BURHAN

Droites perpendiculaires et droites parallèles

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/droites-perpendiculaires-et-paralleles/cours

Chapitre	Semestre
Droites perpendiculaires et droites parallèles	Semestre 1

Rues, cahiers et étagères

Regarde la carte de ton quartier. La rue de l'École croise la rue du Marché à un carrefour. Les deux rues y forment un coin bien carré, comme le coin d'une feuille.

Ouvre maintenant ton cahier. Ses lignes imprimées ne se rencontrent jamais, même si tu les prolonges très loin.

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à reconnaître ces droites, à les construire et à justifier ce que tu affirmes.

Devine : Une ligne du cahier

Sur ton cahier, prends deux lignes imprimées. Tu traces un trait droit qui coupe la première ligne en faisant un angle droit. Que fait ce trait avec la deuxième ligne ?

A. Il la coupe aussi en faisant un angle droit.

Juste.
Bonne prédiction. Tu peux le contrôler à l'équerre ; une propriété du chapitre l'explique.

B. Il ne la coupe jamais, même prolongé.

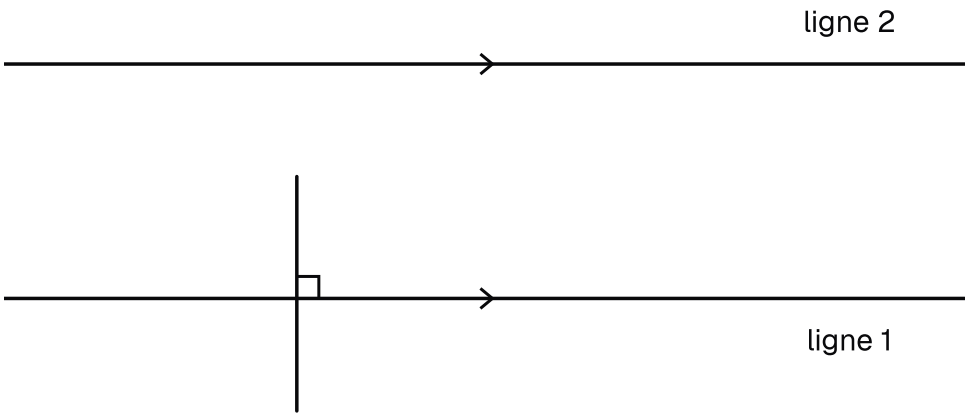
Faux.
Prolonge ton trait à la règle : il atteint la deuxième ligne.

C. Il la coupe, mais l'angle n'est plus droit.

Faux.
Contrôle à l'équerre : l'angle reste droit. Le chapitre dira pourquoi.

Correction
Le trait coupe aussi la deuxième ligne en faisant un angle droit. Tu peux le vérifier à l'équerre.

Dans la section « Parallèles et perpendiculaires », une propriété du cours l'explique.



Deux lignes imprimées du cahier et un trait qui coupe la ligne 1 à angle droit ; il s'arrête avant d'atteindre la ligne 2.

Garde ta prédiction en tête : tu la retrouveras plus loin.

Prépare ta règle graduée, ton équerre, ton compas et un crayon bien taillé. Dans ce chapitre, chaque figure est décrite avec précision : tu la traces toi-même sur ton cahier.

En géométrie, un **plan** est une surface plate comme ta feuille, mais sans bord. Toutes les droites du chapitre sont dans ce même plan.

Droites perpendiculaires

Deux droites qui se coupent

Vérifie : Deux rues qui se croisent

Deux rues droites se croisent à un carrefour. Sur la carte, on les représente par deux droites. Combien de points ces deux droites ont-elles en commun ?

A. Aucun point.

Faux.

Non : le carrefour appartient aux deux rues à la fois.

B. Un seul point : le carrefour.

Juste.

Oui. Deux droites qui se croisent n'ont qu'un point commun.

C. Deux points.

Faux.

Non : par deux points, il ne passe qu'une seule droite. Deux droites différentes n'ont jamais deux points communs.

D. Une infinité de points.

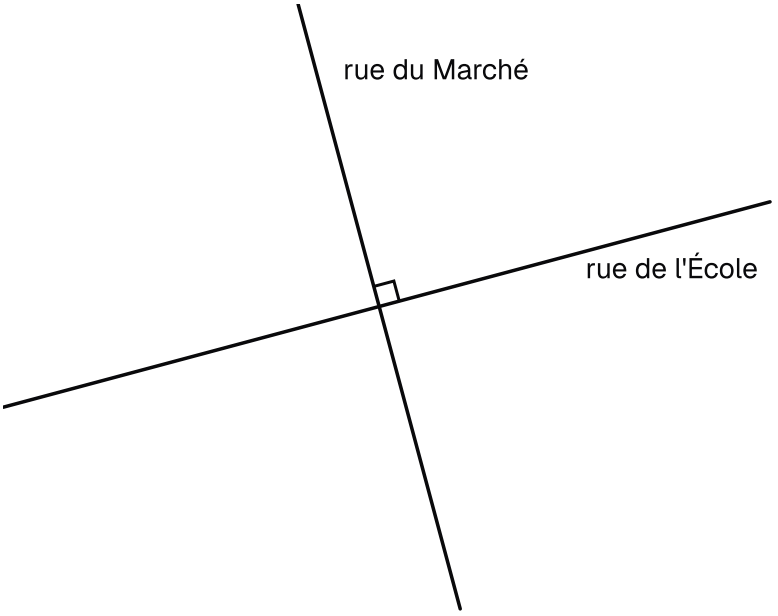
Faux.
Seulement si les deux droites sont la même droite. Ici, les rues sont différentes.

Correction
Les deux droites ont un seul point commun : le carrefour.

Rappel du primaire : par deux points distincts, il passe une seule droite. Deux droites différentes ne peuvent donc pas avoir deux points communs.

Rappel du primaire : un angle droit se contrôle avec l'équerre. Sur une figure, on marque un angle droit par un petit carré dans son coin : c'est un **codage**.

Un angle se mesure en degrés : un angle droit mesure $90°$. L'écriture $\widehat{ABC}$ se lit « angle ABC » : son sommet est le point B.



La rue de l'École et la rue du Marché se croisent en formant un coin carré, marqué par le petit carré du codage.

Prends une feuille de papier. Plie-la une première fois, puis plie-la encore en posant le premier pli sur lui-même. Déplie : les deux plis se coupent et forment quatre angles droits.

On dit que ces deux plis sont **perpendiculaires**.

Pour nommer une droite, on écrit une lettre entre parenthèses : (d) se lit « la droite d ». (d') se lit « la droite d prime » : c'est le nom d'une deuxième droite.

Voici la phrase exacte du cours.

Définition : Droites sécantes, droites perpendiculaires

Deux droites qui ont **un seul point commun** sont dites **sécantes**. Ce point commun est leur **point d'intersection**.

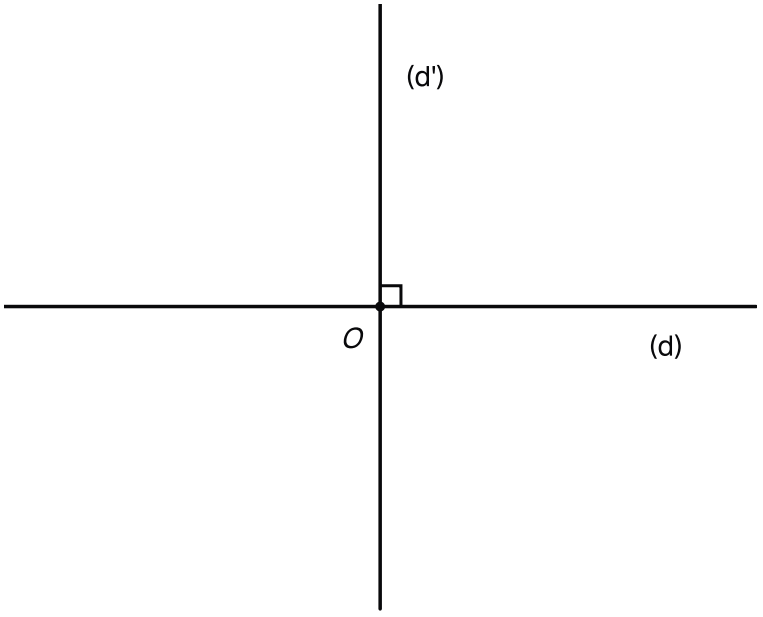
Deux droites sécantes qui forment un **angle droit** sont dites **perpendiculaires**. Si les droites (d) et (d') sont perpendiculaires, on écrit $(d) \perp (d')$ et on lit : « la droite (d) est perpendiculaire à la droite (d') ».

Exemple : tracer deux droites perpendiculaires

Trace une droite (d) et place un point O sur (d). Pose ton équerre : un côté de l'angle droit le long de (d), le coin sur O.

Trace la droite (d') le long de l'autre côté, puis code l'angle droit en O.

Les droites (d) et (d') sont sécantes en O et forment un angle droit. Donc $(d) \perp (d')$. Tu peux aussi écrire $(d') \perp (d)$: les deux écritures disent la même chose.



La droite (d') tracée à l'équerre au point O de (d) : l'angle droit codé en O donne (d) perpendiculaire à (d').

Une seule perpendiculaire par un point

Devine : Combien de perpendiculaires ?

Trace une droite (d) et place un point A en dehors de (d). Fais glisser ton équerre le long de (d). Combien de droites perpendiculaires à (d) passent par A ?

A. Aucune.
Faux.

Si : en faisant glisser l'équerre, tu en trouves une.

B. Deux droites différentes.

Faux.

Non : si tu essaies, ton deuxième tracé repasse exactement sur le premier.

C. Une seule.

Juste.

Oui. Une seule position de l'équerre fait passer le tracé par A.

D. Une infinité.

Faux.

Non : les autres positions de l'équerre donnent des tracés qui manquent le point A.

Correction

Il en passe une seule. En faisant glisser l'équerre le long de (d), un seul tracé passe par A.

Le cours l'énonce ci-dessous. C'est vrai aussi quand A est sur (d).

Propriété : Une seule perpendiculaire passant par un point

Soit (d) une droite et A un point. Par le point A, il passe **une et une seule** droite perpendiculaire à la droite (d).

Cela reste vrai que le point A soit sur la droite (d) ou en dehors.

Remarque : À retenir sur cet énoncé

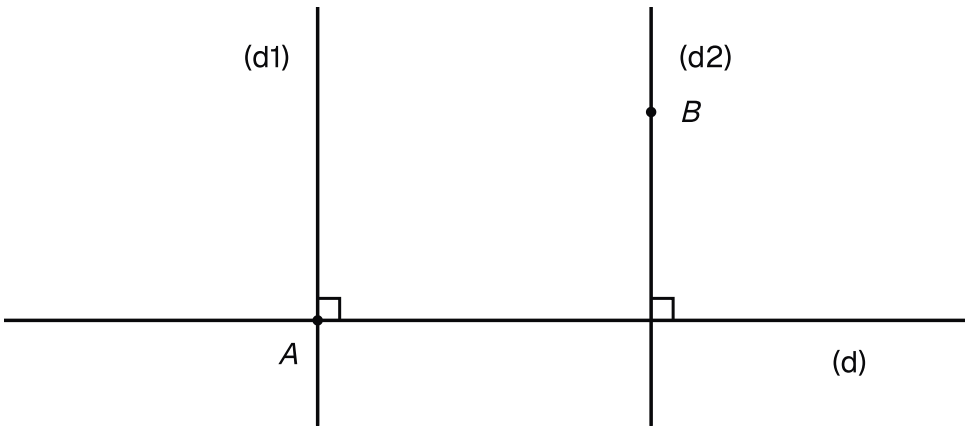
Ce résultat est admis. Tu ne le démontres pas en 1re année du collège : tu l'utilises. L'équerre te permet de le constater sur tes figures.

