BURHAN

Développement et factorisation : Résumé

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/developpement-et-factorisation/resume

Chapitre	Semestre
Développement et factorisation	Semestre 2

Écrire avec des lettres

Une lettre peut remplacer un nombre que l'on ne connaît pas encore.

À la papeterie, un cahier coûte a dirhams. Six cahiers coûtent alors $6a$ dirhams.

Définition : Expression littérale et conventions d'écriture

Une **expression littérale** est une expression dans laquelle des lettres désignent des nombres. Par exemple, $3 \times a + 5$ est une expression littérale.

Pour alléger l'écriture, on peut **supprimer le signe** $\times$ devant une lettre ou devant une parenthèse :

- $3 \times a$ s'écrit $3a$;
- $a \times b$ s'écrit ab ;
- $4 \times (x + 1)$ s'écrit $4(x + 1)$.

On écrit a au lieu de $1 \times a$, et $-a$ au lieu de $-1 \times a$. On ne supprime jamais le signe $\times$ entre deux nombres : 3×5 ne s'écrit pas 35.

Exemple : alléger une écriture

- $7 \times y - 2$ s'écrit $7y - 2$.
- $x \times (y + 3)$ s'écrit $x(y + 3)$.
- $y \times 9$ s'écrit $9y$: le nombre se place devant la lettre.
- 2×8 reste 2×8, car ce sont deux nombres.

Exemple : calculer pour une valeur

Pour calculer $A = 4x - 9$ quand $x = 2{,}5$, on remplace la lettre par le nombre. On remet le signe $\times$:

$$A = 4 \times 2{,}5 - 9 = 10 - 9 = 1.$$

Rappel. La multiplication se fait avant la soustraction.

Remarque : Rappel : la règle des signes

Le produit de deux relatifs est positif si leurs signes sont les mêmes. Il est négatif si leurs signes sont contraires.

Par exemple, $(-6) \times (-1{,}5) = 9$ et $(-6) \times 1{,}5 = -9$.

La distributivité

Deux calculs différents peuvent donner le même résultat. Compare $6 \times (10 + 3)$ et $6 \times 10 + 6 \times 3$.

Le premier vaut $6 \times 13 = 78$, le second $60 + 18 = 78$.

Propriété : Distributivité de la multiplication sur l'addition et sur la soustraction

Soit k, a et b trois nombres décimaux relatifs. Alors :

$$k(a + b) = ka + kb$$
$$k(a - b) = ka - kb$$

On dit que la multiplication est **distributive** sur l'addition et sur la soustraction.

Comme on peut changer l'ordre des facteurs d'un produit, on a aussi $(a + b)k = ak + bk$ et $(a - b)k = ak - bk$.

À retenir : En clair

Le nombre placé devant la parenthèse multiplie **chaque terme** de la parenthèse. Avec une soustraction :

$$\begin{aligned} 8(5 - 2) &= 8 \times 5 - 8 \times 2 \\ &= 40 - 16 = 24 \end{aligned}$$

Et directement : $8 \times 3 = 24$.

Définition : Développer, factoriser

Développer un produit, c'est l'écrire sous la forme d'une somme ou d'une différence.

Factoriser une somme ou une différence, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

L'égalité $k(a + b) = ka + kb$ se lit dans les deux sens : de gauche à droite, on **développe** ; de droite à gauche, on **factorise**.

Exemple : une égalité, deux lectures

- De gauche à droite, on développe : $9(x + 4) = 9x + 36$.
- De droite à gauche, on factorise : $9x + 36 = 9(x + 4)$.

Remarque : Des propriétés admises

Les trois propriétés de ce chapitre (distributivité, distributivité sur trois termes, suppression des parenthèses) sont admises.

Admis veut dire : on les utilise sans les démontrer. Tu les as vérifiées sur des exemples, sans démonstration.

Développer un produit

Propriété : Distributivité sur trois termes

Soit k, a, b et c des nombres décimaux relatifs. Alors :

$$k(a+b+c) = ka + kb + kc$$
$$k(a+b-c) = ka + kb - kc$$

Pour développer, on multiplie le facteur k par **chaque terme** de la parenthèse.

Méthode : développer un produit

1. **Repérer le facteur** placé devant la parenthèse, avec son signe.
2. **Multiplier ce facteur par chaque terme** de la parenthèse.
3. **Appliquer la règle des signes** à chaque produit.
4. **Calculer les produits** et écrire le résultat sans parenthèses.

Exemple : un facteur négatif

$$\begin{aligned} &-5(2x-3) \\ &= (-5) \times 2x + (-5) \times (-3) \\ &= -10x + 15. \end{aligned}$$

Le produit $(-5) \times (-3)$ a deux facteurs négatifs : il est positif.

Exemple : trois termes

$$\begin{aligned} 3(2a+b-5) &= 3 \times 2a + 3 \times b - 3 \times 5 \\ &= 6a + 3b - 15. \end{aligned}$$

Attention : un terme oublié

Erreur : $6(y+7) = 6y + 7$.

Le 6 multiplie aussi le 7 : $6(y+7) = 6y + 42$.

Teste avec $y = 1$: $6 \times 8 = 48$ et $6 + 42 = 48$, mais $6 + 7 = 13$.

Attention : le signe d'un facteur négatif

Erreur : $-4(x - 6) = -4x - 24$.

Le dernier produit est $(-4) \times (-6) = 24$, un nombre positif. Donc $-4(x - 6) = -4x + 24$.

Factoriser une somme

Factoriser, c'est faire le chemin inverse du développement. On cherche un nombre ou une lettre présent dans chaque terme.

Définition : Facteur commun

Les **termes** d'une somme sont les nombres que l'on additionne ou que l'on soustrait.

