BURHAN

Développement et factorisation

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/developpement-et-factorisation/cours

Chapitre	Semestre
Développement et factorisation	Semestre 2

Entrée : des achats groupés

Au marché, tu achètes 3 cahiers à 8 dirhams et 3 stylos à 4 dirhams.

Ton amie Salma prépare 3 lots, chacun avec un cahier et un stylo. Vous payez la même chose, mais vous ne calculez pas de la même façon.

Devine : Deux façons de payer

Toi, tu calcules $3 \times 8 + 3 \times 4$. Salma calcule $3 \times (8 + 4)$. Qui trouve le bon prix ?

A. Toi seulement : chaque article se paie à part.

Faux.
Ton calcul donne $24 + 12 = 36$. Celui de Salma donne $3 \times 12 = 36$ aussi.

B. Vous deux : chacun trouve 36 dirhams.

Juste.
Oui : $3 \times 8 + 3 \times 4 = 24 + 12 = 36$. Et de son côté, $3 \times (8 + 4) = 3 \times 12 = 36$.

C. Salma seulement : la parenthèse passe avant.

Faux.
La parenthèse donne bien 36. Mais ton calcul donne aussi $24 + 12 = 36$.

D. Personne : le prix est $3 \times 8 + 4 = 28$ dirhams.

Faux.
Ce calcul ne compte qu'un seul stylo à 4 dirhams.

Correction
Les deux calculs donnent 36 dirhams.

Tu comptes les cahiers, puis les stylos. Salma compte les lots. Dans les deux cas, le nombre 3 multiplie le prix du cahier et le prix du stylo.

Dans ce chapitre, tu vas passer d'une écriture à l'autre. Tu sauras développer un produit et factoriser une somme. Ces deux mots seront expliqués plus loin.

Tu sauras aussi supprimer des parenthèses. Enfin, tu calculeras vite de tête.

Écrire avec des lettres

Un programme de calcul

Devine : Un nombre inconnu

Voici un programme de calcul :

- choisis un nombre ;
- multiplie-le par 4 ;
- ajoute 7 au résultat.

On appelle x le nombre choisi. Quelle écriture donne le résultat ?

A. $4 \times x + 7$
Juste.
On multiplie d'abord x par 4, puis on ajoute 7. Les priorités suivent l'ordre du programme.

B. $4 \times (x + 7)$
Faux.
Ici, on ajoute 7 avant de multiplier. Le programme fait l'inverse.

C. $x + 4 + 7$
Faux.
Le programme multiplie par 4 : il n'ajoute pas 4.

D. $47 \times x$
Faux.
Les nombres 4 et 7 ne se collent pas. Ils jouent deux rôles différents.

Correction
Le résultat s'écrit $4 \times x + 7$.

Avec $x = 5$, on trouve :

$$4 \times 5 + 7 = 20 + 7 = 27$$

Une **expression littérale** est un calcul où une lettre remplace un nombre. La lettre x peut prendre plusieurs valeurs.

Avec $x = 10$, l'expression $4 \times x + 7$ vaut $4 \times 10 + 7 = 47$.

Les conventions d'écriture

Définition : Expression littérale et conventions d'écriture

Une **expression littérale** est une expression dans laquelle des lettres désignent des nombres. Par exemple, $3 \times a + 5$ est une expression littérale.

Pour alléger l'écriture, on peut **supprimer le signe** $\times$ devant une lettre ou devant une parenthèse :

- $3 \times a$ s'écrit $3a$;

- $a \times b$ s'écrit ab ;
- $4 \times (x + 1)$ s'écrit $4(x + 1)$.

On écrit a au lieu de $1 \times a$, et $-a$ au lieu de $-1 \times a$. On ne supprime jamais le signe $\times$ entre deux nombres : 3×5 ne s'écrit pas 35.

En clair : le signe $\times$ peut disparaître juste devant une lettre ou une parenthèse. Le nombre s'écrit devant la lettre.

Ainsi, $4 \times x + 7$ s'écrit $4x + 7$.

Vérifie : Bien écrire

Une seule de ces écritures respecte les conventions. Laquelle ?

A. $y \times 6$ s'écrit $y6$.
Faux.
Le nombre s'écrit devant la lettre : on écrit $6y$.

B. 2×9 s'écrit 29.
Faux.
Entre deux nombres, le signe $\times$ reste. Le produit 2×9 vaut 18.

C. $7 \times y$ s'écrit $7y$.
Juste.
Le signe $\times$ est juste devant une lettre : on peut le supprimer.

D. $1 \times y$ s'écrit $1y$.
Faux.
$1y$ a la même valeur que y. Mais les conventions demandent d'écrire simplement y.

Correction
Seule l'écriture $7y$ est juste. Les trois autres se corrigent ainsi :

- pour $y \times 6$, on écrit $6y$, et non $y6$;
- entre deux nombres, on garde 2×9 ;
- pour $1 \times y$, on écrit simplement y.

Calculer pour une valeur

Rappel du chapitre sur les opérations : on calcule d'abord les parenthèses. Ensuite viennent les multiplications. Les additions et les soustractions se font en dernier.

Rappel du chapitre sur les relatifs : deux nombres de même signe ont un produit positif. Deux nombres de signes contraires ont un produit négatif.