Exemple : un point sur la droite, un point en dehors

Trace une droite (d). Place un point A sur (d) et un point B en dehors de (d).

Par A, trace à l'équerre la perpendiculaire (d_1) à (d). Par B, trace la perpendiculaire (d_2) à (d).

Chaque point reçoit une seule perpendiculaire : $(d_1) \perp (d)$ et $(d_2) \perp (d)$.



Par le point A de (d) passe la perpendiculaire (d1) ; par le point B situé hors de (d) passe la perpendiculaire (d2).

Construire à l'équerre

Méthode : construire la perpendiculaire à une droite passant par un point

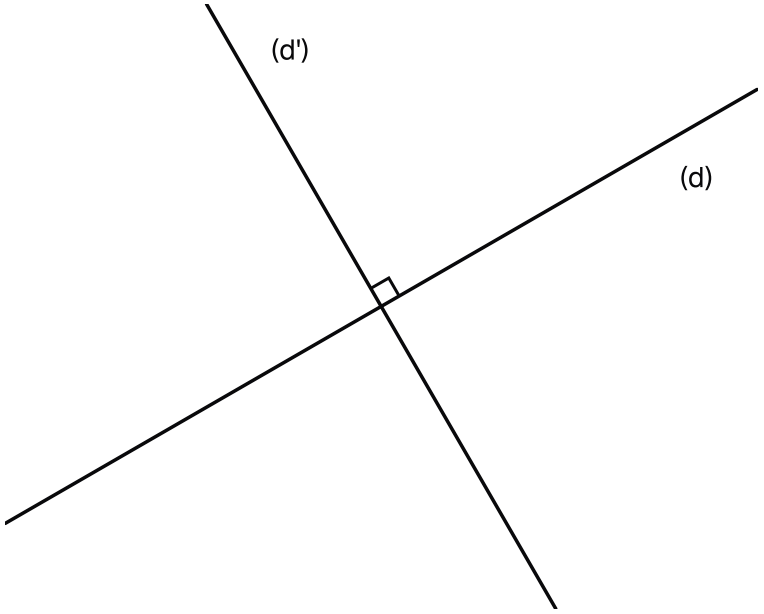
1. **Placer l'équerre** : pose un côté de l'angle droit le long de la droite (d).
2. **Faire glisser** l'équerre le long de (d), jusqu'à ce que l'autre côté de l'angle droit passe par le point A.
3. **Tracer et coder** : trace la droite le long de ce côté, prolonge-la à la règle, puis code l'angle droit.

Attention : perpendiculaire ne veut pas dire verticale

✗ « La droite (d') n'est pas verticale, donc elle n'est pas perpendiculaire à (d). »

✓ « Je pose l'équerre le long de (d) : l'angle entre (d) et (d') est droit, donc $(d) \perp (d')$. »

Ce qui compte, c'est l'angle droit entre les deux droites. La position sur la feuille ne compte pas : tourne ton cahier, les droites restent perpendiculaires.



Deux droites penchées, aucune verticale, et pourtant perpendiculaires : seul compte l'angle droit codé entre elles.

À toi : une droite penchée

Trace une droite (d) bien penchée sur ta feuille. Place un point A en dehors de (d).

Construis la droite (d') perpendiculaire à (d) passant par A, puis appelle H le point d'intersection. Écris avec un symbole la relation entre (d') et (d).

Indice 1
Utilise la méthode à l'équerre de cette étape.
Indice 2
Pose d'abord un côté de l'angle droit le long de (d), puis fais glisser l'équerre jusqu'au point A.
Indice 3
Point délicat : l'équerre suit la droite (d), jamais le bord de la feuille. Ta droite (d') sera penchée, elle aussi.

Réponse
Tu obtiens une seule droite (d'), qui passe par A et coupe (d) en H.

Tu codes l'angle droit en H et tu écris $(d') \perp (d)$.

Si ta droite (d') est penchée, c'est normal : seul l'angle droit compte.

Attention : droite, segment, longueur

Pour deux points A et B :

- (AB) est la **droite** qui passe par A et B. Lis : « la droite AB ».
- $[AB]$ est le **segment** d'extrémités A et B. Lis : « le segment AB ».

- AB est la **longueur** de ce segment. Lis : « la longueur AB ».

✗ « $(AB) = 5$ cm » ou « $[AB] = 5$ cm »

✓ « $AB = 5$ cm »

Seul un segment a une longueur.

Droites parallèles

Des droites qui ne se rencontrent jamais

Devine : Les rails

Une voie ferrée est toute droite sur plusieurs kilomètres. Ses deux rails sont représentés par deux droites. Que prévois-tu ?

A. Les deux droites se rencontrent très loin, après le dessin.
Faux.
Non : si les rails se rencontraient, le train ne pourrait plus rouler. Les deux droites n'ont aucun point commun.

B. Les deux droites se coupent en faisant un angle droit.
Faux.
Non : les rails ne se croisent pas ; ce sont les traverses qui coupent les rails.

C. Les deux droites n'ont aucun point commun.
Juste.
Oui. Aussi loin que tu les prolonges, elles ne se rencontrent pas.

Correction
Les deux droites n'ont aucun point commun : l'écart entre les rails ne change pas.

Le cours donne un nom à ces droites juste après.

Les lignes de ton cahier, les deux bords d'une règle, les étagères d'une bibliothèque : ces tracés ne se rencontrent jamais. On dit que ce sont des droites **parallèles**.

Il existe aussi un cas spécial. Si tu traces une droite, puis repasses exactement dessus, tu obtiens deux droites **confondues** : c'est la même droite.

Définition : Droites parallèles

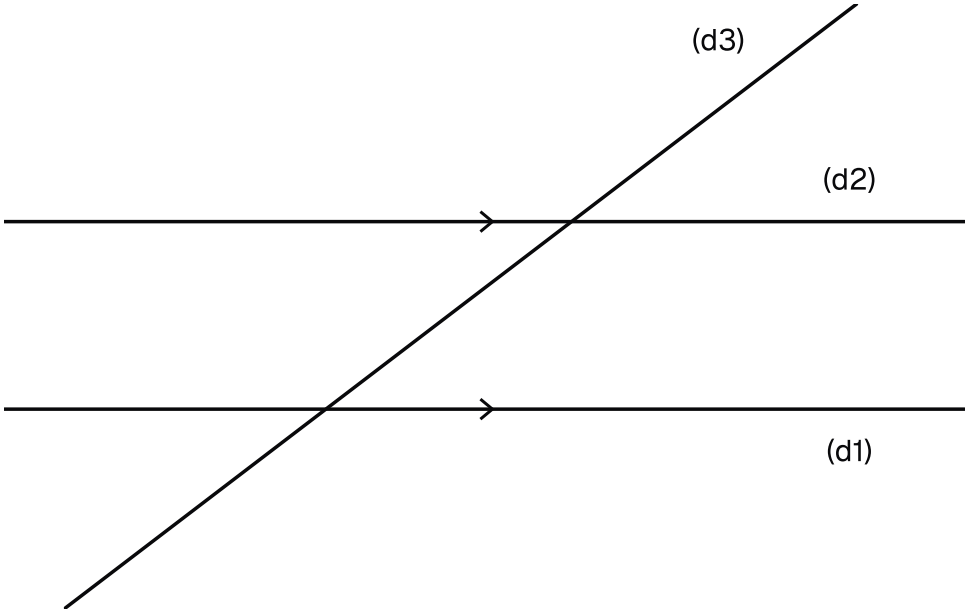
Deux droites d'un même plan qui n'ont **aucun point commun** sont dites **parallèles**. Deux droites **confondues**, c'est-à-dire une même droite tracée deux fois, sont aussi dites parallèles. Si les droites (d) et (d') sont parallèles, on écrit $(d) \parallel (d')$.

Ainsi, deux droites d'un même plan sont toujours soit sécantes, soit parallèles.

Exemple : sur une page de cahier

Prends deux lignes imprimées de ton cahier et nomme-les (d_1) et (d_2). Elles n'ont aucun point commun : $(d_1) \parallel (d_2)$. Le symbole $\parallel$ se lit « est parallèle à ».

Trace maintenant une droite (d_3) qui traverse la page en biais. Elle coupe (d_1) en un seul point : (d_3) et (d_1) sont sécantes, pas parallèles.



Les lignes (d1) et (d2) du cahier n'ont aucun point commun ; la droite (d3), tracée en biais, les traverse.

Sécantes ou parallèles

Vérifie : Deux points communs

Deux droites d'un même plan ont deux points communs distincts A et B. Que peux-tu dire de ces deux droites ?

A. Elles sont confondues : c'est la même droite.

Juste.
Oui. Par A et B passe une seule droite : les deux droites sont la même droite (AB).

B. Elles sont sécantes en A et en B.

Faux.
Non : deux droites sécantes ont un seul point commun, pas deux.

C. Elles sont perpendiculaires.

Faux.

Non : rien ne parle d'angle droit. Deux droites perpendiculaires n'ont d'ailleurs qu'un seul point commun.

Correction
Par deux points distincts, il passe une seule droite. Les deux droites sont donc la même droite (AB) : elles sont confondues.

D'après la définition, deux droites confondues sont parallèles.

Attention : une droite est illimitée

Sur ta feuille, tu ne traces qu'un morceau de chaque droite. Deux tracés qui ne se touchent pas peuvent se couper plus loin, en dehors du dessin.

✗ « Mes deux tracés ne se coupent pas sur la feuille, donc les droites sont parallèles. »

✓ « Je prolonge les tracés à la règle, ou j'utilise une propriété du cours, avant de conclure. »

À toi : sécantes ou parallèles ?

Pour chaque paire de droites, dis si elles sont sécantes ou parallèles.

1. Les deux bords d'une règle droite.
2. Deux rues qui se croisent à un carrefour.
3. Une droite (d) et cette même droite (d) tracée une deuxième fois.

Indice 1
Compte les points communs des deux droites.
Indice 2
Un seul point commun : sécantes. Aucun point commun : parallèles.
Indice 3
Point délicat : une droite tracée deux fois est confondue avec elle-même. La définition la range parmi les droites parallèles.

Réponse
1. Les bords d'une règle n'ont aucun point commun : ils sont parallèles.
2. Les deux rues ont un seul point commun, le carrefour : elles sont sécantes.
3. Les deux tracés sont confondus : d'après la définition, $(d) \parallel (d)$.

Une seule parallèle par un point

Devine : Une deuxième étagère

Sur un mur, une étagère droite est déjà posée. Tu veux en poser une deuxième, parallèle à la première, en la fixant à un clou planté au point A. Combien de positions sont possibles ?

A. Une seule, mais seulement si l'étagère est horizontale.

Faux.

Non : parallèle ne veut pas dire horizontale. Même si la première étagère est penchée, une seule position convient.

