BURHAN

Droites perpendiculaires et droites parallèles : exercices, entraînement

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/droites-perpendiculaires-et-paralleles/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Droites perpendiculaires et droites parallèles	Entraînement	7

Exercice 1

Une parallèle avec deux angles droits

Sur ton cahier, trace une droite (d) et place un point A en dehors de cette droite.

1.

Trace à l'équerre la droite (Δ) perpendiculaire à (d) passant par A. Code l'angle droit.

INDICE

Outil : la construction d'une perpendiculaire à l'équerre.

Début : l'équerre s'appuie d'abord sur (d), puis glisse vers A.

CORRIGÉ

Je pose un bord de l'angle droit de l'équerre sur (d), puis je glisse l'équerre le long de (d) jusqu'à ce que l'autre bord passe par A.

Je trace (Δ) le long de ce bord, et je code l'angle droit au point où elle coupe (d).

Conclusion. La droite (Δ) passe par A, et $(\Delta) \perp (d)$.

2.

Trace ensuite la droite (d') perpendiculaire à (Δ) passant par A. Code ce second angle droit.

INDICE

Outil : la même construction qu'à la question 1.

Début : cette fois, l'équerre s'appuie sur (Δ).

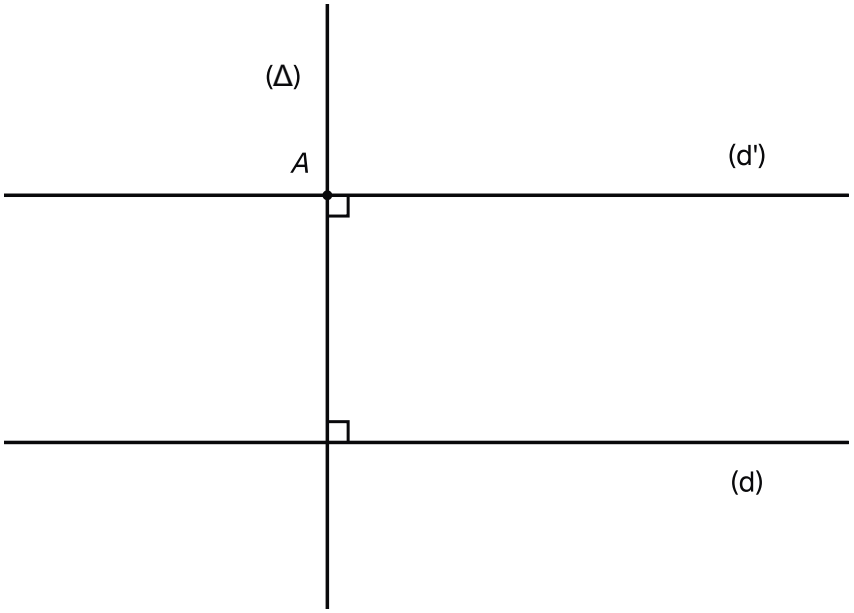
Point délicat : le sommet de l'angle droit doit être en A.

CORRIGÉ

Je pose un bord de l'angle droit de l'équerre sur (Δ), avec le sommet de l'angle droit au point A.

Je trace (d') le long de l'autre bord, puis je code l'angle droit en A.

Conclusion. La droite (d') passe par A, et $(d') \perp (\Delta)$.



Les deux constructions : (Δ) perpendiculaire à (d) par A, puis (d') perpendiculaire à (Δ) en A, chacune avec son angle droit codé.

3.

Justifie que $(d') \parallel (d)$, en rédigeant avec « On sait que », « Or », « Donc ».

INDICE

Outil : la propriété des deux perpendiculaires à une même droite.

Début : la droite commune aux deux angles droits est (Δ).

CORRIGÉ

On sait que $(d) \perp (\Delta)$ et $(d') \perp (\Delta)$.

Or, lorsque deux droites forment chacune un angle droit avec une même droite, elles sont parallèles.

Donc $(d') \parallel (d)$.

