire à parallèle

Trois propriétés relient les deux mots du chapitre. Chacune part de deux renseignements sur trois droites. Elle donne alors une conclusion sûre, sans mesurer.

Propriété : Deux droites perpendiculaires à une même droite

Si deux droites (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires à une même droite (Δ), alors les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

En symboles : si $(d_1) \perp (\Delta)$ et $(d_2) \perp (\Delta)$, alors $(d_1) \parallel (d_2)$.

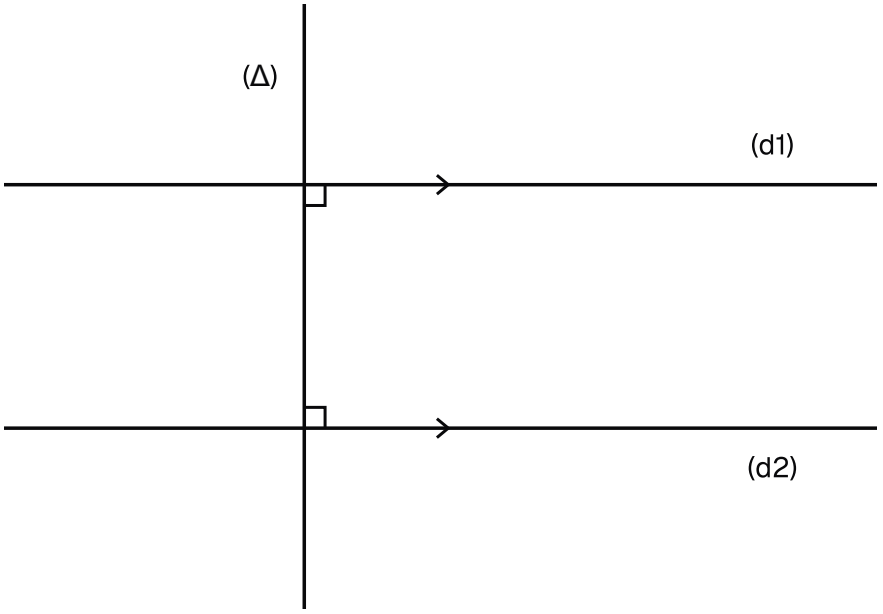


Si (d1) et (d2) font toutes deux un angle droit avec (Δ), alors (d1) et (d2) sont parallèles.

Propriété : Une perpendiculaire à l'une de deux droites parallèles

Si deux droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

En symboles : si $(d_1) \parallel (d_2)$ et $(\Delta) \perp (d_1)$, alors $(\Delta) \perp (d_2)$.



Une droite (Δ) qui coupe (d1) à angle droit coupe aussi à angle droit sa parallèle (d2).

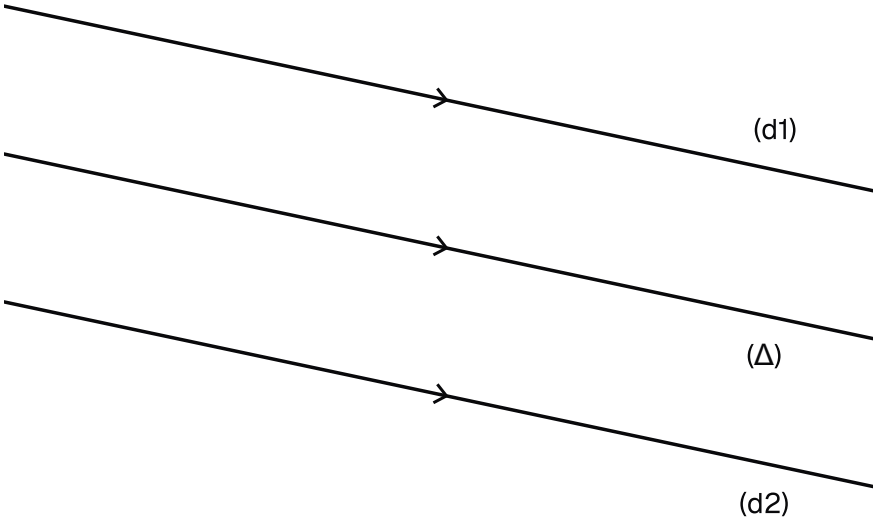
Remarque

Ce résultat est admis : sa preuve demande des angles étudiés plus tard.