B. Une infinité : il suffit de la pencher.

Faux.

Non : penchée, la deuxième étagère finirait par rencontrer la première.

C. Deux : une au-dessus du clou, une au-dessous.

Faux.

Non : l'étagère doit passer par le clou lui-même. Il n'y a qu'une position possible.

D. Une seule position.

Juste.

Oui. Par le point A passe une seule parallèle à la première étagère.

Correction

Une seule position convient.

Par un point donné, il passe une seule droite parallèle à une droite donnée. C'est la propriété suivante.

Propriété : Une seule parallèle passant par un point

Soit (d) une droite et A un point. Par le point A, il passe **une et une seule** droite parallèle à la droite (d).

Si le point A est sur la droite (d), cette parallèle est la droite (d) elle-même.

Remarque : À retenir sur cet énoncé

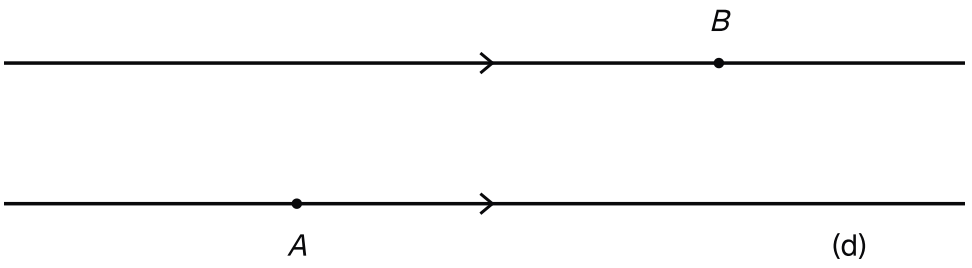
Ce résultat est admis. Il ne se démontre pas avec les outils du collège : c'est une règle de base de la géométrie du plan.

Tu l'utiliseras dans tes justifications.

Exemple : la parallèle passant par un point

Nomme (d) une ligne de ton cahier. Place un point A sur (d) et un point B sur la ligne suivante.

La parallèle à (d) passant par A est la droite (d) elle-même. La parallèle à (d) passant par B est la ligne qui porte B : c'est la seule.



Le point A est sur la ligne (d) et le point B sur la ligne suivante : chacun est porté par sa seule parallèle à (d).

Deux perpendiculaires à une même droite

Prédire

Devine : Deux perpendiculaires

Trace une droite (Δ). Le nom (Δ) se lit « delta » : c'est une lettre grecque, utilisée ici comme nom de droite.

Place deux points A et B sur (Δ), avec $AB = 4$ cm. Trace la perpendiculaire (d_1) à (Δ) passant par A, puis la perpendiculaire (d_2) à (Δ) passant par B.

Que prévois-tu pour (d_1) et (d_2) ?

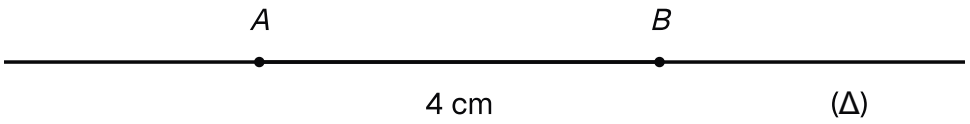
A. Elles sont perpendiculaires entre elles.
Faux.
Non : (d_1) et (d_2) font chacune un angle droit avec (Δ), pas entre elles.

B. Elles sont parallèles.
Juste.
Oui. Prolonge-les : l'écart entre elles reste de 4 cm.

C. Elles se coupent loin, hors de la feuille.
Faux.
Prolonge-les à la règle : l'écart entre elles ne change pas.

Correction
Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles. Sur ta figure, l'écart entre elles reste de 4 cm sur toute la longueur.

La propriété suivante le dit pour toutes les figures, et sa preuve ne mesure rien.

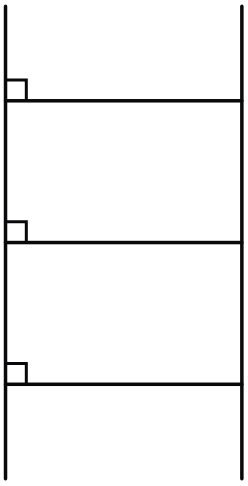


Les données de l'activité : la droite (Δ) et deux de ses points A et B, distants de 4 cm ; les perpendiculaires restent à tracer.

Exemple : les barreaux d'une échelle

Les montants d'une échelle sont droits. Chaque barreau est fixé perpendiculairement au montant de gauche.

Deux barreaux ne se rencontrent jamais : ils sont parallèles. Sans cela, l'échelle serait bien difficile à monter.



Une échelle schématisée : chaque barreau forme un angle droit avec le montant de gauche.

L'énoncé et sa preuve

Pourquoi est-ce vrai ? Mesurer l'écart sur une figure ne suffit pas : un dessin ne démontre rien.

La preuve sous l'énoncé utilise seulement la définition des droites parallèles et l'unicité de la perpendiculaire passant par un point.

Propriété : Deux droites perpendiculaires à une même droite

Si deux droites (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires à une même droite (Δ), alors les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

En symboles : si $(d_1) \perp (\Delta)$ et $(d_2) \perp (\Delta)$, alors $(d_1) \parallel (d_2)$.

Démonstration

Étape 1. Deux cas sont possibles : les droites (d_1) et (d_2) n'ont aucun point commun, ou elles ont au moins un point commun.

Étape 2. Premier cas : elles n'ont aucun point commun. D'après la définition des droites parallèles, elles sont parallèles.

Étape 3. Second cas : elles ont un point commun M. Alors (d_1) et (d_2) passent toutes les deux par M et sont perpendiculaires à (Δ). Or, d'après la propriété « une seule perpendiculaire passant par un point », il n'existe qu'une seule droite de ce type. Donc (d_1) et (d_2) sont confondues, et deux droites confondues sont parallèles.

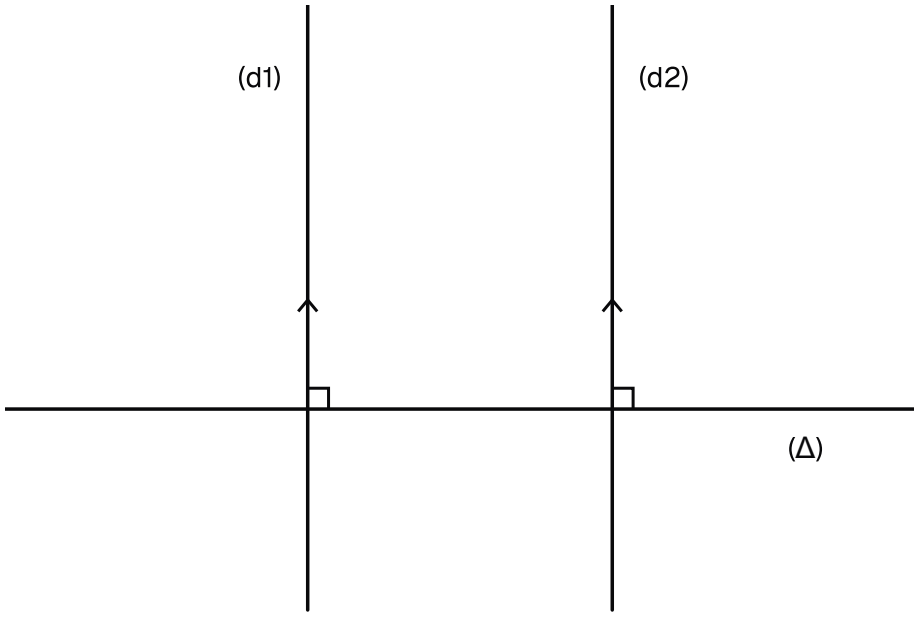
Conclusion. Dans les deux cas, $(d_1) \parallel (d_2)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

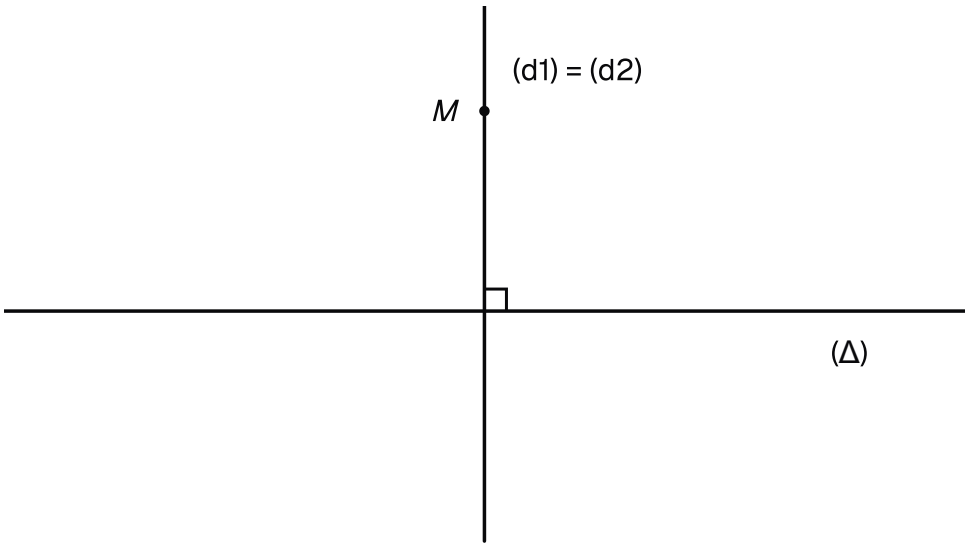
La preuve **sépare deux cas**, et ces deux cas couvrent toutes les possibilités.

Sans point commun, la définition suffit. Avec un point commun, l'unicité de la perpendiculaire force les deux droites à n'en faire qu'une.

C'est pour ce cas que la définition compte les droites confondues.



Premier cas de la preuve : (d1) et (d2), perpendiculaires à (Δ), n'ont aucun point commun, elles sont donc parallèles.



Second cas de la preuve : passant toutes deux par M et perpendiculaires à (Δ), les droites (d1) et (d2) n'en font qu'une.

Vérifie : Le second cas de la preuve

Dans le second cas de la preuve, (d_1) et (d_2) passent par un même point M et sont perpendiculaires à (Δ). Quel argument montre qu'elles sont confondues ?

A. Elles sont toutes les deux verticales.

Faux.

Non : une perpendiculaire n'est pas forcément verticale. La position sur la feuille ne prouve rien.

B. Je le contrôle à l'équerre sur mon dessin.

Faux.

Non : un contrôle sur un dessin ne démontre pas. La preuve doit valoir pour toutes les figures.

C. Par M passe une seule perpendiculaire à (Δ).

Juste.

Oui : c'est la propriété de la section « Droites perpendiculaires ». Les deux droites sont donc la même.

D. Deux droites sécantes sont toujours perpendiculaires.

Faux.

Non : deux droites sécantes ne forment pas toujours un angle droit.

Correction

Par le point M, il passe une seule droite perpendiculaire à (Δ). Comme (d_1) et (d_2) sont deux droites de ce type, elles sont confondues.

Deux droites confondues sont parallèles, donc $(d_1) \parallel (d_2)$.

Exemple : Contre-exemple : il faut la même droite

Trace deux droites perpendiculaires (Δ) et (Δ'), qui se coupent en O. Le nom (Δ') se lit « delta prime ».