Soustraire un nombre, c'est ajouter son **opposé** (le même nombre avec le signe contraire) : l'opposé de 6 est -6.

Exemple : Exemple guidé : calculer pour une valeur

On calcule $B = 6 - 2y$ pour $y = -3$.

Remplacer. On remet le signe $\times$ et on écrit -3 entre parenthèses.

Multiplier d'abord. Par la règle des signes, $2 \times (-3) = -6$.

Soustraire. Soustraire -6, c'est ajouter 6.

$$\begin{aligned} B &= 6 - 2 \times (-3) \\ &= 6 - (-6) \\ &= 12 \end{aligned}$$

Pour $y = -3$, l'expression B vaut donc 12.

Attention : la lettre cache un signe

✗ Pour $x = 3$, on écrit $4x = 43$.

✓ Pour $x = 3$, on écrit $4x = 4 \times 3 = 12$.

Quand tu remplaces la lettre, remets le signe $\times$ que l'on avait supprimé.

À toi

À toi : Calculer une expression

Calcule $C = 3x + 5$ pour $x = -2$, puis pour $x = 1{,}5$.

Indice 1
Remplace x par la valeur et remets le signe $\times$.
Indice 2
Pour $x = -2$, commence par le produit $3 \times (-2)$.
Indice 3
Point délicat : la multiplication passe avant l'addition. On ne calcule pas $3 \times (-2 + 5)$.

Réponse
Pour $x = -2$. La multiplication passe d'abord :

$$\begin{aligned} C &= 3 \times (-2) + 5 \\ &= -6 + 5 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Pour $x = 1{,}5$. On procède de la même façon :

$$\begin{aligned} C &= 3 \times 1{,}5 + 5 \\ &= 4{,}5 + 5 \\ &= 9{,}5 \end{aligned}$$

Conclusion. L'expression C vaut -1 pour $x = -2$, et $9{,}5$ pour $x = 1{,}5$.

Le mot du prof : une lettre n'a rien d'effrayant. C'est une case où l'on glisse un nombre.

Tu sais maintenant écrire et calculer une expression littérale.

La distributivité

Un jardin partagé en deux

Devine : L'aire du jardin

Un jardin rectangulaire a une largeur de 6 m. Sur sa longueur, il y a 5 m de tomates, puis 3 m de menthe. Fais le dessin sur ton cahier. Quelle est l'aire du jardin ?

A. $6 \times 5 + 3 = 33$ mètres carrés

Faux.
Le 6 a multiplié les tomates, mais pas la menthe. La partie menthe mesure $6 \times 3 = 18$ mètres carrés.

B. $6 + 5 + 3 = 14$ mètres carrés

Faux.
Une aire se calcule par un produit : longueur fois largeur.

C. $6 \times 5 \times 3 = 90$ mètres carrés

Faux.
Les deux longueurs se mettent bout à bout : on les additionne, on ne les multiplie pas.

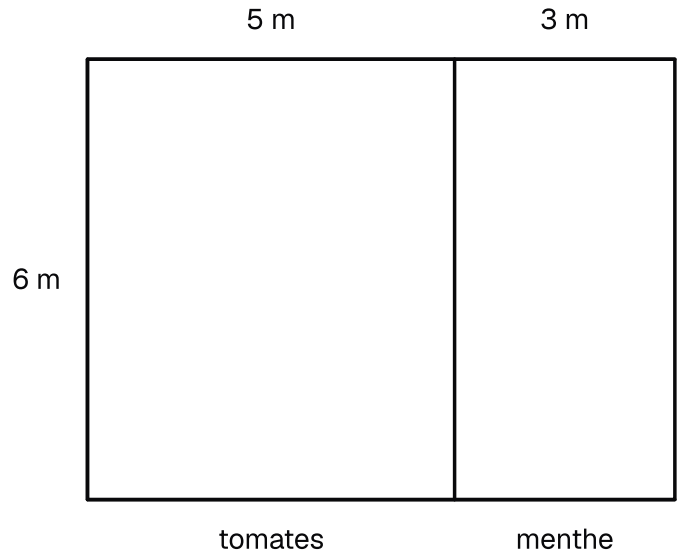
D. $6 \times 8 = 48$ mètres carrés

Juste.
La longueur totale est $5 + 3 = 8$ m. L'aire vaut $6 \times 8 = 48$ mètres carrés.

Correction
La longueur totale vaut $5 + 3 = 8$ m, donc l'aire vaut $6 \times 8 = 48$ mètres carrés.

On peut aussi additionner les aires des deux parties :

$$6 \times 5 + 6 \times 3 = 30 + 18 = 48$$



Le jardin de 6 m de large : 5 m de tomates, puis 3 m de menthe, mis bout à bout sur la longueur.

Deux calculs donnent la même aire :

$$6 \times (5 + 3) = 6 \times 5 + 6 \times 3$$

Le nombre 6 multiplie chaque morceau de la longueur.

Cette image utilise des longueurs, donc des nombres positifs. Pour les relatifs, on vérifie par le calcul.

Avec des nombres relatifs

Rappel du primaire : dans le produit 6×8, les nombres 6 et 8 sont les **facteurs**. Dans la somme $5 + 3$, les nombres 5 et 3 sont les **termes**.

