BURHAN

Résumé : Deux parallèles et une sécante

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/deux-paralleles-et-une-secante/resume

Chapitre	Semestre
Deux parallèles et une sécante	Semestre 2

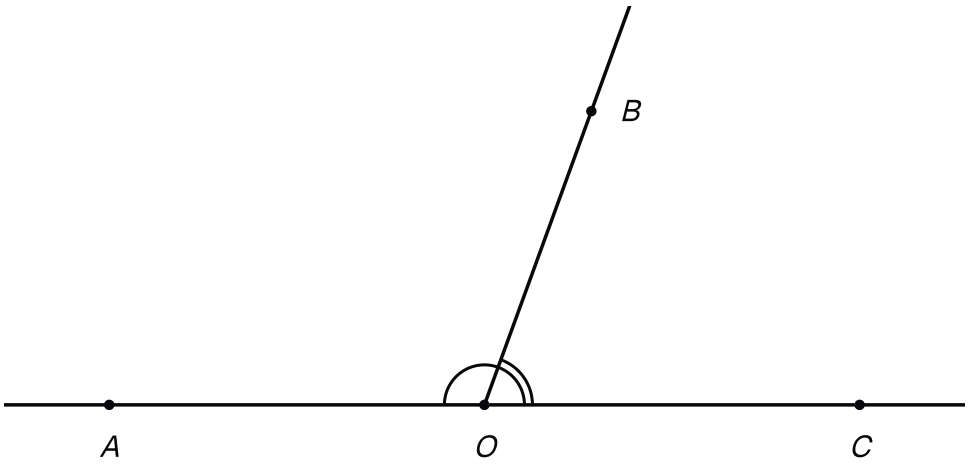
Le vocabulaire des angles

Définition : Angles adjacents, complémentaires, supplémentaires

Rappel : un angle droit mesure $90°$ et un angle plat mesure $180°$.

- Deux angles sont **adjacents** lorsqu'ils ont le même sommet, un côté commun, et qu'ils sont situés de part et d'autre de ce côté commun.
- Deux angles sont **complémentaires** lorsque la somme de leurs mesures est égale à $90°$.
- Deux angles sont **supplémentaires** lorsque la somme de leurs mesures est égale à $180°$.

Par exemple, si A, O et C sont alignés dans cet ordre et si B n'est pas sur la droite (AC), les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont adjacents et forment l'angle plat $\widehat{AOC}$: ils sont supplémentaires.



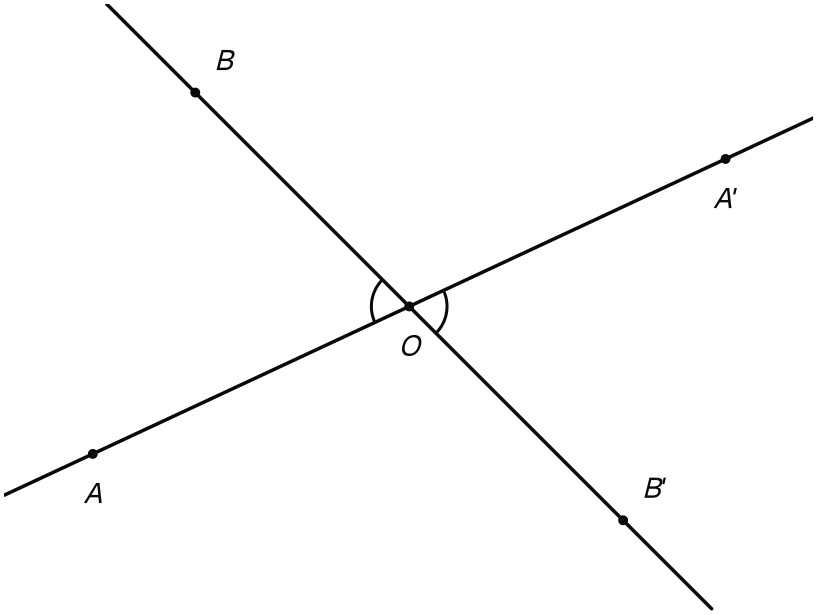
Deux angles adjacents qui se complètent en un angle plat : AOB et BOC, de part et d'autre de [OB).