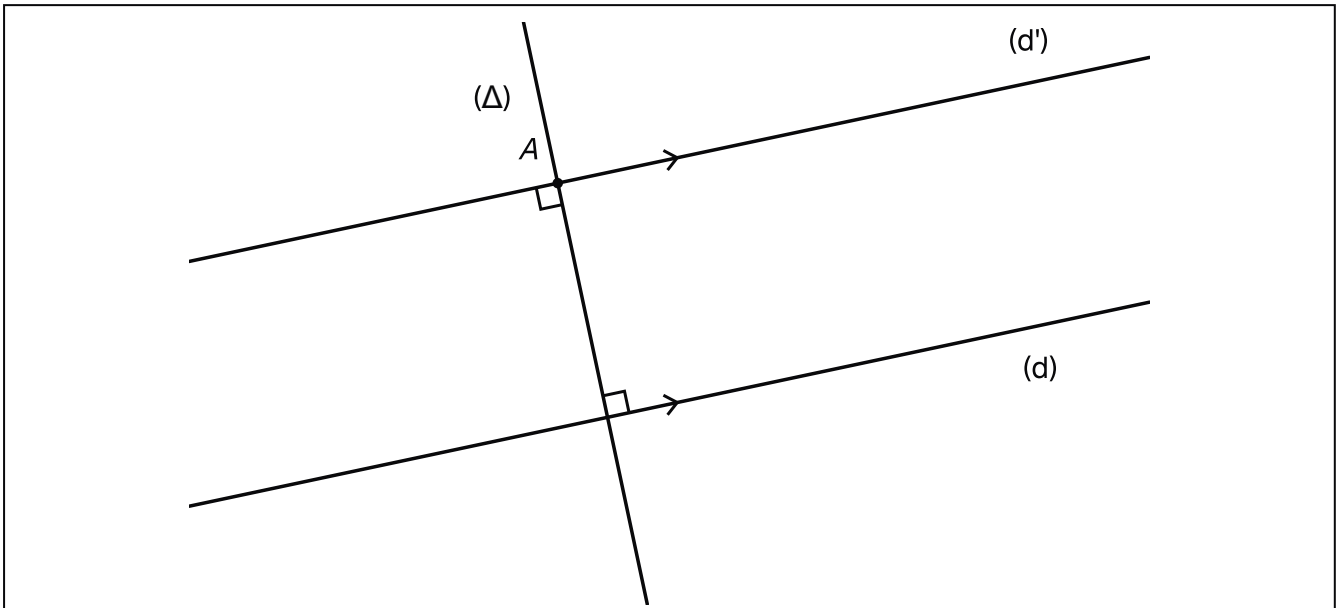
La droite (Δ') est perpendiculaire à (Δ), et la droite (Δ) est perpendiculaire à (Δ').

Mais ces deux droites se coupent en O : elles ne sont pas parallèles. Chacune est perpendiculaire à une droite, mais pas à la même.

Construire une parallèle

Méthode : construire la parallèle à une droite passant par un point

1. **Première perpendiculaire** : trace la droite (Δ) perpendiculaire à (d) passant par le point A.
2. **Deuxième perpendiculaire** : trace la droite (d') perpendiculaire à (Δ) passant par A.
3. **Justifier** : (d) et (d') sont perpendiculaires à la même droite (Δ), donc $(d) \parallel (d')$.



La parallèle à (d) passant par A, obtenue avec deux angles droits successifs : d'abord (Δ), puis (d').

Attention : un dessin ne démontre pas

Un angle qui a l'air droit peut mesurer $88°$ ou $92°$. L'œil ne fait pas la différence.

✗ « Sur mon dessin, les droites ont l'air parallèles, donc $(d) \parallel (d')$. »

✓ « D'après les codages, $(d) \perp (\Delta)$ et $(d') \perp (\Delta)$. Deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles, donc $(d) \parallel (d')$. »

La mesure sert à contrôler une construction, pas à démontrer.

À toi : la parallèle par un point

Trace une droite (d) et place un point A en dehors de (d). Construis à l'équerre la parallèle à (d) passant par A.

Puis écris la phrase qui justifie ta construction.

Indice 1
Utilise la méthode : deux perpendiculaires successives.
Indice 2
Trace d'abord (Δ), perpendiculaire à (d) passant par A. Trace ensuite (d'), perpendiculaire à (Δ) passant par A.
Indice 3
Point délicat : la deuxième droite est perpendiculaire à (Δ), pas à (d). Sinon, tu retombes sur (Δ).

Réponse
Tu traces d'abord la perpendiculaire (Δ) à (d) passant par A. Puis tu traces la perpendiculaire (d') à (Δ) passant par A.

Justification : $(d) \perp (\Delta)$ et $(d') \perp (\Delta)$. Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, donc $(d') \parallel (d)$.

Par A passe une seule parallèle à (d) : c'est bien celle que tu cherchais.

Parallèles et perpendiculaires

Une perpendiculaire à deux parallèles

Devine : Les traverses

Les deux rails d'une voie ferrée droite sont parallèles. Une traverse est posée perpendiculairement au premier rail. Que fait-elle avec le second rail ?

A. Elle le coupe aussi en faisant un angle droit.
Juste.
Oui. C'est la prédiction du début du chapitre, avec des rails au lieu des lignes du cahier.

B. Elle ne le touche pas.
Faux.
Non : la traverse est portée par une droite, illimitée ; elle atteint le second rail.

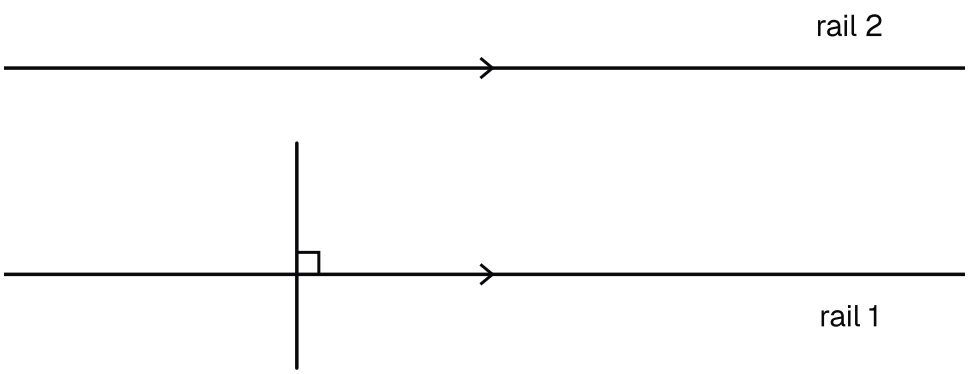
C. Elle le coupe, mais en biais.
Faux.
Non : contrôle à l'équerre sur une figure, l'angle est droit. La propriété suivante le confirme.

D. Cela dépend de l'écart entre les rails.
Faux.
Non : l'écart ne change rien à l'angle.

Correction

La traverse coupe le second rail en faisant aussi un angle droit.

Tu l'avais prédit au début du chapitre avec les lignes du cahier. La propriété suivante l'énonce.



Les données : deux rails parallèles et une traverse posée à angle droit sur le rail 1 ; le rail 2 est laissé sans codage.

Propriété : Une perpendiculaire à l'une de deux droites parallèles

Si deux droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

En symboles : si $(d_1) \parallel (d_2)$ et $(\Delta) \perp (d_1)$, alors $(\Delta) \perp (d_2)$.

Remarque : À retenir sur cet énoncé

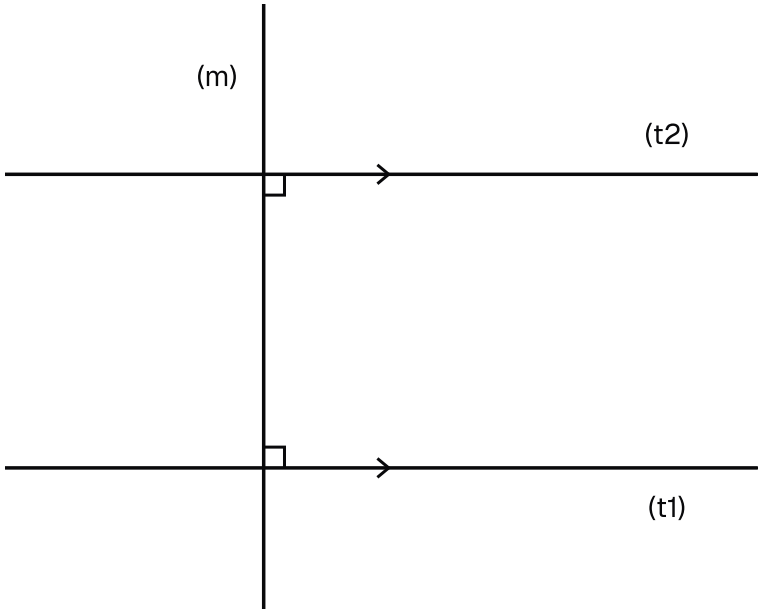
Ce résultat est admis. Il sera démontré dans un chapitre suivant.

Pour l'instant, tu le constates à l'équerre et tu l'utilises dans tes justifications.

Exemple : un terrain de football

Sur un terrain de football, les deux lignes de touche (t_1) et (t_2) sont parallèles. La ligne médiane (m) est perpendiculaire à (t_1).

On sait que $(t_1) \parallel (t_2)$ et $(m) \perp (t_1)$. D'après la propriété précédente, $(m) \perp (t_2)$: la ligne médiane coupe aussi l'autre ligne de touche à angle droit.



Sur le terrain, la ligne médiane (m) coupe la ligne de touche (t1) à angle droit, et donc aussi la ligne de touche (t2).

Justifier avec une perpendiculaire

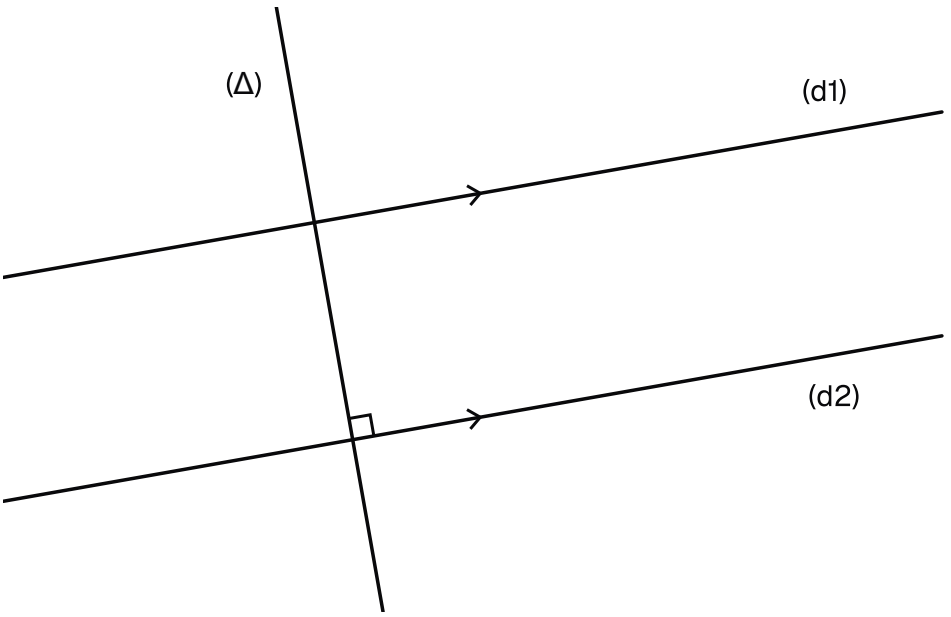
À toi : trois droites

On sait que $(d_1) \parallel (d_2)$ et que $(\Delta) \perp (d_2)$. Que peux-tu dire de (Δ) et (d_1) ? Justifie.