Exemple : la même idée avec des relatifs

Rappel du chapitre sur les relatifs : on applique la règle des signes à chaque produit.

Parenthèse d'abord.

$$(-2) \times (7 - 3) = (-2) \times 4 = -8$$

Chaque terme multiplié par -2.

$$\begin{aligned} &(-2) \times 7 - (-2) \times 3 \\ &= -14 - (-6) \\ &= -14 + 6 = -8 \end{aligned}$$

Les deux calculs donnent -8. Avec des décimaux, on retrouve aussi deux fois le même résultat :

$$\begin{aligned} 5 \times (-4 + 1{,}5) &= 5 \times (-2{,}5) \\ &= -12{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \times (-4) + 5 \times 1{,}5 &= -20 + 7{,}5 \\ &= -12{,}5 \end{aligned}$$

Vérifie : Sans calculer la parenthèse

Quel calcul donne le même résultat que $(-3) \times (10 + 2)$?

A. $(-3) \times 10 + (-3) \times 2$

Juste.

Le facteur -3 multiplie chaque terme. On trouve $-30 - 6 = -36$, comme $(-3) \times 12$.

B. $(-3) \times 10 + 2$

Faux.

Le terme 2 n'est pas multiplié. On trouve -28 au lieu de -36.

C. $(-3) \times 10 \times 2$

Faux.

Ce calcul donne -60. Les termes s'ajoutent : ils ne se multiplient pas.

Correction

En calculant d'abord la parenthèse :

$$\begin{aligned} (-3) \times (10 + 2) &= (-3) \times 12 \\ &= -36 \end{aligned}$$

En multipliant chaque terme par -3 :

$$\begin{aligned} &(-3) \times 10 + (-3) \times 2 \\ &= -30 + (-6) = -36 \end{aligned}$$

Les deux calculs donnent le même résultat.

La propriété

Propriété : Distributivité de la multiplication sur l'addition et sur la soustraction

Soit k, a et b trois nombres décimaux relatifs. Alors :

$$k(a + b) = ka + kb \quad \text{et} \quad k(a - b) = ka - kb.$$

On dit que la multiplication est **distributive** sur l'addition et sur la soustraction.

Comme on peut changer l'ordre des facteurs d'un produit, on a aussi $(a + b)k = ak + bk$ et $(a - b)k = ak - bk$.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. « Admis » veut dire qu'on utilise ce résultat sans le prouver.

On l'a vérifié sur l'aire d'un jardin, puis sur des calculs avec des relatifs.

En clair : le facteur devant la parenthèse multiplie **chaque terme** de la parenthèse. Entre les deux produits, on garde le signe de la parenthèse.

Exemple : appliquer la distributivité

À chaque ligne, on applique la distributivité :

$$\begin{aligned} 4(y+6) &= 4\times y + 4\times 6 \\ &= 4y + 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(a-9) &= 2\times a - 2\times 9 \\ &= 2a - 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+3)\times 4 &= a\times 4 + 3\times 4 \\ &= 4a + 12 \end{aligned}$$

Dans la dernière, le facteur est écrit à droite de la parenthèse : il multiplie encore chaque terme.

Développer ou factoriser

Définition : Développer, factoriser

Développer un produit, c'est l'écrire sous la forme d'une somme ou d'une différence.

Factoriser une somme ou une différence, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

L'égalité $k(a+b) = ka + kb$ se lit dans les deux sens : de gauche à droite, on **développe** ; de droite à gauche, on **factorise**.

Vérifie : Dans quel sens ?

On passe de $3a + 15$ à $3(a+5)$. Que fait-on ?

A. On développe.
Faux.
Développer, c'est partir d'un produit. Ici, on part de la somme $3a + 15$.

B. On factorise.
Juste.
On part d'une somme et on obtient un produit : c'est factoriser.

C. On calcule une valeur.
Faux.
Aucune lettre n'est remplacée par un nombre. L'écriture change, pas la valeur.

Correction

> On factorise : la somme $3a + 15$ devient le produit $3(a + 5)$.
>
> Dans l'autre sens, $3(a + 5) = 3a + 15$: on développe.

Exemple : les deux sens

Développer : $5(x + 2) = 5x + 10$. Le produit devient une somme.

Factoriser : $9y - 9 \times 4 = 9(y - 4)$. La différence devient un produit.

À toi

> **À toi : Deux façons de calculer**
>
> Calcule $9 \times (10 - 2)$ de deux façons. Puis développe $6(x - 4)$.
>
> **Indice 1**
> Première façon : calcule d'abord la parenthèse. Seconde façon : utilise la distributivité.
> **Indice 2**
> Pour la seconde façon, commence par le produit 9×10.
> **Indice 3**
> Point délicat : dans $6(x - 4)$, le 6 multiplie aussi le 4. Le signe $-$ reste entre les produits.
>
> **Réponse**
> **Première façon.** On calcule d'abord la parenthèse : $9 \times 8 = 72$.
>
> **Seconde façon**, par la distributivité :
>
> $$\begin{aligned} &9 \times 10 - 9 \times 2 \\ &= 90 - 18 = 72 \end{aligned}$$
>
> **Développement.** Le 6 multiplie chaque terme :
>
> $$\begin{aligned} 6(x - 4) &= 6 \times x - 6 \times 4 \\ &= 6x - 24 \end{aligned}$$
>
> **Conclusion.** Les deux façons donnent 72, et le développement de $6(x - 4)$ est $6x - 24$.