Propriété : Deux droites parallèles à une même droite

Si deux droites (d_1) et (d_2) sont parallèles à une même droite (Δ), alors les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

En symboles : si $(d_1) \parallel (\Delta)$ et $(d_2) \parallel (\Delta)$, alors $(d_1) \parallel (d_2)$.



Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

Deux perpendiculaires à une même droite

si $(d_1) \perp (\Delta)$ et $(d_2) \perp (\Delta)$,
alors $(d_1) \parallel (d_2)$

Perpendiculaire à l'une de deux parallèles

si $(d_1) \parallel (d_2)$ et $(\Delta) \perp (d_1)$,
alors $(\Delta) \perp (d_2)$

Deux parallèles à une même droite

si $(d_1) \parallel (\Delta)$ et $(d_2) \parallel (\Delta)$,
alors $(d_1) \parallel (d_2)$

Méthode : Tracer une parallèle avec l'équerre seule

1. **Premier angle droit** : trace la perpendiculaire (Δ) à (d) qui passe par A.
2. **Second angle droit** : trace la perpendiculaire (d') à (Δ) qui passe, elle aussi, par A.
3. **Justifier** : (d) et (d') forment chacune un angle droit avec (Δ). La propriété des deux perpendiculaires donne $(d') \parallel (d)$.

Attention : L'œil ne suffit pas

Un angle peut sembler droit sans l'être tout à fait. Pour affirmer « perpendiculaires » ou « parallèles », il te faut une donnée, un codage ou une propriété. La mesure sert seulement à vérifier ton tracé.

Exemple : Les barreaux d'une échelle

Une échelle a deux montants (m_1) et (m_2), avec $(m_1) \parallel (m_2)$. Un barreau (b) forme un angle droit avec (m_1). La propriété de la perpendiculaire à l'une de deux parallèles donne $(b) \perp (m_2)$.

Un second barreau (b') vérifie aussi $(b') \perp (m_1)$. Les barreaux (b) et (b') sont deux perpendiculaires à la même droite (m_1) : ils sont donc parallèles, $(b) \parallel (b')$.

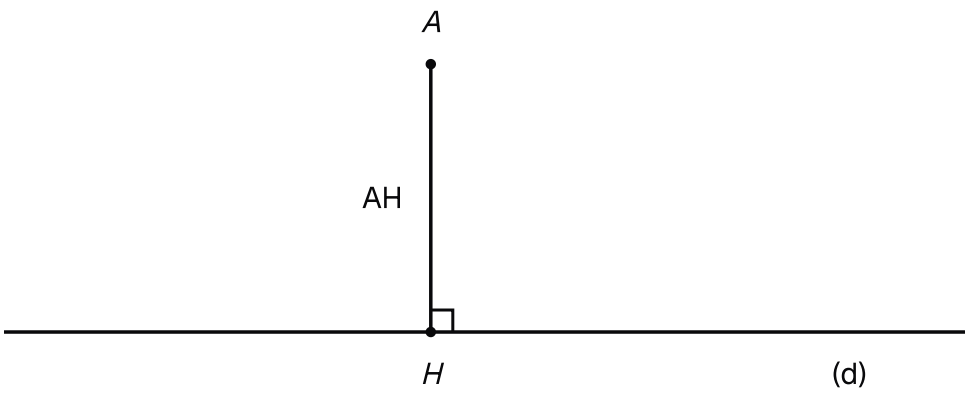
Distance d'un point à une droite

Pour aller d'un point à une droite par le chemin le plus court, tu pars à angle droit vers la droite.

Définition : Projeté orthogonal d'un point ; distance d'un point à une droite

Soit (d) une droite et A un point. La perpendiculaire à la droite (d) passant par A coupe la droite (d) en un point H. Ce point H est appelé le **projeté orthogonal** du point A sur la droite (d).