Indice 1
Cherche une propriété qui parte de deux droites parallèles et d'une perpendiculaire.
Indice 2
Relis la propriété de l'étape précédente : « perpendiculaire à l'une de deux parallèles ».
Indice 3
Point délicat : ici, (Δ) est perpendiculaire à (d_2), pas à (d_1). La propriété marche dans les deux sens : « l'une » peut être (d_2).

Réponse
On obtient $(\Delta) \perp (d_1)$. En effet, $(d_1) \parallel (d_2)$ et $(\Delta) \perp (d_2)$.

Une perpendiculaire à l'une de deux droites parallèles est aussi perpendiculaire à l'autre : (Δ) est donc perpendiculaire à (d_1).



Les données : (d1) parallèle à (d2), et (Δ) perpendiculaire à (d2) ; aucun angle n'est codé du côté de (d1).

Remarque : Coin devoir : rédiger avec une perpendiculaire

En devoir, on te donne : $(d_1) \parallel (d_2)$ et $(\Delta) \perp (d_1)$. On te demande ce que tu peux dire de (Δ) et de (d_2) : sont-elles parallèles, perpendiculaires, ou seulement sécantes ? Voici une rédaction complète :

« On sait que $(d_1) \parallel (d_2)$ et que $(\Delta) \perp (d_1)$. Or, si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre. Donc $(\Delta) \perp (d_2)$. »

Trois mots portent la rédaction : on sait que, or, donc.

Deux parallèles à une même droite

Devine : Trois étagères

Dans une bibliothèque, l'étagère du haut et l'étagère du bas sont toutes les deux parallèles à l'étagère du milieu. Que prévois-tu pour l'étagère du haut et celle du bas ?

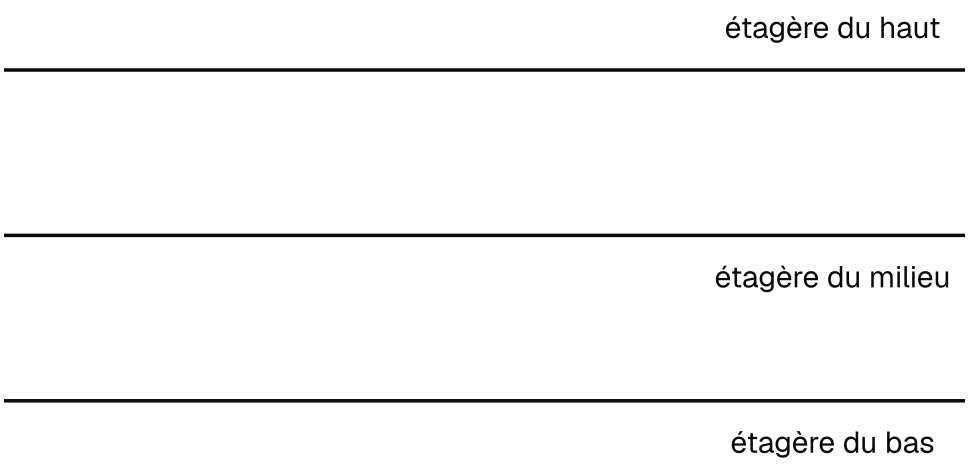
A. Elles sont perpendiculaires.
Faux.
Non : aucune ne fait un angle droit avec les autres.

B. Elles se rencontrent forcément quelque part.
Faux.
Non : sur la bibliothèque, elles gardent le même écart.

C. Elles sont parallèles.
Juste.

Oui. La propriété suivante le dit, et sa preuve n'utilise aucune mesure.

Correction
L'étagère du haut et l'étagère du bas sont parallèles. La propriété suivante l'énonce pour toutes les droites du plan.



Les trois étagères de la bibliothèque : celle du haut et celle du bas sont données parallèles à celle du milieu.

Exemple : trois droites sur ta feuille

Trace une droite (Δ). Place un point A au-dessus de (Δ) et un point B au-dessous. Avec la méthode des deux perpendiculaires, trace la parallèle (d_1) à (Δ) passant par A, puis la parallèle (d_2) à (Δ) passant par B.

Prolonge (d_1) et (d_2) à la règle : elles ne se coupent pas sur ta feuille.

Une droite est illimitée, donc ce constat ne suffit pas : la propriété suivante le démontre.

L'énoncé et sa preuve

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve suit le même chemin que pour deux perpendiculaires à une même droite. Cette fois, elle s'appuie sur l'unicité de la parallèle passant par un point.

Propriété : Deux droites parallèles à une même droite

Si deux droites (d_1) et (d_2) sont parallèles à une même droite (Δ), alors les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

En symboles : si $(d_1) \parallel (\Delta)$ et $(d_2) \parallel (\Delta)$, alors $(d_1) \parallel (d_2)$.

Démonstration

Étape 1. Deux cas sont possibles : les droites (d_1) et (d_2) n'ont aucun point commun, ou elles ont au moins un point commun.

Étape 2. Premier cas : elles n'ont aucun point commun. D'après la définition des droites parallèles, elles sont parallèles.

Étape 3. Second cas : elles ont un point commun M. Alors (d_1) et (d_2) passent toutes les deux par M et sont parallèles à (Δ). Or, d'après la propriété « une seule parallèle passant par un point », il n'existe qu'une seule droite de ce type. Donc (d_1) et (d_2) sont confondues, et deux droites confondues sont parallèles.

Conclusion. Dans les deux cas, $(d_1) \parallel (d_2)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Même chemin qu'à la section précédente : **deux cas**, sans point commun ou avec un point commun. Le second cas se règle avec l'unicité de la **parallèle** passant par un point.

Change la propriété, garde le chemin : c'est une idée que tu réutiliseras.

Vérifie : Le second cas

Dans le second cas de la preuve, (d_1) et (d_2) passent par un même point M et sont parallèles à (Δ). Quelle propriété montre qu'elles sont confondues ?

A. Par M passe une seule perpendiculaire à (Δ).
Faux.
Non : aucune droite de cet énoncé n'est perpendiculaire à (Δ).

B. Par M passe une seule parallèle à (Δ).
Juste.
Oui. Les deux droites sont deux parallèles à (Δ) passant par M : elles n'en font qu'une.

C. Deux droites qui ont un point commun sont sécantes.
Faux.
Non : des droites confondues ont aussi des points communs. Sécantes veut dire un seul point commun.

D. Elles ne se coupent pas sur mon dessin.
Faux.
Non : un dessin ne démontre pas, et une droite est illimitée.

Correction

Par le point M, il passe une seule parallèle à (Δ). Or (d_1) et (d_2) sont deux parallèles à (Δ) passant par M.

Elles n'en font donc qu'une : elles sont confondues, donc parallèles.

Exemple : trois lignes du cahier

Sur ton cahier, nomme (d_1) la troisième ligne, (Δ) la cinquième et (d_2) la huitième. On a $(d_1) \parallel (\Delta)$ et $(d_2) \parallel (\Delta)$, donc $(d_1) \parallel (d_2)$.

Trace maintenant une droite (d_3) en biais. Elle coupe (Δ) : elle n'est pas parallèle à (Δ). La propriété ne dit donc rien sur elle, et en effet (d_3) coupe (d_1).

Distance d'un point à une droite

Le chemin le plus court

Devine : La maison et la route

Une maison est construite à côté d'une route toute droite. On veut faire un chemin droit, le plus court possible, de la porte jusqu'à la route. Quel chemin choisir ?

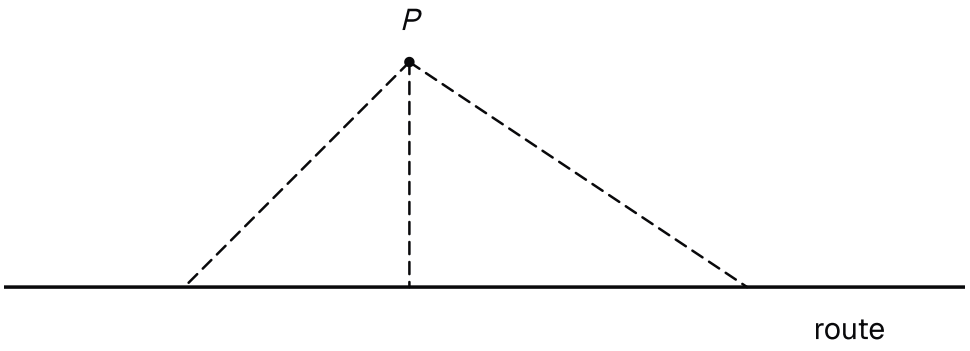
A. Le chemin qui arrive sur la route en biais.
Faux.
Non : un chemin en biais est plus long. Fais l'essai sur une figure.

B. N'importe lequel : ils ont tous la même longueur.
Faux.
Non : mesure plusieurs chemins sur une figure, leurs longueurs changent.

C. Le chemin qui arrive sur la route en faisant un angle droit.
Juste.
Oui. Le chemin perpendiculaire à la route est le plus court.

Correction
Le chemin le plus court arrive sur la route en faisant un angle droit : il est perpendiculaire à la route.

Le point où il touche la route porte un nom, donné juste après.



Trois chemins droits possibles entre la porte P de la maison et la route, à comparer avant de choisir.

Le point où le chemin perpendiculaire touche la route s'appelle le **projeté orthogonal** de la porte sur la route. « Orthogonal » est un autre mot pour « qui forme un angle droit ».

La longueur de ce chemin perpendiculaire s'appelle la **distance** de la porte à la route.

Définition : Projeté orthogonal d'un point ; distance d'un point à une droite

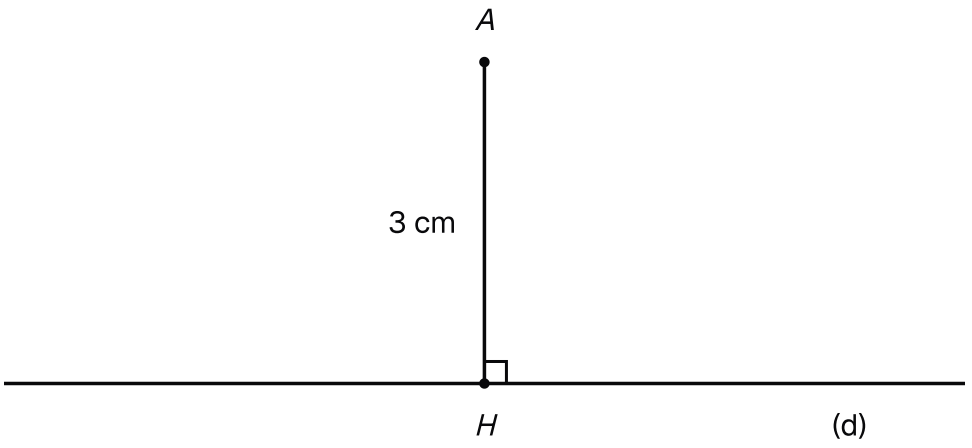
Soit (d) une droite et A un point. La perpendiculaire à la droite (d) passant par A coupe la droite (d) en un point H. Ce point H est appelé le **projeté orthogonal** du point A sur la droite (d).