Propriété : Angles opposés par le sommet

Deux droites (AA') et (BB') se coupent en un point O, avec O entre A et A', et O entre B et B'. Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont dits **opposés par le sommet**.

Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure :

$$\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$$



Les angles AOB et A'OB', face à face autour de O, portent le même codage : ils sont égaux.

Exemple : Un angle, son supplémentaire, son complémentaire

Les points A, O et C sont alignés dans cet ordre, B n'est pas sur la droite (AC), et $\widehat{AOB} = 37°$.

Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ forment l'angle plat $\widehat{AOC}$: ils sont supplémentaires.

$$\widehat{BOC} = 180° - 37° = 143°$$

Un angle complémentaire de $\widehat{AOB}$ mesure :

$$90° - 37° = 53°$$

À retenir : Regarde le sommet, puis les côtés

Pour nommer une paire d'angles, regarde d'abord leur sommet. Regarde ensuite leurs côtés.

Deux angles opposés par le sommet ont le même sommet. Les côtés de l'un prolongent les côtés de l'autre.

Attention : Ne mélange pas 90 et 180

✗ « Le supplémentaire d'un angle de $28°$ mesure $62°$. » Ce calcul, $90° - 28°$, donne le complémentaire.

✓ « Le supplémentaire d'un angle de $28°$ mesure $180° - 28° = 152°$. »

Complémentaires : total de $90°$. Supplémentaires : total de $180°$.

Deux droites et une sécante

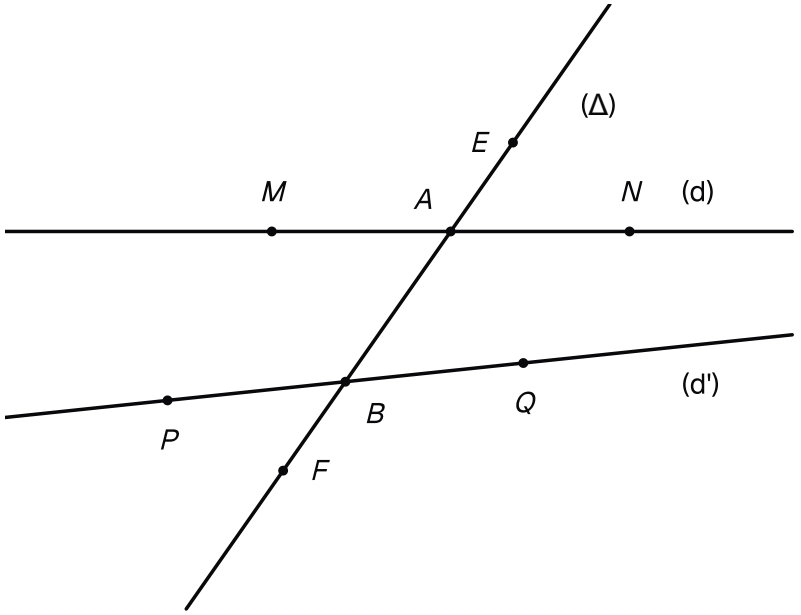
Définition : Angles alternes-internes, angles correspondants

Sur toute la suite, on fixe la figure suivante. Deux droites (d) et (d') sont coupées par une troisième droite (Δ), appelée **sécante** : (Δ) coupe (d) en A et (d') en B.

La droite (d) est au-dessus de (d'). Sur (d), le point M est à gauche de A et le point N à droite. Sur (d'), le point P est à gauche de B et le point Q à droite. Sur (Δ), le point E est au-dessus de A et le point F au-dessous de B.

La bande comprise entre (d) et (d') est appelée l'**intérieur**.