Le mot du prof : la distributivité est l'outil de tout le chapitre. Tu viens de la voir dans un jardin, puis dans des calculs.

La suite l'utilise dans les deux sens.

Développer un produit

Un facteur positif

> **Devine : Premier développement**

Quel est le développement de $8(y+2)$?

A. $8y+2$

Faux.

Le 8 doit aussi multiplier le 2.

B. $10y$

Faux.

On a ajouté 8 et 2. Or le 8 multiplie chaque terme.

C. $8y+16$

Juste.

On multiplie y par 8, puis 2 par 8.

D. $8y+10$

Faux.

On a ajouté 8 et 2 au lieu de les multiplier.

Correction

Le 8 multiplie chaque terme, par la distributivité :

$$8(y+2) = 8\times y + 8\times 2 = 8y+16$$

Exemple : Exemple guidé : un facteur positif

On développe $3(2x+4)$.

Distributivité. Le 3 multiplie chaque terme : $3\times 2x + 3\times 4$.

Produits. On multiplie les nombres entre eux : $3\times 2x = 3\times 2\times x = 6x$, puis $3\times 4 = 12$.

$$\begin{aligned} 3(2x+4) &= 3\times 2x + 3\times 4 \\ &= 6x + 12 \end{aligned}$$

Exemple : une lettre en facteur

On développe $a(b+2)$: le facteur a multiplie chaque terme.

$$a(b+2) = a\times b + a\times 2 = ab + 2a$$

Le nombre s'écrit devant la lettre : $a\times 2 = 2a$.

Un facteur négatif

Rappel du chapitre sur les relatifs : deux facteurs de même signe donnent un produit positif. Deux facteurs de signes contraires donnent un produit négatif.

Exemple : Exemple guidé : un facteur négatif

On développe $-5(a-2)$. Les termes de la parenthèse sont a et -2.

Distributivité. Le facteur -5 multiplie chaque terme : $(-5)\times a+(-5)\times(-2)$.

Règle des signes. $(-5)\times(-2)=10$, car les deux facteurs sont négatifs.

$$\begin{aligned}&-5(a-2)\\&=(-5)\times a+(-5)\times(-2)\\&=-5a+10\end{aligned}$$

Attention : un facteur négatif

✗ $-3(y-6)=-3y-18$.

✓ $-3(y-6)=-3y+18$, car $(-3)\times(-6)=18$.

Vérifie avec $y=1$. Au départ, $(-3)\times(1-6)=(-3)\times(-5)=15$.

La bonne écriture donne $-3+18=15$. La fausse donne $-3-18=-21$.

Trois termes

Devine : Une parenthèse plus longue

Que devient $2(a+b+5)$ quand on le développe ?

A. $2a+2b+10$

Juste.

Le 2 multiplie les trois termes : a, b et 5.

B. $2a+b+5$

Faux.

Seul le premier terme a été multiplié.

C. $2a+2b+5$

Faux.

Le dernier terme a été oublié : $2\times5=10$.

Correction

Le 2 multiplie les trois termes :

$$\begin{aligned}&2(a+b+5)\\&=2\times a+2\times b+2\times5\\&=2a+2b+10\end{aligned}$$

Propriété : Distributivité sur trois termes

Soit k, a, b et c des nombres décimaux relatifs. Alors :

$$k(a+b+c) = ka + kb + kc \quad \text{et} \quad k(a+b-c) = ka + kb - kc.$$

Pour développer, on multiplie le facteur k par **chaque terme** de la parenthèse.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis.

Tu peux le vérifier sur des nombres : $2 \times (1+3+5) = 2 \times 9 = 18$. En multipliant chaque terme par 2, on trouve aussi $2+6+10 = 18$.

Exemple : trois termes

On développe $4(x+2y-3)$: le 4 multiplie chacun des trois termes.

$$\begin{aligned} &4(x+2y-3) \\ &= 4 \times x + 4 \times 2y - 4 \times 3 \\ &= 4x + 8y - 12 \end{aligned}$$

Le signe $-$ devant le 3 reste.

La méthode

Méthode : développer un produit

1. **Repère** le facteur devant la parenthèse et chaque terme, avec son signe.
2. **Multiplie** le facteur par chaque terme, avec la règle des signes.
3. **Calcule** chaque produit et écris la somme obtenue.

Attention : chaque terme compte

✗ $6(x+5) = 6x + 5$.

✓ $6(x+5) = 6x + 30$.

Teste avec $x = 2$: au départ, $6 \times 7 = 42$. La bonne écriture donne $12 + 30 = 42$, la fausse $12 + 5 = 17$.

À toi

À toi : Développer deux produits

Développe $A = 7(2 - y)$ et $B = -2(3a + b - 4)$.

Indice 1
Utilise la distributivité : le facteur multiplie chaque terme de la parenthèse.
Indice 2
Pour B, les termes sont $3a$, b et -4. Commence par le produit $(-2) \times 3a$.
Indice 3
Point délicat : regarde le signe du produit $(-2) \times (-4)$.