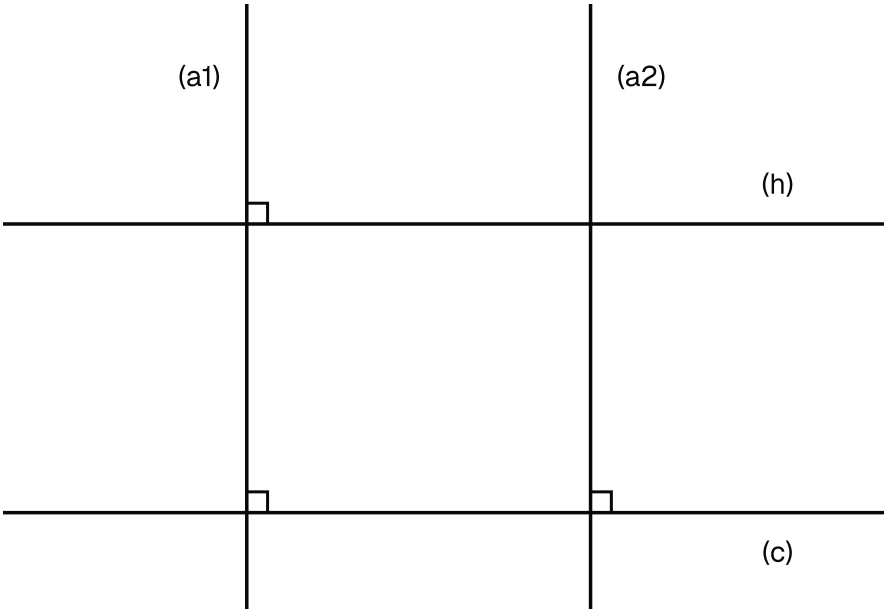
Conclusion. Les droites (d') et (d) sont bien parallèles.

Exercice 2

Le mur, les allées et la haie

Dans un jardin, un mur est représenté par une droite (c). Deux allées (a_1) et (a_2) partent du mur, et chacune forme un angle droit avec lui. Une haie (h) coupe l'allée (a_1) à angle droit.

Fais un schéma codé de ce jardin sur ton cahier.



Le schéma du jardin : le mur (c), les allées (a1) et (a2) à angle droit sur le mur, et la haie (h) à angle droit sur (a1).

1.

Justifie que les deux allées sont parallèles.

INDICE

Outil : la propriété des deux perpendiculaires à une même droite.

Début : écris ce que dit le codage pour (a_1), puis pour (a_2).

CORRIGÉ

On sait que $(a_1) \perp (c)$ et $(a_2) \perp (c)$.

Or, deux droites qui coupent chacune une même droite à angle droit sont parallèles.

Donc $(a_1) \parallel (a_2)$.

Conclusion. Les deux allées du jardin sont parallèles.

2.

Justifie que la haie (h) est perpendiculaire à l'allée (a_2).

INDICE

Outil : la propriété qui part de deux parallèles et d'une perpendiculaire à l'une d'elles.

Début : sers-toi du résultat de la question 1 et de la donnée sur la haie.

CORRIGÉ

On sait que $(a_1) \parallel (a_2)$, d'après la question 1, et $(h) \perp (a_1)$.

Or, quand deux droites sont parallèles, une droite qui forme un angle droit avec l'une forme aussi un angle droit avec l'autre.

Donc $(h) \perp (a_2)$.

Conclusion. La haie est perpendiculaire à la seconde allée.

3.

La haie est-elle parallèle au mur ? Justifie.

INDICE

Outil : encore la propriété des deux perpendiculaires à une même droite.

Début : cherche une droite qui forme un angle droit à la fois avec (h) et avec (c).

CORRIGÉ

On sait que $(h) \perp (a_1)$ et $(c) \perp (a_1)$, car l'allée (a_1) forme un angle droit avec le mur.

Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, elles sont parallèles.