La longueur AH est appelée la **distance du point A à la droite** (d). Si le point A est sur la droite (d), alors H est le point A lui-même, et cette distance est nulle.



Le pied H de la perpendiculaire menée de A à (d) : la longueur AH mesure l'éloignement de A à la droite.

Propriété : La distance d'un point à une droite est la plus courte

Soit (d) une droite, A un point et H son projeté orthogonal sur la droite (d). Pour tout point M de la droite (d), on a $AM \geq AH$.

Si de plus le point M est différent du point H, alors $AM > AH$.

Remarque

Ce résultat est admis. Tu peux le contrôler avec ta règle graduée.

Lis $AM \geq AH$ ainsi : « AM est plus grand que AH, ou égal à AH ». Lis $AM > AH$ ainsi : « AM est strictement plus grand que AH ».

Méthode : Trouver la distance d'un point à une droite

1. **Perpendiculaire** : avec l'équerre, trace la perpendiculaire à (d) qui passe par A.
2. **Projeté** : nomme H le point où elle coupe (d). C'est le projeté orthogonal de A sur (d).
3. **Mesure** : lis AH sur la règle graduée. Ce nombre est la distance cherchée.

Attention : Pas n'importe quel segment

Pour la distance de A à (d), ne relie pas A à un point pris au hasard sur (d). Le bon segment est $[AH]$, qui forme un angle droit avec (d). Tous les autres sont plus longs.

Exemple : Mesurer pour comparer

Trace une droite (d) et place un point H dessus. Trace la perpendiculaire à (d) en H, et place P sur elle avec $PH = 2$ cm. Place enfin M sur (d) avec $HM = 1{,}5$ cm.

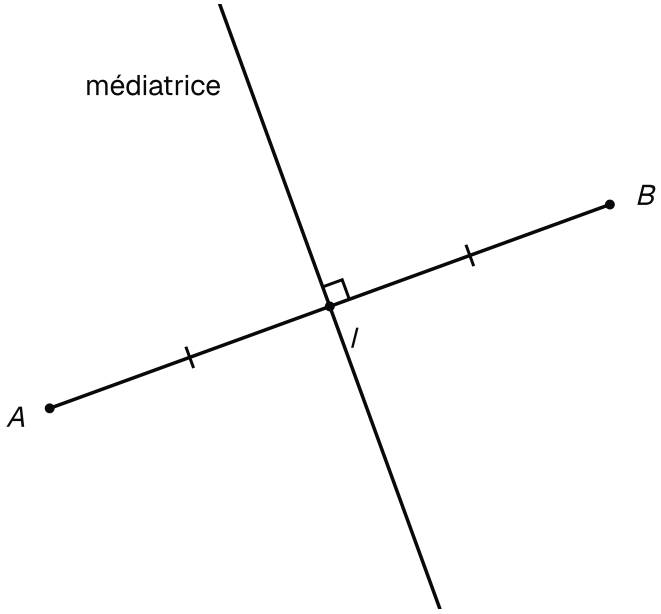
En mesurant, tu trouves $PM = 2{,}5$ cm. La distance de P à (d) est $PH = 2$ cm, et $PM > PH$.

La médiatrice d'un segment

La médiatrice d'un segment le traverse en plein milieu, en formant un angle droit avec lui. Ses points sont à la même distance des deux bouts.

Définition : Médiatrice d'un segment

Soit A et B deux points distincts. La **médiatrice** du segment $[AB]$ est la droite **perpendiculaire** à la droite (AB) qui passe par le **milieu** du segment $[AB]$.