Réponse
Développement de A. Le 7 multiplie chaque terme :

$$\begin{aligned} A &= 7 \times 2 - 7 \times y \\ &= 14 - 7y \end{aligned}$$

Développement de B. Le facteur -2 multiplie les trois termes $3a$, b et -4. On calcule chaque produit par la distributivité et la règle des signes : $(-2) \times 3a = -6a$ et $(-2) \times (-4) = 8$.

$$\begin{aligned} B &= (-2) \times 3a \\ &\quad + (-2) \times b \\ &\quad + (-2) \times (-4) \\ &= -6a - 2b + 8 \end{aligned}$$

Conclusion. $A = 14 - 7y$ et $B = -6a - 2b + 8$.

Remarque **: Coin devoir : la ligne des produits**

En devoir, écris la ligne des produits avant le résultat. Elle montre la règle employée.

« D'après la distributivité, $5(2y - 3) = 5 \times 2y - 5 \times 3 = 10y - 15$. »

Le mot du prof : développer, c'est multiplier chaque terme, sans en oublier un. Avec un facteur négatif, surveille chaque signe.

Tu sais maintenant développer tous les produits du chapitre.

Factoriser une somme

Un facteur commun

Devine : Retrouver le produit

Quelle écriture est égale à $8x + 8 \times 5$?

A. $16(x + 5)$
Faux.

Le 8 est commun aux deux termes : on l'écrit une seule fois. En développant, $16(x+5) = 16x+80$.

B. $8(x+5)$

Juste.

En développant, $8(x+5) = 8x+40$, et $8\times 5 = 40$.

C. $8x+5$

Faux.

Le terme 8×5 vaut 40, pas 5.

Correction

$$8x+8\times 5 = 8(x+5)$$

On le vérifie en développant : $8(x+5) = 8x+40$.

Dans $8x+8\times 5$, le nombre 8 est présent dans les deux termes.

On fait le chemin inverse du développement. On écrit 8 une seule fois, devant une parenthèse : on **factorise** par 8.

Le facteur commun

Définition : Facteur commun

Les **termes** d'une somme sont les nombres que l'on additionne ou que l'on soustrait.

Dans la somme $ka+kb$, le nombre k apparaît dans chacun des deux termes : c'est un **facteur commun** à ces termes. Factoriser par k, c'est écrire :

$$ka+kb = k(a+b) \quad \text{et} \quad ka-kb = k(a-b).$$

Un terme égal à k s'écrit $k\times 1$. Par exemple, $5a+5 = 5\times a+5\times 1 = 5(a+1)$.

En clair : cherche ce qui se répète dans chaque terme. Écris-le devant une parenthèse. Dans la parenthèse, écris ce qui reste de chaque terme.

Exemple : un facteur visible

Dans chaque ligne, le facteur commun passe devant la parenthèse :

$$3y-3\times 7 = 3(y-7)$$

$$a\times b+a\times 4 = a(b+4)$$

$$\begin{aligned} ay-9a &= a\times y-a\times 9 \\ &= a(y-9) \end{aligned}$$

Le facteur commun peut être un nombre ou une lettre.

Dans la dernière ligne, le terme $9a$ s'écrit aussi $a \times 9$: la lettre a est commune aux deux termes.

Faire apparaître le facteur

Vérifie : Une bonne décomposition

On veut factoriser $12y + 20$. Quelle écriture fait apparaître un facteur commun, sans changer la valeur ?

A. $12 \times y + 4 \times 5$

Faux.

Le calcul est juste, mais 12 et 4 ne sont pas le même facteur.

B. $3 \times 4y + 4 \times 4$

Faux.

Ici, $4 \times 4 = 16$, pas 20 : la valeur a changé.

C. $4 \times 3y + 4 \times 5$

Juste.

On a $4 \times 3y = 12y$ et $4 \times 5 = 20$. Le facteur 4 est commun.

Correction

On écrit chaque terme avec le facteur 4 :

$$\begin{aligned} 12y + 20 &= 4 \times 3y + 4 \times 5 \\ &= 4(3y + 5) \end{aligned}$$

Vérification : $4(3y + 5) = 12y + 20$.

Exemple : Exemple guidé : faire apparaître le facteur

On factorise $14x - 21$.

Décomposer. $14x = 7 \times 2x$ et $21 = 7 \times 3$.

Factoriser. Le facteur commun est 7 : $7 \times 2x - 7 \times 3 = 7(2x - 3)$.

Vérifier. En développant, $7(2x - 3) = 14x - 21$.

Exemple : factoriser trois termes

Le facteur 5 est commun aux trois termes :

$$\begin{aligned} &10a + 5b - 15 \\ &= 5 \times 2a + 5 \times b - 5 \times 3 \\ &= 5(2a + b - 3) \end{aligned}$$

Vérifie en développant : $5(2a + b - 3) = 10a + 5b - 15$.

Méthode : factoriser une somme

1. **Décompose** chaque terme en un produit qui montre le même facteur.
2. **Écris** ce facteur commun devant une parenthèse.
3. **Recopie** dans la parenthèse ce qui reste, avec le signe entre les termes.
4. **Vérifie** en développant ton résultat.

Le facteur caché 1

Trouve l'erreur : Le terme seul

Sami doit factoriser $6y + 6$. Quelle écriture est juste ?