La longueur AH est appelée la **distance du point A à la droite** (d). Si le point A est sur la droite (d), alors H est le point A lui-même, et cette distance est nulle.

Exemple : un point à 3 cm d'une droite

Trace une droite (d) et place un point H sur (d). Trace la perpendiculaire à (d) en H, et place sur elle un point A avec $AH = 3$ cm. Code l'angle droit en H.

Le point H est le projeté orthogonal de A sur (d). La distance du point A à la droite (d) est $AH = 3$ cm.



Le point H est le projeté orthogonal de A sur (d), et la distance du point A à la droite (d) vaut AH = 3 cm.

La plus courte distance

Vérifie : Comparer deux longueurs

Trace une droite (d) et un point H sur (d). Place A sur la perpendiculaire à (d) en H, avec $AH = 4$ cm. Place ensuite M sur (d), avec $HM = 3$ cm. Mesure AM. Que trouves-tu ?

A. $AM = 4$ cm, comme AH.

Faux.

Non : mesure à nouveau. M n'est pas le projeté orthogonal de A.

B. $AM = 3$ cm, comme HM.

Faux.

Non : HM est mesuré sur la droite (d), pas depuis A.

C. $AM = 7$ cm, soit $AH + HM$.

Faux.

Non : le chemin direct de A à M est plus court que le détour par H.

D. $AM = 5$ cm, plus que AH.

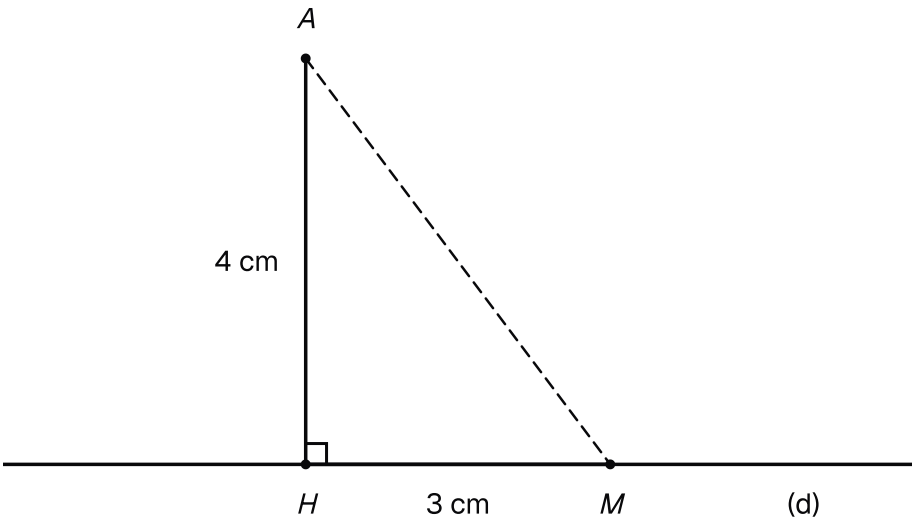
Juste.

Oui. Le segment $[AM]$ arrive en biais sur (d) : il est plus long que $[AH]$.

Correction

Tu dois mesurer $AM = 5$ cm. C'est plus que $AH = 4$ cm : le chemin en biais est plus long que le chemin perpendiculaire.

La propriété suivante dit que c'est vrai pour tout point M de (d) différent de H.



Les données de l'activité : AH = 4 cm sur la perpendiculaire en H, HM = 3 cm sur (d), et le segment [AM] à mesurer.

Propriété : La distance d'un point à une droite est la plus courte

Soit (d) une droite, A un point et H son projeté orthogonal sur la droite (d). Pour tout point M de la droite (d), on a $AM \geq AH$.

Si de plus le point M est différent du point H, alors $AM > AH$.

Remarque : À retenir sur cet énoncé

Ce résultat est admis. Sa preuve demande un outil que tu verras dans une classe suivante. Tu peux le contrôler en mesurant, comme dans l'activité.

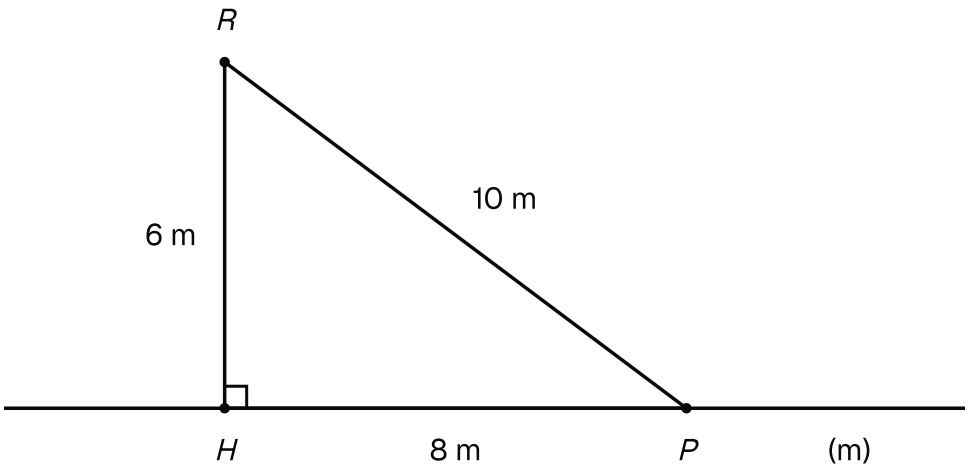
Lis : $AM \geq AH$ veut dire « AM est plus grand que AH, ou égal à AH ». $AM > AH$ veut dire « AM est plus grand que AH, et pas égal ».

Exemple : le tuyau du jardin

Dans un jardin, un robinet R est près d'un mur droit (m). Le projeté orthogonal de R sur le mur est le point H, avec $RH = 6$ m. Un point P du mur est à 8 m de H.

Le tuyau le plus court, du robinet jusqu'au mur, mesure 6 m : il arrive en H.

Un tuyau tendu jusqu'à P est plus long : on le mesure, et on trouve $RP = 10$ m. On a bien $RP > RH$.



Le tuyau [RH], à angle droit sur le mur, mesure 6 m ; le tuyau tendu jusqu'au point P du mur en mesure 10.

Construire et mesurer

Méthode : projeté orthogonal et distance d'un point à une droite

1. **Tracer** à l'équerre la perpendiculaire à (d) passant par le point A.
2. **Placer** le point H, intersection de cette perpendiculaire avec (d) : c'est le projeté orthogonal de A.
3. **Mesurer** la longueur AH à la règle graduée : c'est la distance du point A à la droite (d).

Attention : la distance se mesure sur la perpendiculaire

✗ « Je choisis un point M de (d) au hasard : la distance de A à (d) est AM. »

✓ « Je construis le projeté orthogonal H de A sur (d) : la distance de A à (d) est AH. »

Toute autre longueur AM, avec M sur (d) et M différent de H, est plus grande que AH.

À toi : la bonne longueur

Trace une droite (d) et place deux points E et F sur (d), avec $EF = 6$ cm. Au compas, place un point A tel que $AE = 5$ cm et $AF = 5$ cm.

Construis le projeté orthogonal H de A sur (d), puis donne la distance du point A à la droite (d).

Indice 1
Utilise la méthode de cette étape : perpendiculaire, intersection, mesure.
Indice 2

Trace la perpendiculaire à (d) passant par A ; elle coupe (d) en H. Mesure ensuite AH.

Indice 3

Point délicat : la distance n'est ni AE ni AF. Ces deux longueurs arrivent en biais sur (d).

Réponse

Le point H tombe au milieu de $[EF]$: $EH = HF = 3$ cm. Tu mesures $AH = 4$ cm.

La distance du point A à la droite (d) est donc 4 cm, plus petite que $AE = 5$ cm.

Médiatrice d'un segment

Plier un segment

Devine : Le pli

Trace un segment sur une feuille. Plie la feuille de sorte que les deux extrémités du segment se superposent. Que prévois-tu pour le pli ?

A. Il passe par le milieu, mais penché.

Faux.

Il passe bien par le milieu ; contrôle aussi l'angle à l'équerre : il est droit, le pli n'est pas penché.

B. Il fait un angle droit, mais loin du milieu.

Faux.

L'angle est bien droit, mais le pli ne passe pas loin du milieu : il coupe le segment en son milieu.

C. Il passe par le milieu et fait un angle droit.

Juste.

Oui. Le pli a les deux qualités à la fois : milieu et angle droit.

Correction

Le pli passe par le milieu du segment et fait un angle droit avec lui.

Une droite qui a ces deux qualités porte un nom : la **médiatrice** du segment.

Rappel du primaire : le milieu d'un segment est le point du segment situé à la même distance de ses deux extrémités.

Pour un segment $[AB]$ de 7 cm, le milieu I est sur $[AB]$, avec $AI = IB = 3{,}5$ cm.

Définition : Médiatrice d'un segment

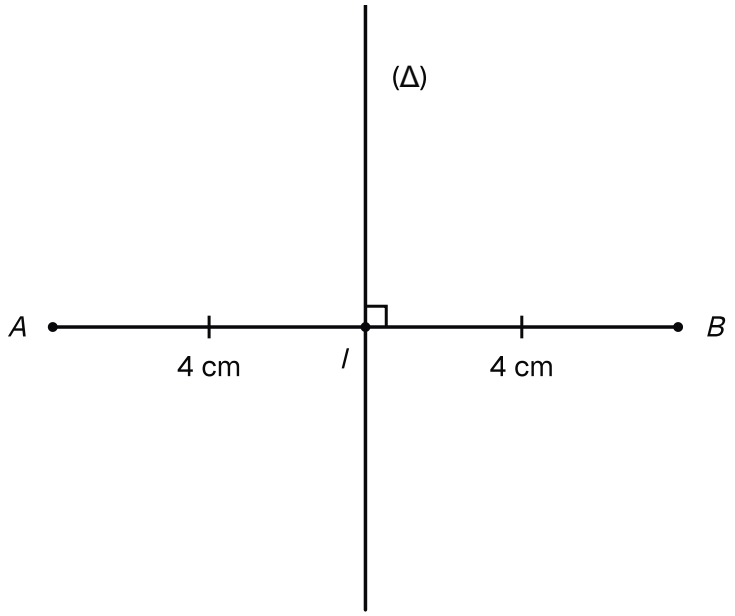
Soit A et B deux points distincts. La **médiatrice** du segment $[AB]$ est la droite **perpendiculaire** à la droite (AB) qui passe par le **milieu** du segment $[AB]$.

Exemple : la médiatrice à la règle et à l'équerre

Trace un segment $[AB]$ de 8 cm. Mesure et place son milieu I : $AI = IB = 4$ cm.

Trace à l'équerre la droite (Δ) perpendiculaire à (AB) passant par I. Code l'angle droit en I, et code $AI = IB$ par deux petits traits identiques.

La droite (Δ) est perpendiculaire à (AB) et passe par le milieu de $[AB]$: c'est la médiatrice de $[AB]$.



La médiatrice (Δ) du segment [AB] de 8 cm : elle passe par le milieu I et coupe [AB] à angle droit.