- Deux angles sont **alternes-internes** lorsqu'ils ont pour sommets A et B, qu'ils sont tous les deux à l'intérieur, et de part et d'autre de la sécante. Il y a deux paires :
  - $\widehat{MAB}$ et $\widehat{ABQ}$;
  - $\widehat{NAB}$ et $\widehat{ABP}$.
- Deux angles sont **correspondants** lorsqu'ils ont pour sommets A et B, qu'ils sont du même côté de la sécante, l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur : ils occupent la même position en A et en B. Il y a quatre paires :
  - $\widehat{EAN}$ et $\widehat{ABQ}$;
  - $\widehat{EAM}$ et $\widehat{ABP}$;
  - $\widehat{MAB}$ et $\widehat{PBF}$;
  - $\widehat{NAB}$ et $\widehat{QBF}$.



La figure fixée pour tout le Résumé : deux droites, une sécante et six points nommés autour de A et de B.

Méthode : Nommer les paires d'angles d'une figure

1. **Trouver la sécante** : c'est la droite qui coupe les deux autres. Repère ses deux points d'intersection.
2. **Repérer la bande** : l'intérieur est la partie comprise entre les deux droites.
3. **Alternes-internes** : deux angles dans la bande, un à chaque point d'intersection, de chaque côté de la sécante.
4. **Correspondants** : deux angles à la même place en chaque point d'intersection, du même côté de la sécante.

Exemple : Les voisins de l'angle NAB

Sur la figure fixée, l'angle $\widehat{NAB}$ est dans la bande, à droite de la sécante.

L'angle $\widehat{ABP}$ est dans la bande, à gauche de la sécante, avec le sommet B. Donc $\widehat{NAB}$ et $\widehat{ABP}$ sont alternes-internes.

L'angle $\widehat{QBF}$ est sous (d'), à droite de la sécante. Donc $\widehat{NAB}$ et $\widehat{QBF}$ sont correspondants.

À retenir : Une position, pas une mesure

Les mots « alternes-internes » et « correspondants » décrivent la place de deux angles. Ils ne disent rien de leurs mesures.

Ces deux mots ont un sens même si les droites ne sont pas parallèles.

Attention : Dans la bande ou dehors ?

✗ « $\widehat{MAB}$ et $\widehat{PBF}$ sont alternes-internes. » L'angle $\widehat{PBF}$ est sous (d') : il est hors de la bande.

✓ « $\widehat{MAB}$ et $\widehat{PBF}$ sont correspondants. » Ils sont du même côté de la sécante, l'un dans la bande et l'autre dehors.

Deux angles de même sommet ne forment jamais une telle paire.

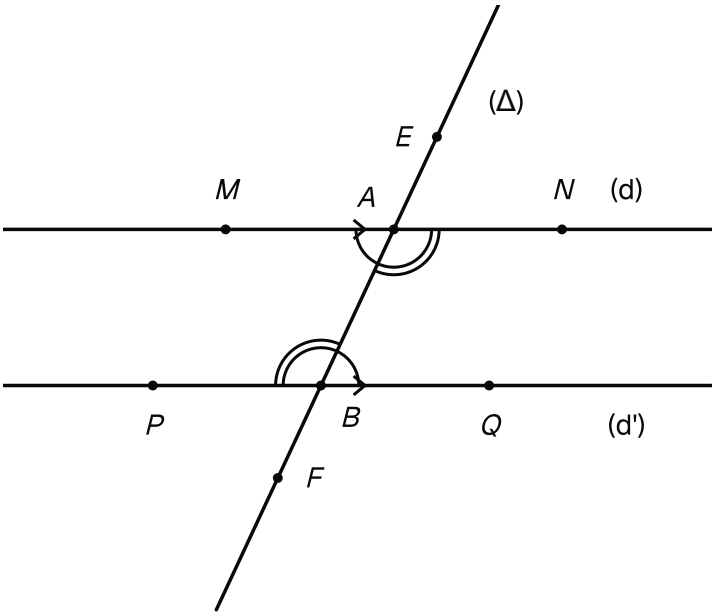
Avec deux parallèles, des angles égaux

Propriété : Deux parallèles et une sécante : angles alternes-internes

Si deux droites **parallèles** sont coupées par une sécante, alors les angles **alternes-internes** qu'elles forment ont la **même mesure**.