A. $6y$

Faux.
La valeur change : pour $y = 1$, $6y = 6$, alors que $6y + 6 = 12$.

B. $6(y + 0)$

Faux.
En développant, $6(y + 0) = 6y$: le terme 6 a disparu.

C. $6(y + 6)$

Faux.
En développant, $6(y + 6) = 6y + 36$, pas $6y + 6$.

D. $6(y + 1)$

Juste.
On écrit $6 = 6 \times 1$. En développant, $6(y + 1) = 6y + 6$.

Correction
Le terme 6 s'écrit 6×1 :

$$6y + 6 = 6 \times y + 6 \times 1 = 6(y + 1)$$

Le terme 6 laisse donc 1 dans la parenthèse.

Attention : le facteur caché 1

✗ $9a + 9 = 9a$, ou $9a + 9 = 9(a + 0)$.

✓ $9a + 9 = 9 \times a + 9 \times 1 = 9(a + 1)$.

Vérifie avec $a = 2$: $18 + 9 = 27$ et $9 \times 3 = 27$.

À toi

À toi : Factoriser

Factorise $A = 15x + 10$ et $B = 8a - 8$.

Indice 1
Cherche un nombre présent dans les deux termes de chaque somme.
Indice 2
Pour A, cherche un nombre qui divise 15 et 10.
Indice 3
Point délicat : dans B, demande-toi ce qui reste dans la parenthèse pour le terme 8.

Réponse
Factorisation de A. Le nombre 5 est un facteur de $15x$ et de 10 :

$$\begin{aligned} A &= 5 \times 3x + 5 \times 2 \\ &= 5(3x + 2) \end{aligned}$$

Factorisation de B. Le terme 8 s'écrit 8×1 :

$$\begin{aligned} B &= 8 \times a - 8 \times 1 \\ &= 8(a - 1) \end{aligned}$$

Vérification. En développant, $5(3x + 2) = 15x + 10$ et $8(a - 1) = 8a - 8$.

Remarque **: Coin devoir : montrer la décomposition**

En devoir, écris la décomposition, puis vérifie en développant.

« D'après la distributivité, $18y - 12 = 6 \times 3y - 6 \times 2 = 6(3y - 2)$. Vérification : $6(3y - 2) = 18y - 12$. »

Le mot du prof : factoriser, c'est développer à l'envers. Ta meilleure alliée est la vérification.

Un développement rapide te dit si ta factorisation est juste.

Supprimer des parenthèses

Des calculs pour découvrir

Devine : Un moins devant la parenthèse

Tu as 20 dirhams. Tu achètes un cahier à 8 dirhams et un stylo à 5 dirhams.

Il te reste $20 - (8 + 5) = 20 - 13 = 7$ dirhams. Quel calcul sans parenthèses donne aussi 7 ?

A. $20 - 8 + 5$

Faux.

Ce calcul donne 17. Le 5 doit aussi être soustrait.

B. $20 - 8 - 5$

Juste.

On soustrait 8, puis on soustrait 5 : $12 - 5 = 7$.

C. $20 + 8 + 5$

Faux.

Ce calcul donne 33. Le signe moins a disparu.

Correction

$$20 - 8 - 5 = 12 - 5 = 7$$

Soustraire la somme $8 + 5$, c'est soustraire 8, puis soustraire 5.

Avec le signe $+$, rien ne change : $12 + (6 - 4) = 12 + 2 = 14$, et $12 + 6 - 4 = 14$.

Avec le signe $-$, les signes changent : $15 - (9 - 3) = 15 - 6 = 9$, et $15 - 9 + 3 = 9$.

La règle

Rappel du chapitre sur l'addition des relatifs : soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé. L'opposé de 9 est -9. L'opposé de -3 est 3.

Propriété : Supprimer des parenthèses

Soit a, b et c des nombres décimaux relatifs.

- **Parenthèses précédées du signe $+$** : on les supprime sans changer les signes des termes de la parenthèse :

$$a + (b + c) = a + b + c \quad \text{et} \quad a + (b - c) = a + b - c.$$

- **Parenthèses précédées du signe $-$** : on les supprime en **changeant le signe de chaque terme** de la parenthèse :

$$a - (b + c) = a - b - c \quad \text{et} \quad a - (b - c) = a - b + c.$$

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. On l'a vérifié sur des calculs avec des nombres.

Exemple : les deux signes

Une parenthèse précédée de $+$, puis deux précédées de $-$:

$$x + (7 - y) = x + 7 - y$$

$$a - (b + 6) = a - b - 6$$

$$\begin{aligned} 13 - (y - 5) &= 13 - y + 5 \\ &= 13 + 5 - y \\ &= 18 - y \end{aligned}$$

Après un signe $-$, chaque terme change de signe. Dans la dernière ligne, on change aussi l'ordre des termes pour regrouper les nombres.

Bonus : un lien avec la distributivité (tu peux sauter cette étape)

Exemple : Bonus : multiplier par moins un

Rappel : multiplier un nombre par -1 donne son opposé. Soustraire $4 + 6$, c'est donc ajouter $(-1) \times (4 + 6)$.

$$\begin{aligned} &(-1) \times (4 + 6) \\ &= (-1) \times 4 + (-1) \times 6 \\ &= -4 + (-6) = -4 - 6 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 10 - (4 + 6) &= 10 + (-4 - 6) \\ &= 10 - 4 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce n'est qu'un exemple : la règle reste admise.