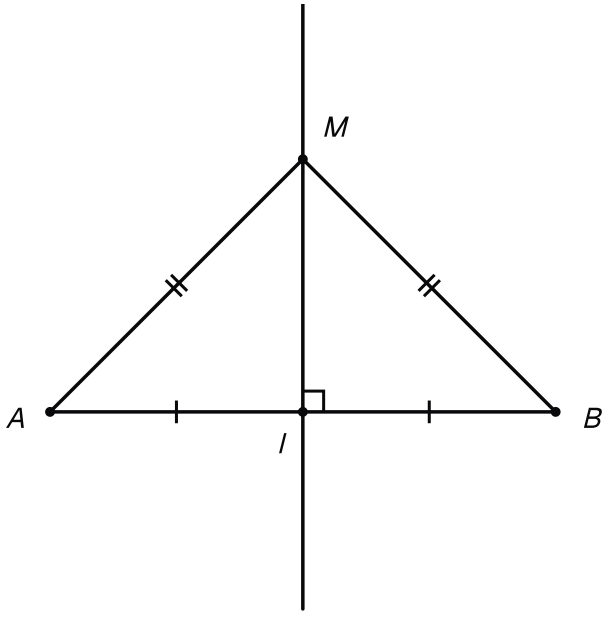
La médiatrice de [AB] traverse le segment en son milieu I en formant un angle droit avec lui.

Propriété : Propriété caractéristique de la médiatrice

Soit A et B deux points distincts, et M un point.

- Si le point M est sur la médiatrice du segment $[AB]$, alors $MA = MB$: on dit que M est **équidistant** des points A et B.
- Réciproquement, si $MA = MB$, alors le point M est sur la médiatrice du segment $[AB]$.

Ainsi, la médiatrice du segment $[AB]$ est formée de tous les points équidistants de A et de B.



Le point M, pris sur la médiatrice de [AB], est à la même distance de A et de B.

Remarque

Ce résultat est admis, dans un sens comme dans l'autre.

Méthode : Tracer une médiatrice de deux façons

Avec la règle graduée et l'équerre.

1. **Milieu** : mesure $[AB]$ et place son milieu I.
2. **Angle droit** : trace en I la perpendiculaire à (AB).

Avec le compas. Un arc est un morceau de cercle.

1. **Deux arcs** : garde le même écartement, plus grand que la moitié de AB. Trace un arc de centre A, puis un arc de centre B, des deux côtés de $[AB]$.
2. **Relier** : les arcs se croisent en deux points. La droite qui les relie est la médiatrice.

Méthode : Reconnaître une médiatrice grâce à deux points

1. **Deux points** : trouve deux points distincts M et N tels que $MA = MB$ et $NA = NB$.
2. **Propriété** : chacun de ces points est sur la médiatrice de $[AB]$.
3. **Une seule droite** : par deux points distincts ne passe qu'une droite. La médiatrice est donc (MN), et $(MN) \perp (AB)$.

Attention : Les deux conditions ensemble

Une droite perpendiculaire à (AB) n'est pas forcément la médiatrice : elle doit aussi couper $[AB]$ en son milieu. Une droite qui passe par ce milieu sans angle droit ne convient pas non plus.

Exemple : Égale distance sans mesurer

Trace un segment $[KL]$ avec $KL = 5$ cm, puis sa médiatrice (m). Place un point S sur (m) avec $SK = 4$ cm.

Le point S est sur la médiatrice, donc il est équidistant de K et de L. Sans mesurer, tu sais que $SL = 4$ cm.

À l'inverse, un point T tel que $TK = 3$ cm et $TL = 3$ cm est forcément sur (m).

Rédiger une démonstration courte

Une justification s'écrit en trois temps : ce que tu sais, la propriété que tu cites, puis ce que tu en tires.

Méthode : Les trois temps d'une justification

1. **On sait que** : recopie les données utiles, prises dans l'énoncé ou lues sur un codage.
2. **Or** : écris la propriété du cours que tu utilises, avec toutes ses conditions.
3. **Donc** : écris ce que la propriété permet de conclure, rien de plus.

Si tu enchaînes deux pas, la conclusion du premier sert de donnée au second.

Exemple : Une justification en trois lignes

Sur une figure codée, les angles $\widehat{EFG}$ et $\widehat{FGH}$ sont droits. $\widehat{EFG}$ se lit « angle EFG » : son sommet est F.