Dans la somme $ka + kb$, le nombre k apparaît dans chacun des deux termes : c'est un **facteur commun** à ces termes. Factoriser par k, c'est écrire :

$$ka + kb = k(a + b)$$
$$ka - kb = k(a - b)$$

Un terme égal à k s'écrit $k \times 1$. Par exemple, $5a + 5 = 5 \times a + 5 \times 1 = 5(a + 1)$.

Méthode : factoriser une somme

1. **Écrire chaque terme comme un produit** qui montre le même facteur.
2. **Sortir le facteur commun** devant une parenthèse.
3. **Recopier dans la parenthèse** ce qui reste de chaque terme, avec son signe.
4. **Vérifier en développant** : tu dois retrouver la somme de départ.

Exemple : faire apparaître le facteur commun

Un facteur commun nombre.

$$\begin{aligned} 8x - 20 &= 4 \times 2x - 4 \times 5 \\ &= 4(2x - 5) \end{aligned}$$

Vérification : $4(2x - 5) = 8x - 20$.

Un facteur commun lettre.

$$\begin{aligned} ax + 3a &= a \times x + a \times 3 \\ &= a(x + 3) \end{aligned}$$

Attention : le facteur caché 1

Erreur : $9y + 9 = 9y$, ou $9y + 9 = 9(y + 0)$.

Le dernier terme vaut 9×1. Donc $9y + 9 = 9 \times y + 9 \times 1 = 9(y + 1)$.

Supprimer des parenthèses

Propriété : Supprimer des parenthèses

Soit a, b et c des nombres décimaux relatifs.

- **Parenthèses précédées du signe $+$** : on les supprime sans changer les signes des termes de la parenthèse :

$$a + (b + c) = a + b + c$$
$$a + (b - c) = a + b - c$$

- **Parenthèses précédées du signe $-$** : on les supprime en **changeant le signe de chaque terme** de la parenthèse :

$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$

À retenir : En clair

Un signe $+$ devant la parenthèse ne change rien. Un signe $-$ devant la parenthèse change le signe de **chaque** terme de la parenthèse.

Méthode : supprimer des parenthèses

1. **Regarder le signe** placé juste devant la parenthèse.
2. **Signe plus** : enlever les parenthèses et recopier les termes.
3. **Signe moins** : enlever les parenthèses et ce signe, puis changer le signe de chaque terme.
4. **Regrouper les nombres** entre eux à la fin.

Exemple : avec plus, puis avec moins

- $7 + (x - 4) = 7 + x - 4 = x + 3$.
- $15 - (y + 6) = 15 - y - 6 = 9 - y$.

Attention : le signe moins devant une parenthèse

Erreur : $13-(x-5)=13-x-5$.

Le moins change aussi le signe de -5 : $13-(x-5)=13-x+5=18-x$.

Teste avec $x=7$: $13-2=11$ et $18-7=11$, mais $13-7-5=1$.

Calculer vite et réduire

Méthode : calculer mentalement

1. **Pour un produit** : écrire un facteur comme un nombre rond plus ou moins un petit nombre, puis développer.
2. **Pour deux produits qui ont un facteur commun** : factoriser, pour obtenir un nombre rond comme 10 ou 100.
3. **Terminer** par un calcul simple.

Exemple : deux calculs rapides

Développer.

$$\begin{aligned} 8\times 99 &= 8\times(100-1)\\ &= 8\times 100-8\times 1\\ &= 800-8=792 \end{aligned}$$

Factoriser.

$$\begin{aligned} 3{,}6\times 7+3{,}6\times 3 &= 3{,}6\times(7+3)\\ &= 3{,}6\times 10=36 \end{aligned}$$

Deux termes sont **semblables** quand ils contiennent exactement les mêmes lettres : $4x$ et $-9x$ le sont, $3ab$ et $2a$ ne le sont pas.

Pour **réduire** une expression, on rassemble ses termes semblables en un seul terme : elle devient plus courte.

Méthode : réduire une expression

1. **Repérer les termes semblables** : leurs lettres sont exactement les mêmes.
2. **Factoriser par la lettre** : on calcule avec les nombres placés devant elle.
3. **Recopier les autres termes** sans les changer.

Exemple : regrouper les termes semblables

$$4x-9x=(4-9)x=-5x$$

$$\begin{aligned} 6a + 2 + 3a &= 6a + 3a + 2 \\ &= (6 + 3)a + 2 \\ &= 9a + 2 \end{aligned}$$

Attention : des termes qui ne sont pas semblables

Erreur : $2y + 6 = 8y$. Les termes $2y$ et 6 ne sont pas semblables : $2y + 6$ ne se réduit pas.

Teste avec $y = 3$: $2 \times 3 + 6 = 12$, mais $8 \times 3 = 24$.

À retenir

Distributivité sur une somme

$$k(a + b) = ka + kb$$

Distributivité sur une différence

$$k(a - b) = ka - kb$$

Trois termes

$$k(a + b - c) = ka + kb - kc$$

Factoriser par k

$$ka + kb = k(a + b)$$

Facteur caché 1

$$ka + k = k(a + 1)$$

Parenthèses précédées du signe plus

$$a + (b - c) = a + b - c$$

Parenthèses précédées du signe moins

$$a - (b - c) = a - b + c$$

Méthode : Développer ou factoriser ?

- Un **produit** avec une parenthèse, et tu veux une somme : **développe**.
- Une **somme** dont les termes ont un facteur commun : **factorise**.
- Un signe moins devant une parenthèse : **change le signe de chaque terme**.
- Des termes semblables : **réduis**.
- Pour calculer vite : casse un facteur autour d'un nombre rond, ou regroupe deux produits.

Tu sais maintenant passer d'un produit à une somme, et revenir au produit. Les exercices t'attendent, du palier application au niveau devoir surveillé.