Des points à égale distance

Devine : Mesurer deux longueurs

Garde ta figure : $[AB]$ de 8 cm et sa médiatrice (Δ). Place un point P sur (Δ), à 3 cm de I. Mesure PA et PB. Que trouves-tu ?

A. $PA = PB = 5$ cm.

Juste.
Oui. Le point P est à la même distance de A et de B.

B. $PA = 3$ cm et $PB = 4$ cm.

Faux.
Non : 3 cm et 4 cm sont les longueurs PI et IB. Mesure bien depuis P.

C. $PA = PB = 3$ cm.

Faux.
Non : 3 cm est la longueur PI. Les segments $[PA]$ et $[PB]$ sont plus longs.

D. $PA = PB = 7$ cm, soit $PI + IA$.

Faux.
Non : le chemin direct de P à A est plus court que le détour par I.

Correction
Tu mesures $PA = 5$ cm et $PB = 5$ cm : les deux longueurs sont égales. On dit que P est **équidistant** de A et de B.

La propriété suivante dit que c'est vrai pour tout point de la médiatrice, et seulement pour eux.

Propriété : Propriété caractéristique de la médiatrice

Soit A et B deux points distincts, et M un point.

- Si le point M est sur la médiatrice du segment $[AB]$, alors $MA = MB$: on dit que M est **équidistant** des points A et B.
- Réciproquement, si $MA = MB$, alors le point M est sur la médiatrice du segment $[AB]$.

Ainsi, la médiatrice du segment $[AB]$ est formée de tous les points équidistants de A et de B.

Remarque : À retenir sur cet énoncé

Ce résultat est admis. Sa preuve utilise des outils que tu verras en 2e année du collège.

Tu l'as constaté en mesurant ; ici, tu l'utilises.

En clair : la propriété marche dans les deux sens. Un point de la médiatrice est à égale distance de A et de B.

« Réciproquement » annonce l'autre sens : un point à égale distance de A et de B est sur la médiatrice.

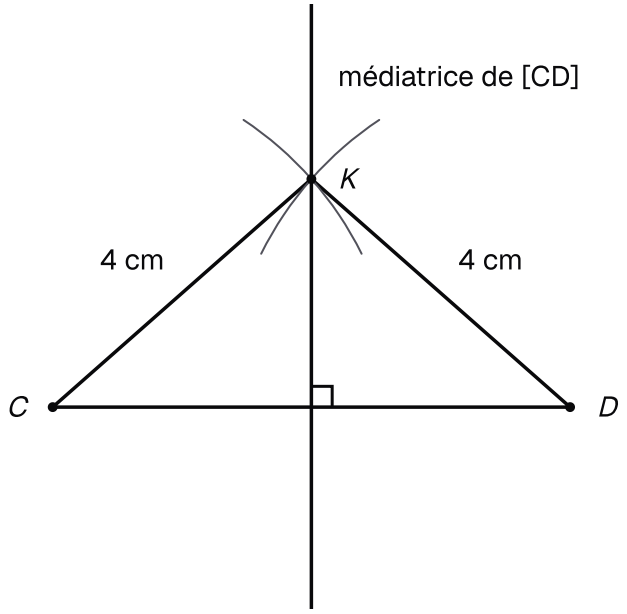
Elle suffit donc à reconnaître les points de la médiatrice : on dit que c'est une propriété **caractéristique** de la médiatrice.

Exemple : un point équidistant

Trace un segment $[CD]$ de 6 cm. Au compas, place un point K avec $KC = 4$ cm et $KD = 4$ cm.

On sait que $KC = KD$. D'après la propriété caractéristique de la médiatrice, le point K est sur la médiatrice de $[CD]$.

Contrôle-le : la droite qui passe par K et par le milieu de $[CD]$ est perpendiculaire à (CD).



Le point K, placé au compas à 4 cm de C et de D, se trouve sur la médiatrice du segment [CD].

Construire la médiatrice

Méthode : construire la médiatrice d'un segment

Avec la règle graduée et l'équerre :

1. **Mesurer** le segment $[AB]$ et placer son milieu I.
2. **Tracer** la perpendiculaire à (AB) passant par I.

Avec le compas :

1. **Tracer deux arcs** de même rayon (un arc est un morceau de cercle), l'un de centre A, l'autre de centre B : garde le même écartement du compas. Choisis un rayon plus grand que la moitié de AB : les arcs se coupent en deux points M et N.
2. **Tracer** la droite (MN). Comme $MA = MB$ et $NA = NB$, les points M et N sont sur la médiatrice : c'est la droite (MN).

Trouve l'erreur : Deux arcs

Lina veut tracer la médiatrice de $[AB]$, avec $AB = 6$ cm. Elle trace un arc de centre A et de rayon 4 cm. Puis elle trace un arc de centre B et de rayon 5 cm. Les arcs se coupent en P et Q. Où est l'erreur ?

A. Les rayons sont différents : PA n'est pas égal à PB.
Juste.

Oui. Avec $PA = 4$ cm et $PB = 5$ cm, P n'est pas équidistant de A et de B : il n'est pas sur la médiatrice.

B. Les rayons sont trop petits.

Faux.

Non : 4 cm et 5 cm dépassent la moitié de AB, qui vaut 3 cm. Les arcs se coupent bien.

C. Il ne fallait pas utiliser le compas.

Faux.

Non : le compas est un bon outil ici. Le problème vient des rayons.

D. Il n'y a pas d'erreur.

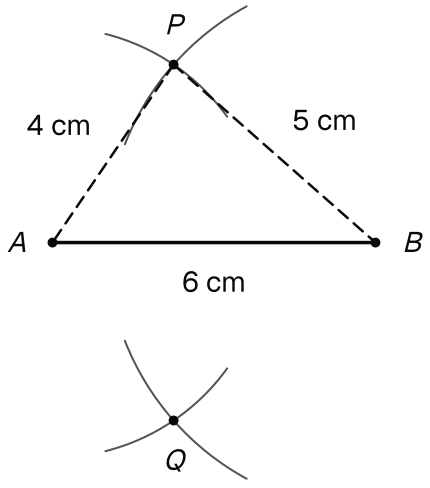
Faux.

Si : la droite (PQ) ne passe pas par le milieu de $[AB]$; ce n'est pas la médiatrice.

Correction

Les deux arcs doivent avoir le même rayon. Ici, $PA = 4$ cm et $PB = 5$ cm : P n'est pas sur la médiatrice de $[AB]$.

Il faut reprendre avec un seul rayon, par exemple 4 cm pour les deux arcs.



La construction de Lina : un arc de rayon 4 cm autour de A, un arc de rayon 5 cm autour de B, qui se croisent en P et Q.

Attention : perpendiculaire et milieu

La médiatrice de $[AB]$ a deux qualités à la fois : elle est perpendiculaire à (AB), et elle passe par le milieu de $[AB]$.

X « La droite est perpendiculaire à (AB), donc c'est la médiatrice de $[AB]$. »

✓ « La droite est perpendiculaire à (AB) et passe par le milieu de $[AB]$: c'est la médiatrice de $[AB]$. »

À toi : la médiatrice au compas

Trace un segment $[EF]$ de 5 cm. Construis sa médiatrice au compas.

Puis contrôle ta construction avec la règle graduée et l'équerre.

Indice 1
Utilise la méthode au compas : deux arcs de même rayon.
Indice 2
Prends par exemple un rayon de 4 cm. Trace un arc de centre E et un arc de centre F, puis la droite qui passe par leurs deux points d'intersection.
Indice 3
Point délicat : le rayon doit dépasser la moitié de EF, ici $2{,}5$ cm. Avec 2 cm, les arcs ne se coupent pas.

Réponse
Prenons un rayon de 4 cm. Les deux arcs se coupent en deux points M et N, avec $ME = MF = 4$ cm et $NE = NF = 4$ cm. La droite (MN) est la médiatrice de $[EF]$.

Contrôle : elle coupe $[EF]$ en son milieu, à $2{,}5$ cm de E, et elle est perpendiculaire à (EF).

Reconnaître une médiatrice

Méthode : montrer qu'une droite est la médiatrice d'un segment

1. **Chercher** deux points distincts M et N, chacun équidistant de A et de B : $MA = MB$ et $NA = NB$.
2. **Appliquer** la propriété caractéristique : M et N sont sur la médiatrice de $[AB]$.
3. **Conclure** : par deux points distincts passe une seule droite, donc la médiatrice de $[AB]$ est la droite (MN).

Remarque : Coin devoir : reconnaître une médiatrice

En devoir : $[AB]$ est un segment de 6 cm. Deux points distincts M et N vérifient $MA = MB = 6$ cm et $NA = NB = 4$ cm. On demande la médiatrice de $[AB]$.

« On sait que $MA = MB$ et que $NA = NB$. Or un point équidistant de A et de B est sur la médiatrice de $[AB]$. Donc M et N sont sur cette médiatrice. Par deux points distincts passe une seule droite : la médiatrice de $[AB]$ est la droite (MN). »

Démontrer en quelques lignes

Justifier sans mesurer

Vérifie : Une justification acceptée

Sur une figure, l'angle $\widehat{ABC}$ semble droit. Laquelle de ces phrases est une justification acceptée ?

A. L'angle a l'air droit sur mon dessin.

Faux.

Non : l'œil se trompe ; un angle de $88°$ a aussi l'air droit.

B. Le codage de la figure indique un angle droit en B.

Juste.

Oui. Un codage est une donnée : tu peux t'appuyer dessus.

C. J'ai mesuré $89°$, c'est presque $90°$.

Faux.

Non : presque droit n'est pas droit. Une mesure contrôle, elle ne démontre pas.

Correction

Seul le codage est une justification acceptée : c'est une donnée de la figure. Une impression ou une mesure approchée ne démontre rien.

Dans une justification, on part des données, puis on cite une propriété du cours.

Une **démonstration** est une suite courte de phrases. Elle part des données, cite une propriété du cours, puis conclut.

En 1re année du collège, trois mots suffisent pour l'écrire : « on sait que », « or », « donc ».

Méthode : rédiger une démonstration courte

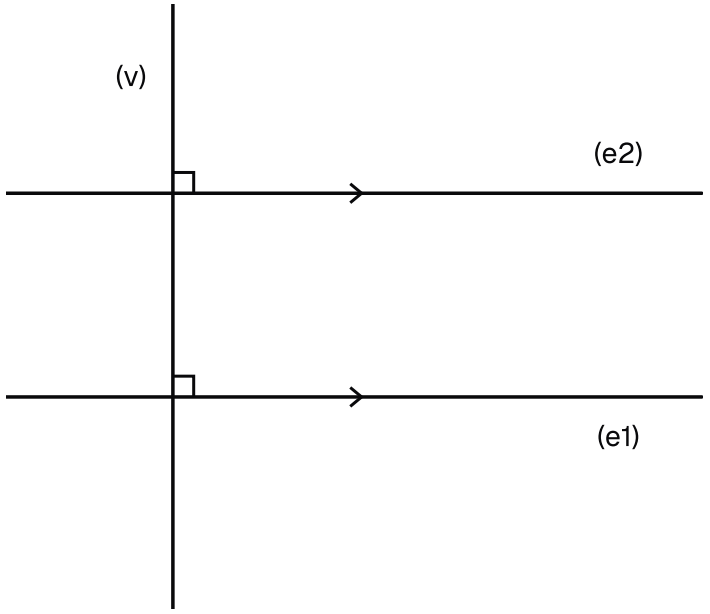
1. **On sait que** : écris les données utiles de l'énoncé ou de la figure codée.
2. **Or** : cite la propriété du cours que tu emploies, en entier, avec sa condition.
3. **Donc** : écris la conclusion, qui est exactement la conséquence de la propriété.