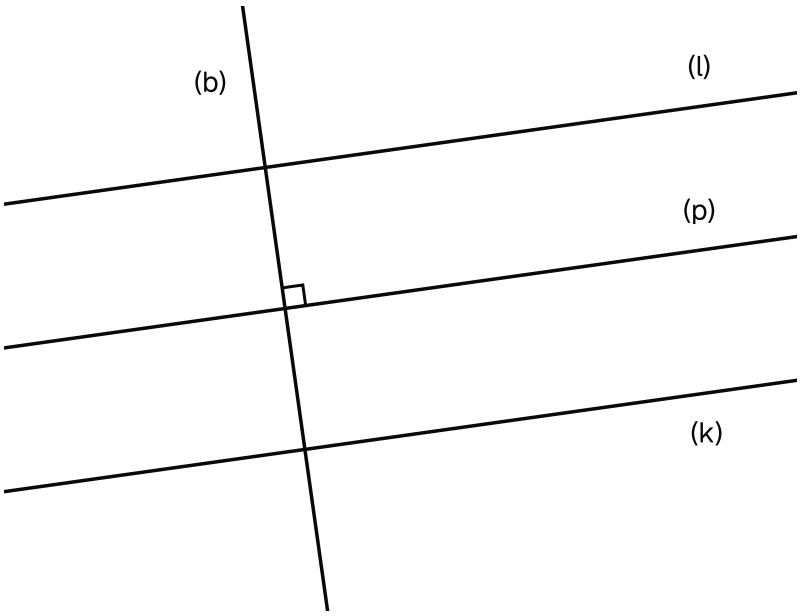
Donc $(h) \parallel (c)$.

Conclusion. Oui, la haie est parallèle au mur.

Exercice 3

Les rues le long du canal

Sur la carte d'une ville, un canal est représenté par une droite (k). La rue des Pêcheurs (p) et la rue des Lilas (l) sont toutes les deux parallèles au canal. Le boulevard (b) coupe la rue des Pêcheurs à angle droit. Fais un schéma de cette carte sur ton cahier.



La carte de la ville : le canal (k), les rues (p) et (l) qui le longent, et le boulevard (b) à angle droit sur la rue (p).

1.

Traduis chacune des trois données par une écriture avec un symbole.

INDICE

Outil : les notations $\perp$ et $\parallel$.

Début : il y a trois données, donc trois écritures.

CORRIGÉ

On traduit chaque phrase de l'énoncé :

- la rue des Pêcheurs est parallèle au canal ;
- la rue des Lilas est parallèle au canal ;
- le boulevard coupe la rue des Pêcheurs à angle droit.

Conclusion. Les trois données s'écrivent : $(p) \parallel (k)$; $(l) \parallel (k)$; $(b) \perp (p)$.

2.

Justifie que $(p) \parallel (l)$.

INDICE

Outil : la propriété des deux parallèles à une même droite.

Début : la droite commune aux deux premières données est (k).

CORRIGÉ

On sait que $(p) \parallel (k)$ et $(l) \parallel (k)$.

Or deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

Donc $(p) \parallel (l)$.

Conclusion. Les deux rues sont parallèles.

3.

Que peux-tu dire du boulevard et de la rue des Lilas ? Justifie.

INDICE

Outil : la propriété qui part de deux parallèles et d'une perpendiculaire à l'une d'elles.

Début : utilise la troisième donnée et le résultat de la question 2.

CORRIGÉ

On sait que $(p) \parallel (l)$, d'après la question 2, et $(b) \perp (p)$.

Or une droite perpendiculaire à l'une de deux droites parallèles est perpendiculaire à l'autre.

Donc $(b) \perp (l)$.

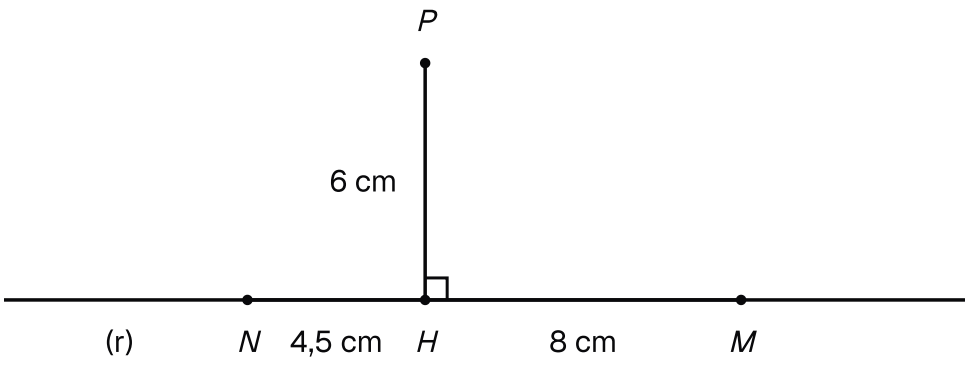
Conclusion. Le boulevard est perpendiculaire à la rue des Lilas : il la coupe à angle droit.