Avec la figure fixée : si $(d) \parallel (d')$, alors

$$\widehat{MAB} = \widehat{ABQ}$$
$$\widehat{NAB} = \widehat{ABP}$$



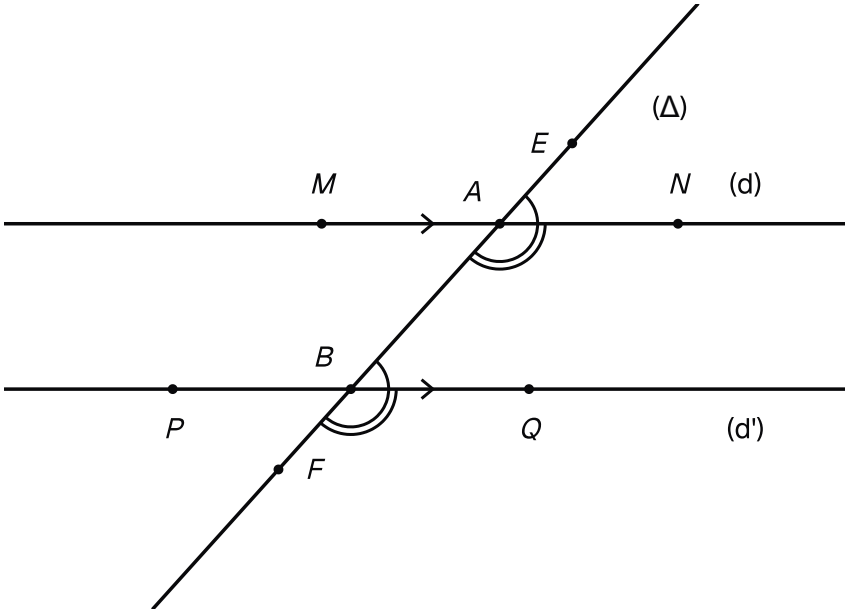
Deux parallèles : MAB et ABQ portent le même arc, NAB et ABP le même double arc.

Propriété : Deux parallèles et une sécante : angles correspondants

Si deux droites **parallèles** sont coupées par une sécante, alors les angles **correspondants** qu'elles forment ont la **même mesure**.

Avec la figure fixée : si $(d) \parallel (d')$, alors

$$\widehat{EAN} = \widehat{ABQ}$$
$$\widehat{EAM} = \widehat{ABP}$$
$$\widehat{MAB} = \widehat{PBF}$$
$$\widehat{NAB} = \widehat{QBF}$$



Des angles correspondants égaux : EAN et ABQ d'un côté, NAB et QBF de l'autre, à la même place en A et en B.

Méthode : Calculer un angle grâce à deux parallèles

1. **Lire la donnée** : trouve dans l'énoncé la phrase qui dit que les droites sont parallèles. Sans elle, tu n'écris aucune égalité entre deux angles de sommets différents.
2. **Nommer la paire** : alternes-internes, correspondants, opposés par le sommet, ou supplémentaires.
3. **Citer la propriété** : « Comme $(d) \parallel (d')$, d'après la propriété des angles correspondants, … ».
4. **Finir** : écris l'égalité, ou fais le calcul en degrés.

Exemple : Deux angles en B à partir d'un angle en A

On sait que $(d) \parallel (d')$ et que $\widehat{EAN} = 62°$.

Les angles $\widehat{EAN}$ et $\widehat{ABQ}$ sont correspondants. Les droites sont parallèles, donc, d'après la propriété des angles correspondants, $\widehat{ABQ} = 62°$.

Les points P, B et Q sont alignés, donc $\widehat{ABP}$ et $\widehat{ABQ}$ sont supplémentaires :

$$\widehat{ABP} = 180° - 62° = 118°$$

À retenir : Une phrase en trois morceaux

Une bonne justification contient trois morceaux. Les droites sont parallèles. Les angles sont alternes-internes, ou correspondants. Donc ils ont la même mesure.