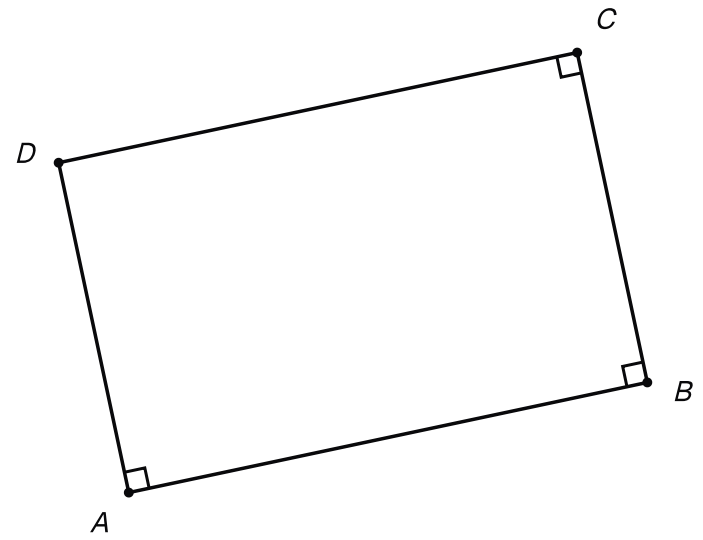
On sait que $(EF) \perp (FG)$ et $(GH) \perp (FG)$.

Or deux droites perpendiculaires à une même troisième droite sont parallèles.

Donc $(EF) \parallel (GH)$.

Propriété : Quadrilatère qui a trois angles droits

Si un quadrilatère a **trois angles droits**, alors c'est un **rectangle**.



Un quadrilatère dont trois angles sont codés droits : c'est un rectangle, même sans codage au quatrième coin.

À retenir : Le quatrième angle se déduit

> Un quadrilatère est une figure à quatre côtés. Pour reconnaître un rectangle, trois angles droits suffisent. Le quatrième angle droit se déduit des propriétés : tu n'as pas à le mesurer.

Quelle propriété pour quelle question ?

Méthode : Quelle propriété pour quelle question ?

- « Ces droites se coupent-elles ? » : compte leurs points communs. Un seul : sécantes. Aucun, ou la même droite : parallèles.
- « Ces droites sont-elles perpendiculaires ? » : cherche un angle droit codé ou donné. Sinon, pense à la perpendiculaire à l'une de deux parallèles.
- « Ces droites sont-elles parallèles ? » : deux perpendiculaires à une même droite, ou deux parallèles à une même droite.
- « Combien de droites possibles ? » : par un point, une seule perpendiculaire et une seule parallèle.
- « Quelle est la distance ? » : le projeté orthogonal, puis la longueur mesurée sur la perpendiculaire.
- « Ce point est-il à égale distance de A et de B ? » : regarde s'il est sur la médiatrice de $[AB]$.
- « Cette droite est-elle la médiatrice ? » : milieu et angle droit, ou deux points équidistants des extrémités.
- « Est-ce un rectangle ? » : trois angles droits suffisent.

Méthode : Quel tracé pour quelle consigne ?

- « Trace une perpendiculaire » : l'équerre posée sur la droite, puis glissée jusqu'au point.
- « Trace une parallèle » : deux angles droits de suite, à l'équerre seule.
- « Trace la médiatrice » : le milieu et un angle droit, ou deux arcs de même rayon.
- « Trouve la distance » : la perpendiculaire par le point, puis une mesure jusqu'au projeté.

À retenir : Admis ou démontré

Trois propriétés sont démontrées :

- deux perpendiculaires à une même droite ;
- deux parallèles à une même droite ;
- le quadrilatère à trois angles droits.

Cinq sont admises :

- une seule perpendiculaire par un point ;
- une seule parallèle par un point ;

- la perpendiculaire à l'une de deux parallèles ;
- la plus courte distance ;
- la propriété de la médiatrice.

Admise ou démontrée, chacune peut être citée dans une justification.