Exercice 4

Le puits et la route

Sur le dessin d'un terrain, une route droite est représentée par la droite (r), et un puits par le point P. Le point H de (r) est tel que $(PH) \perp (r)$ et $PH = 6$ cm.

Sur (r), place un point M avec $HM = 8$ cm. De l'autre côté de H, place un point N avec $HN = 4{,}5$ cm. Reproduis ce dessin sur ton cahier.



Le dessin du terrain : le puits P à 6 cm de la route (r) sur la perpendiculaire en H, et les points M et N de part et d'autre de H.

1.

Que représente le point H pour le point P ? Quelle est la distance du puits à la route sur le dessin ?

INDICE

Outil : les définitions du projeté orthogonal et de la distance d'un point à une droite.

Début : regarde l'angle formé par (PH) et (r).

CORRIGÉ

Projeté orthogonal. La droite (PH) passe par P, et $(PH) \perp (r)$. Elle coupe (r) au point H : le point H est donc le projeté orthogonal de P sur (r).

Distance. La distance d'un point à une droite se mesure entre ce point et son projeté orthogonal. Ici, c'est la longueur PH.

Conclusion. Le point H est le projeté orthogonal de P sur (r), et la distance du puits à la route est $PH = 6$ cm sur le dessin.

2.

Mesure PM et PN. Range les trois longueurs PH, PM et PN dans l'ordre croissant.

INDICE

Outil : la règle graduée, puis la propriété de la plus courte distance pour contrôler.

Début : mesure avec soin sur ta figure, au millimètre près.

CORRIGÉ

Mesures. On mesure $PM = 10$ cm et $PN = 7{,}5$ cm.

Rangement. On compare les trois nombres : $6 < 7{,}5 < 10$.

Contrôle. La plus petite longueur est PH : c'est bien celle prise sur la perpendiculaire à (r).

Conclusion. Dans l'ordre croissant, on a $PH < PN < PM$.

3.

Un ami affirme qu'un point K de la route est à 5 cm du puits sur le dessin. Est-ce possible ? Explique.

INDICE

Outil : la propriété de la plus courte distance.

Début : compare 5 cm avec la distance trouvée à la question 1.

Point délicat : la propriété vaut pour tous les points de (r).

CORRIGÉ

Le point K est sur la route (r), et H est le projeté orthogonal de P sur (r). D'après la propriété de la plus courte distance, $PK \geq PH$: PK est plus grand que PH, ou égal.

Comme $PH = 6$ cm, on obtient $PK \geq 6$ cm.

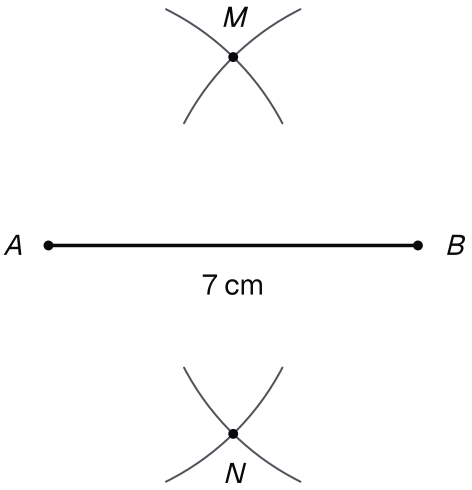
Or 5 cm est moins que 6 cm.

Conclusion. Ce n'est pas possible : aucun point de la route n'est aussi près du puits, et cet ami se trompe.

Exercice 5

La médiatrice au compas

Sur ton cahier, trace un segment $[AB]$ avec $AB = 7$ cm. Écarte ton compas de 5 cm. Trace un arc de centre A et un arc de centre B, au-dessus et au-dessous de $[AB]$. Les arcs se coupent en deux points M et N.



Les arcs de rayon 5 cm, centrés en A et en B, se croisent en M au-dessus du segment [AB] et en N au-dessous.

1.

Donne MA et MB sans mesurer. Qu'en déduis-tu pour le point M ?

INDICE

Outil : le rayon d'un arc de cercle, puis la propriété caractéristique de la médiatrice.

Début : le point M est à la fois sur l'arc de centre A et sur l'arc de centre B.

CORRIGÉ

Longueurs. Le point M est sur l'arc de centre A et sur l'arc de centre B, qui ont tous les deux un rayon de 5 cm. Donc $MA = 5$ cm et $MB = 5$ cm.