Dans une démonstration en plusieurs pas, chaque conclusion devient une donnée du pas suivant.

Exemple : deux étagères

Sur un mur, les étagères (e_1) et (e_2) sont fixées perpendiculairement au montant vertical (v).

« On sait que $(e_1) \perp (v)$ et que $(e_2) \perp (v)$. Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles. Donc $(e_1) \parallel (e_2)$. »



Le montant (v) et les étagères (e1) et (e2), fixées à angle droit sur lui : la démonstration conclut qu'elles sont parallèles.

Trois angles droits

Rappel du primaire : un **quadrilatère** est une figure à quatre côtés. Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

Devine : Le cadre du menuisier

Un menuisier fabrique un cadre à quatre côtés droits. Il vérifie trois coins à l'équerre : ils sont droits. Doit-il vérifier le quatrième coin ?

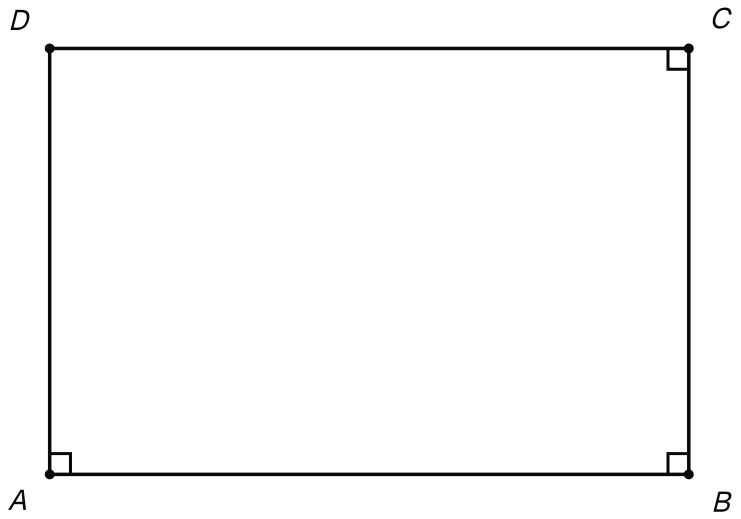
A. Oui, le quatrième coin peut ne pas être droit.
Faux.
Non : avec trois angles droits, le quatrième l'est forcément. La propriété suivante le démontre.

B. Non, le quatrième coin est forcément droit.
Juste.
Oui. Le cadre est un rectangle, et la preuve le montre sans mesure.

C. Seulement si les quatre côtés ont la même longueur.
Faux.
Non : la longueur des côtés ne joue aucun rôle ici.

Correction
Le quatrième coin est forcément droit : le cadre est un rectangle. Le menuisier peut gagner du temps.

La propriété suivante le démontre avec deux propriétés du cours.



Le cadre ABCD du menuisier : trois coins, en A, B et C, sont vérifiés droits ; le coin en D n'est pas codé.

L'énoncé et sa preuve

Pourquoi est-ce vrai ? Il faut gagner le quatrième angle droit sans le mesurer. La preuve enchaîne deux propriétés déjà vues dans ce chapitre.

Propriété : Quadrilatère qui a trois angles droits

Si un quadrilatère a **trois angles droits**, alors c'est un **rectangle**.

Démonstration

Soit $ABCD$ un quadrilatère dont les angles $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont droits. Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

Étape 1. L'angle $\widehat{DAB}$ est droit, donc $(AD) \perp (AB)$. L'angle $\widehat{ABC}$ est droit, donc $(BC) \perp (AB)$.

Étape 2. Les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires à la même droite (AB). D'après la propriété « deux droites perpendiculaires à une même droite », $(AD) \parallel (BC)$.

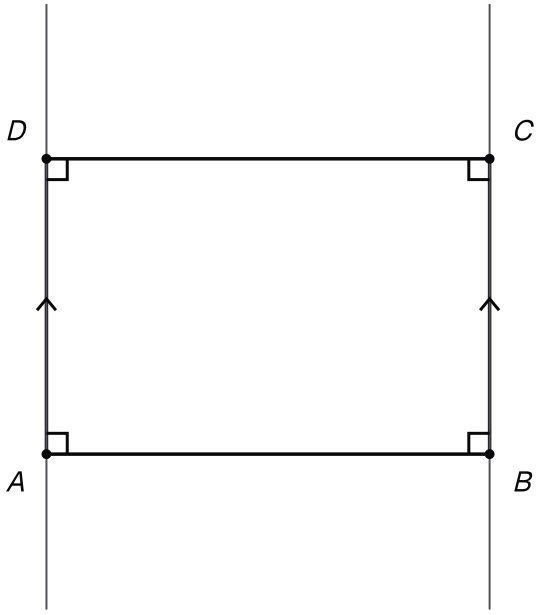
Étape 3. L'angle $\widehat{BCD}$ est droit, donc $(CD) \perp (BC)$. Or $(AD) \parallel (BC)$. D'après la propriété « une perpendiculaire à l'une de deux droites parallèles », $(CD) \perp (AD)$: l'angle $\widehat{CDA}$ est droit.

Conclusion. Le quadrilatère $ABCD$ a quatre angles droits : c'est un rectangle.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve ne mesure rien : elle **enchaîne deux propriétés**.

D'abord, deux côtés perpendiculaires à un même côté sont parallèles. Ensuite, le troisième angle droit donne une perpendiculaire à l'un de ces deux côtés parallèles : elle l'est aussi à l'autre.



Le chemin de la preuve : les angles droits en A et en B rendent (AD) et (BC) parallèles, puis l'angle droit en C donne celui en D.

Vérifie : Un pas de la preuve

Dans la preuve, on passe de « $(AD) \perp (AB)$ et $(BC) \perp (AB)$ » à « $(AD) \parallel (BC)$ ». Quelle propriété justifie ce pas ?

A. Une seule perpendiculaire passe par un point.

Faux.

Non : cette propriété ne fabrique pas deux droites parallèles ici.

B. Une perpendiculaire à l'une de deux parallèles est perpendiculaire à l'autre.

Faux.

Non : elle sert au pas suivant, une fois $(AD) \parallel (BC)$ obtenu.

C. Un rectangle a quatre angles droits.

Faux.

Non : c'est la conclusion visée ; on ne peut pas s'en servir en route.

D. Deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

Juste.

Oui : (AD) et (BC) font toutes deux un angle droit avec (AB).

Correction

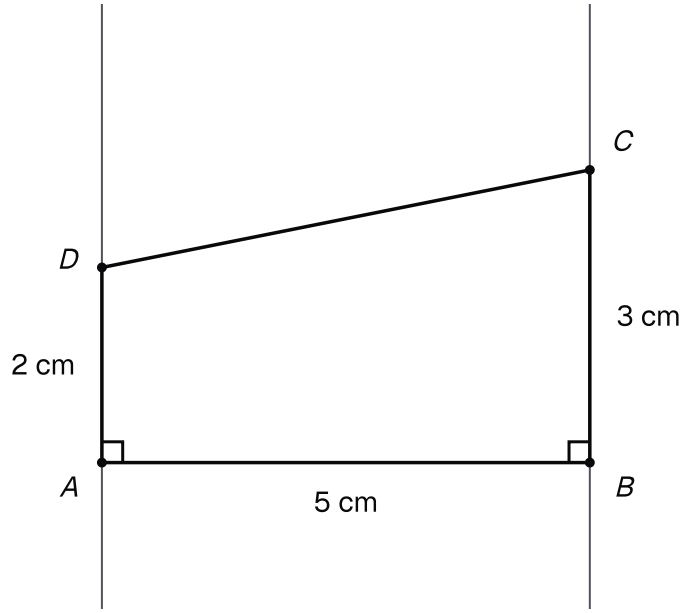
(AD) et (BC) font toutes deux un angle droit avec (AB). Deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles : on obtient $(AD) \parallel (BC)$.

Exemple : Contre-exemple : deux angles droits ne suffisent pas

Trace un segment $[AB]$ de 5 cm. Trace les perpendiculaires à (AB) en A et en B.

Place D sur la première avec $AD = 2$ cm, et C sur la seconde avec $BC = 3$ cm, du même côté de (AB).

Le quadrilatère $ABCD$ a deux angles droits, en A et en B. Contrôle à l'équerre : l'angle $\widehat{BCD}$ n'est pas droit. Avec seulement deux angles droits, $ABCD$ n'est pas un rectangle.



Le contre-exemple : AB = 5 cm, AD = 2 cm et BC = 3 cm, deux angles droits en A et en B, mais pas de rectangle.

Rédiger à ton tour

À toi : une démonstration en deux pas

On sait que $(d_1) \parallel (d_2)$, que $(d_3) \perp (d_1)$ et que $(d_4) \perp (d_2)$. Démontre que $(d_3) \parallel (d_4)$.

Indice 1
Commence par (d_4) : elle est perpendiculaire à l'une de deux droites parallèles.
Indice 2
Premier pas : tu obtiens $(d_4) \perp (d_1)$. Deuxième pas : (d_3) et (d_4) sont alors perpendiculaires à la même droite (d_1).
Indice 3

> Point délicat : la conclusion du premier pas devient une donnée du second. Cite une propriété à chaque « or ».
>
> **Réponse**
> « On sait que $(d_1) \parallel (d_2)$ et que $(d_4) \perp (d_2)$. Or, si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre. Donc $(d_4) \perp (d_1)$.
>
> On sait que $(d_3) \perp (d_1)$ et que $(d_4) \perp (d_1)$. Or deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles. Donc $(d_3) \parallel (d_4)$. »

Remarque : Coin devoir : le cadre rectangulaire

En devoir : $ABCD$ est un quadrilatère. Les angles $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont codés droits. On demande la nature de $ABCD$.

« On sait que le quadrilatère $ABCD$ a trois angles droits, en A, en B et en C. Or un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle. Donc $ABCD$ est un rectangle. »

Une seule propriété, citée en entier : c'est toute la rédaction attendue.

Synthèse

Voici la carte du chapitre.

- **Reconnaître** : sécantes, un seul point commun ; perpendiculaires, un angle droit ; parallèles, aucun point commun ou confondues.
- **Construire** à l'équerre : la perpendiculaire, puis la parallèle par deux perpendiculaires.
- **Justifier** :
  - deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles ;
  - une perpendiculaire à l'une de deux parallèles l'est aussi à l'autre ;
  - deux parallèles à une même droite sont parallèles.
- **Mesurer** une distance : sur la perpendiculaire, jusqu'au projeté orthogonal.
- **Médiatrice** : perpendiculaire et milieu ; elle réunit les points équidistants des extrémités.
- **Rédiger** : on sait que, or, donc.

Tu sais maintenant reconnaître, construire et justifier des droites perpendiculaires et parallèles. C'est la base de la géométrie de l'année.

Garde ton équerre à portée de main : elle contrôle, et les propriétés démontrent.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Droites perpendiculaires et droites parallèles » (1ac · general · mathematiques)