Vérifie : Avec la même idée

Avec la même idée, à quoi est égal $(-1) \times (7 - 2)$?

A. $-7 + 2$

Juste.

Chaque terme change de signe : 7 devient -7 et -2 devient 2. On trouve -5.

B. $-7 - 2$

Faux.

Le terme -2 n'a pas changé de signe. Ce calcul donne -9 au lieu de -5.

C. $7 - 2$

Faux.

Aucun signe n'a changé. Ce calcul donne 5, l'opposé du bon résultat.

Correction

En calculant d'abord la parenthèse : $(-1) \times (7-2) = (-1) \times 5 = -5$.

Or $-7+2 = -5$ aussi : chaque terme de la parenthèse a changé de signe.

La méthode

Méthode : supprimer des parenthèses

1. **Regarde** le signe écrit juste devant la parenthèse.
2. **Recopie** les termes avec leurs signes si ce signe est $+$.
3. **Change** le signe de chaque terme si ce signe est $-$.
4. **Regroupe** ensuite les nombres, s'il y en a.

Attention : tous les termes changent

✗ $16-(y-3) = 16-y-3$.

✓ Le signe $-$ change aussi le signe de -3 :

$$\begin{aligned} 16-(y-3) &= 16-y+3 \\ &= 16+3-y \\ &= 19-y \end{aligned}$$

Vérifie avec $y=5$: au départ, $16-(5-3) = 16-2 = 14$. La bonne écriture donne $19-5 = 14$, la fausse $16-5-3 = 8$.

À toi

À toi : Supprimer des parenthèses

Supprime les parenthèses, puis regroupe les nombres : $A = 25-(x+8)$ et $B = 14-(5-a)$.

Indice 1
Regarde le signe écrit devant chaque parenthèse.
Indice 2
Pour A, le signe devant la parenthèse est $-$: change le signe de chaque terme.
Indice 3
Point délicat : dans B, le terme a porte déjà un signe $-$. Que devient ce signe ?

Réponse
Expression A. On supprime les parenthèses, car le signe $-$ change le signe de chaque terme. Puis on regroupe les nombres :

$$\begin{aligned} A &= 25 - x - 8 \\ &= 25 - 8 - x \\ &= 17 - x \end{aligned}$$

Expression B. Pour la même raison, le terme $-a$ devient $+a$:

$$\begin{aligned} B &= 14 - 5 + a \\ &= 9 + a \end{aligned}$$

Conclusion. $A = 17 - x$ et $B = 9 + a$.

Remarque : Coin devoir : annoncer la règle

En devoir, dis quelle règle tu appliques.

« La parenthèse est précédée du signe $-$. D'après la règle, on change le signe de chaque terme : $30 - (y + 12) = 30 - y - 12 = 30 - 12 - y = 18 - y$. »

Le mot du prof : devant une parenthèse, regarde toujours le signe. C'est lui qui décide.

Tu sais maintenant supprimer les parenthèses du chapitre.

Calculer vite et réduire

Calculer de tête

Devine : Un produit à casser

Tu veux calculer 6×103 de tête. Quelle écriture t'aide ?

A. $6 \times 100 + 3$

Faux.

Le 3 n'est pas multiplié par 6. Ce calcul donne 603.

B. $6 + 100 \times 3$

Faux.

Ce calcul donne 306. Le 6 doit multiplier 100 et 3.

C. $6 \times 100 + 6 \times 3$

Juste.

On développe $6 \times (100 + 3)$: $600 + 18 = 618$.

Correction

On écrit $103 = 100 + 3$, puis on développe, par la distributivité :

$$\begin{aligned} 6 \times 103 &= 6 \times (100 + 3) \\ &= 6 \times 100 + 6 \times 3 \\ &= 600 + 18 = 618 \end{aligned}$$

Exemple : développer pour calculer

On remplace 99 par $100 - 1$, puis on développe :

$$\begin{aligned} 8 \times 99 &= 8 \times (100 - 1) \\ &= 8 \times 100 - 8 \times 1 \\ &= 800 - 8 = 792 \end{aligned}$$

Exemple : factoriser pour calculer

Le facteur commun est $3{,}6$. On factorise, et la parenthèse donne 10 :

$$\begin{aligned} 3{,}6 \times 7 + 3{,}6 \times 3 &= 3{,}6 \times (7 + 3) \\ &= 3{,}6 \times 10 = 36 \end{aligned}$$

Ici, le facteur commun 4 est écrit à droite. On le garde à droite de la parenthèse :

$$\begin{aligned} 8{,}5 \times 4 - 3{,}5 \times 4 &= (8{,}5 - 3{,}5) \times 4 \\ &= 5 \times 4 = 20 \end{aligned}$$

Choisir le bon sens

Méthode : calculer vite

1. **Cherche** un nombre proche de 10, de 100 ou de $1\,000$, ou un facteur commun.
2. **Développe** quand un facteur est proche d'un nombre rond.
3. **Factorise** quand deux produits ont un facteur commun.
4. **Calcule** le produit simple obtenu.