Déduction.

On sait que $MA = MB$.

Or un point équidistant de A et de B est sur la médiatrice de $[AB]$.

Donc M est sur la médiatrice de $[AB]$.

Conclusion. On a $MA = MB = 5$ cm, et le point M est sur la médiatrice de $[AB]$.

2.

Fais le même raisonnement pour le point N.

INDICE

Outil : le même qu'à la question 1.

Début : le point N est lui aussi sur les deux arcs.

CORRIGÉ

Le point N est lui aussi sur les deux arcs de rayon 5 cm, donc $NA = NB = 5$ cm.

Le point N est ainsi équidistant de A et de B. D'après la propriété caractéristique de la médiatrice, il est sur la médiatrice de $[AB]$.

Conclusion. Comme M, le point N est sur la médiatrice de $[AB]$.

3.

Déduis-en que la droite (MN) est la médiatrice de $[AB]$, puis que $(MN) \perp (AB)$.

INDICE

Outil : par deux points distincts passe une seule droite.

Début : la médiatrice de $[AB]$ contient déjà deux points connus.

CORRIGÉ

Une seule droite. Les points M et N sont distincts : l'un est au-dessus de $[AB]$, l'autre au-dessous.

D'après les questions 1 et 2, ils sont tous les deux sur la médiatrice de $[AB]$. Une seule droite passe par deux points distincts : la médiatrice de $[AB]$ est donc la droite (MN).

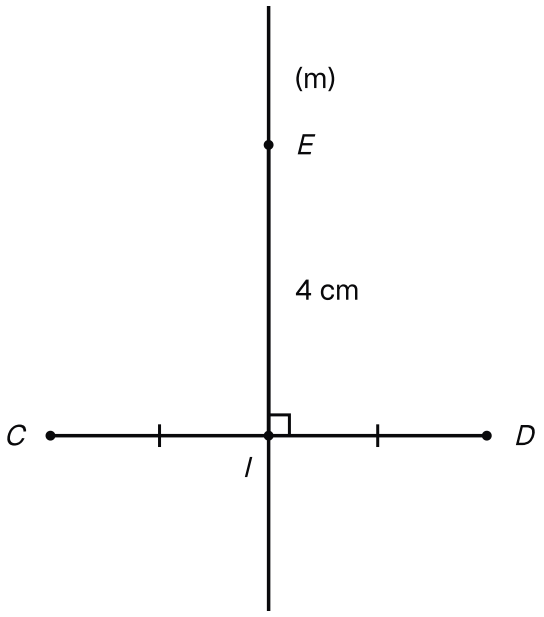
Angle droit. Par définition, la médiatrice de $[AB]$ est perpendiculaire à (AB).

Conclusion. La droite (MN) est la médiatrice de $[AB]$, et $(MN) \perp (AB)$.

Exercice 6

Un point de la médiatrice

Dans ton cahier, trace un segment $[CD]$ avec $CD = 6$ cm et place son milieu I. Trace la médiatrice (m) de $[CD]$. Place sur (m) un point E avec $IE = 4$ cm.



Le segment [CD] de 6 cm, sa médiatrice (m) qui passe par le milieu I, et le point E de (m) placé à 4 cm de I.

1.

Quel est le projeté orthogonal de E sur la droite (CD) ? Déduis-en la distance de E à la droite (CD).

INDICE

Outil : la définition de la médiatrice, puis celle du projeté orthogonal.

Début : la médiatrice (m) passe par E ; quel angle forme-t-elle avec (CD) ?

CORRIGÉ

Projeté orthogonal. La médiatrice (m) passe par E, et $(m) \perp (CD)$ par définition de la médiatrice. Elle coupe (CD) en I : le point I est donc le projeté orthogonal de E sur (CD).

Distance. La distance de E à la droite (CD) est la longueur EI.

Conclusion. Le projeté orthogonal de E sur (CD) est le point I, et la distance de E à (CD) est $EI = 4$ cm.

2.

On mesure $EC = 5$ cm. Sans mesurer, donne ED. Justifie.

INDICE

Outil : la propriété caractéristique de la médiatrice.

Début : demande-toi où se trouve le point E.

CORRIGÉ

On sait que le point E est sur la médiatrice de $[CD]$.

Or tout point de la médiatrice de $[CD]$ est équidistant de C et de D.