Vérifie : Calcul rapide

Calcule $2{,}5 \times 37 + 2{,}5 \times 63$ en factorisant.

A. 25

Faux.
La parenthèse vaut $37 + 63 = 100$, pas 10.

B. 250

Juste.
$2{,}5 \times (37 + 63) = 2{,}5 \times 100 = 250$.

C. $2\,500$

Faux.
On a multiplié par $1\,000$ au lieu de 100.

D. 100

Faux.

On a oublié le facteur commun $2{,}5$.

Correction

Les deux produits ont le facteur commun $2{,}5$. On les regroupe par factorisation :

$$\begin{aligned} &2{,}5 \times 37 + 2{,}5 \times 63 \\ &= 2{,}5 \times (37 + 63) \\ &= 2{,}5 \times 100 = 250 \end{aligned}$$

Réduire une expression

Tu ranges 4 boîtes de y crayons, puis 6 autres boîtes de y crayons. Tu as 10 boîtes : $4y + 6y = (4 + 6)y = 10y$.

Les termes $4y$ et $6y$ sont **semblables** : leur partie en lettres est exactement la même. Ainsi, $2ab$ et $5ab$ sont semblables, mais $3ab$ et $2a$ ne le sont pas.

Réduire une expression, c'est regrouper ses termes semblables.

Méthode : réduire une expression

1. **Repère** les termes semblables : leur partie en lettres est exactement la même.
2. **Factorise** ces termes par la lettre, puis calcule la parenthèse.
3. **Recopie** les autres termes sans les mélanger.

Exemple : Exemple guidé : réduire

On réduit $9a + 2 - 4a$.

Changer l'ordre. On rapproche les termes semblables : $9a - 4a + 2$.

Factoriser. $9a - 4a = (9 - 4)a = 5a$.

Recopier. Le terme 2 n'a pas de lettre : il reste seul. Donc $9a + 2 - 4a = 5a + 2$.

De même, dans $x + 3x$, le facteur caché 1 revient :

$$\begin{aligned} x + 3x &= 1 \times x + 3 \times x \\ &= (1 + 3)x = 4x \end{aligned}$$

Attention : des termes qui ne sont pas semblables

✗ $4y + 3 = 7y$.

✓ $4y + 3$ ne se réduit pas : le terme 3 n'a pas de lettre.

Pour $y = 2$: $4 \times 2 + 3 = 11$, alors que $7 \times 2 = 14$.

Exemple : Exemple guidé : un produit soustrait

On réduit $3(y + 2) - 2(y - 4)$. Le signe $-$ devant $2(y - 4)$ est une soustraction.

Développer chaque produit. $3(y + 2) = 3y + 6$ et $2(y - 4) = 2y - 8$. On soustrait tout le second produit : on garde ses parenthèses.

Supprimer les parenthèses. Elles sont précédées du signe $-$: chaque terme change de signe. Le terme -8 devient $+8$.

Réduire. On change l'ordre des termes, puis on regroupe : $3y - 2y = (3 - 2)y = y$ et $6 + 8 = 14$.

$$\begin{aligned} &3(y + 2) - 2(y - 4) \\ &= 3y + 6 - (2y - 8) \\ &= 3y + 6 - 2y + 8 = y + 14 \end{aligned}$$

À toi

À toi : Réduire

Réduis $A = 6x + 2x - 5$ et $B = 3 + 5a - 1 - 2a$.

Indice 1
Repère les termes semblables : regarde la partie en lettres de chaque terme.
Indice 2
Pour A, regroupe les termes en x ensemble, sans toucher au -5.
Indice 3
Point délicat : dans B, regroupe aussi les nombres 3 et -1, à part.

Réponse
Expression A. Les termes $6x$ et $2x$ sont semblables. Le terme -5 est recopié :

$$\begin{aligned} A &= (6 + 2)x - 5 \\ &= 8x - 5 \end{aligned}$$

Expression B. On change l'ordre des termes, puis on regroupe :

$$\begin{aligned} B &= 5a - 2a + 3 - 1 \\ &= (5 - 2)a + 2 \\ &= 3a + 2 \end{aligned}$$

Remarque : Coin devoir : réduire pas à pas

En devoir, écris la factorisation par la lettre avant le résultat.

« On change l'ordre des termes : $7y - 3 + 2y = 7y + 2y - 3$. D'après la distributivité, $7y + 2y - 3 = (7 + 2)y - 3 = 9y - 3$. »

Le mot du prof : calculer vite n'est pas de la magie. C'est la distributivité, lue dans le bon sens.

Tu sais maintenant choisir entre développer et factoriser.

Synthèse

> À retenir **: Ce qu'il faut retenir**
>
> **Développer** : le facteur multiplie chaque terme, $k(a + b) = ka + kb$.
>
> **Factoriser** : on sort le facteur commun, $ka - kb = k(a - b)$.
>
> **Parenthèses** : après un signe $-$, chaque terme change de signe.
>
> **Réduire** : on regroupe seulement les termes semblables.

Le Résumé reprend ces règles en une page. Les exercices t'entraînent ensuite, du plus simple jusqu'au niveau d'un devoir surveillé.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Développement et factorisation » (1ac · general · mathematiques)