Donc $ED = EC$.

Conclusion. Sans mesurer, on trouve $ED = 5$ cm.

3.

La longueur EC est-elle la distance de E à la droite (CD) ? Explique.

INDICE

Outil : la distance se lit sur la perpendiculaire.

Début : compare EC avec le résultat de la question 1.

CORRIGÉ

La distance de E à (CD) se lit sur la perpendiculaire : c'est $EI = 4$ cm, car I est le projeté orthogonal de E sur (CD).

Le point C n'est pas ce projeté. La longueur EC vaut 5 cm, ce qui est plus grand que 4 cm.

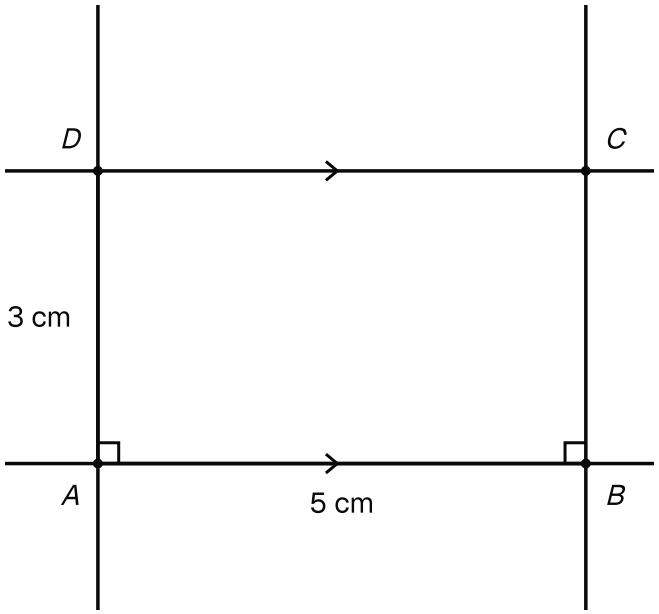
Conclusion. Non, la longueur EC n'est pas la distance de E à la droite (CD).

Exercice 7

Trois angles droits sans mesurer

Construis la figure sur ton cahier : trace un segment $[AB]$ avec $AB = 5$ cm, puis les perpendiculaires à (AB) en A et en B. Place D sur la première avec $AD = 3$ cm. Trace la parallèle à (AB) passant par D : elle coupe la seconde perpendiculaire en C.

Ainsi, les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont droits, et $(DC) \parallel (AB)$.



La figure construite : AB = 5 cm, AD = 3 cm, les perpendiculaires en A et en B, et la parallèle à (AB) par D qui coupe la seconde en C.

1.

Justifie que $(AD) \parallel (BC)$.

INDICE

Outil : la propriété des deux perpendiculaires à une même droite.

Début : traduis les deux angles droits par deux écritures avec le symbole $\perp$.

CORRIGÉ

On sait que les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont droits, donc $(AD) \perp (AB)$ et $(BC) \perp (AB)$.

Or deux droites perpendiculaires à la même droite (AB) sont parallèles.

Donc $(AD) \parallel (BC)$.

Conclusion. Les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

2.

Justifie que $(BC) \perp (DC)$. Que peux-tu dire de l'angle $\widehat{BCD}$?

INDICE

Outil : la propriété qui part de deux parallèles et d'une perpendiculaire à l'une d'elles.

Début : les deux parallèles à utiliser sont (DC) et (AB).

Point délicat : la droite qui coupe (AB) à angle droit, ici, c'est (BC).

CORRIGÉ

On sait que $(DC) \parallel (AB)$ et $(BC) \perp (AB)$.

Or, quand deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une à angle droit coupe aussi l'autre à angle droit.

Donc $(BC) \perp (DC)$.

Conclusion. Les droites (BC) et (DC) sont perpendiculaires en C : l'angle $\widehat{BCD}$ est droit.

3.

Déduis-en la nature du quadrilatère $ABCD$.

INDICE

Outil : la propriété du quadrilatère qui a trois angles droits.

Début : compte les angles droits obtenus jusqu'ici.

CORRIGÉ

On sait que les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont droits, et que l'angle $\widehat{BCD}$ est droit d'après la question 2.

Or un quadrilatère avec trois angles droits est un rectangle.

Donc $ABCD$ est un rectangle.

Conclusion. Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.