Attention : Sans parallèles, pas d'égalité

✗ « $\widehat{MAB}$ et $\widehat{ABQ}$ sont alternes-internes, donc $\widehat{ABQ} = \widehat{MAB}$. » Ici, rien ne dit que (d) et (d') sont parallèles.

✓ « $(d) \parallel (d')$ et $\widehat{MAB}$, $\widehat{ABQ}$ sont alternes-internes, donc $\widehat{ABQ} = \widehat{MAB}$. »

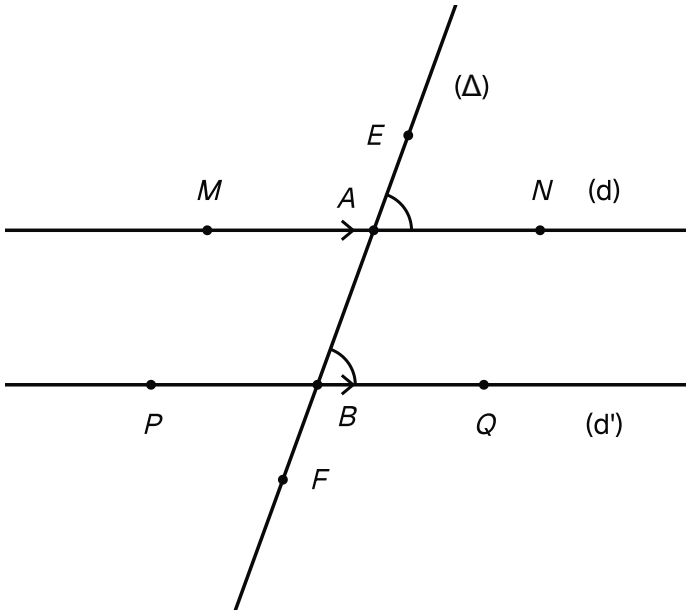
Si les deux droites se coupent, ces deux angles n'ont pas la même mesure : la propriété réciproque, plus bas, le prouve.

Reconnaître deux droites parallèles

Propriété : Reconnaître deux droites parallèles par les angles

Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles **alternes-internes de même mesure**, ou deux angles **correspondants de même mesure**, alors ces deux droites sont **parallèles**.

Avec la figure fixée : si $\widehat{MAB} = \widehat{ABQ}$, ou si $\widehat{EAN} = \widehat{ABQ}$, alors $(d) \parallel (d')$.



Deux angles correspondants de même mesure, EAN et ABQ : la propriété conclut que (d) et (d') sont parallèles.

Méthode : Prouver que deux droites sont parallèles

1. **Choisir une paire** : prends une sécante, puis deux angles alternes-internes ou correspondants.
2. **Obtenir les deux mesures** : lis-les dans l'énoncé, ou calcule-les.
3. **Mesures égales** : conclus avec la propriété « reconnaître deux droites parallèles par les angles ».
4. **Mesures différentes** : les droites ne sont pas parallèles. En effet, avec deux parallèles, les deux mesures seraient égales.

Exemple : Parallèles ou non ?

L'énoncé donne $\widehat{MAB} = 73°$ et $\widehat{ABQ} = 73°$. Ces angles sont alternes-internes et ont la même mesure.

Les droites sont donc parallèles, selon la propriété « reconnaître deux droites parallèles par les angles » : $(d) \parallel (d')$.

Avec $\widehat{ABQ} = 77°$, les mesures seraient différentes : (d) et (d') ne seraient pas parallèles.

À retenir : Le chemin inverse

Ici, tu pars des angles pour arriver aux droites. Dans la section précédente, tu partais des droites pour arriver aux angles.

Attention : Ne pars pas de ce que tu cherches

✗ « $(d) \parallel (d')$, donc $\widehat{MAB} = \widehat{ABQ}$, donc $(d) \parallel (d')$. » Cette phrase utilise dès le début ce qu'il fallait prouver.

✓ « $\widehat{MAB} = \widehat{ABQ}$ et ces angles sont alternes-internes, donc $(d) \parallel (d')$. »

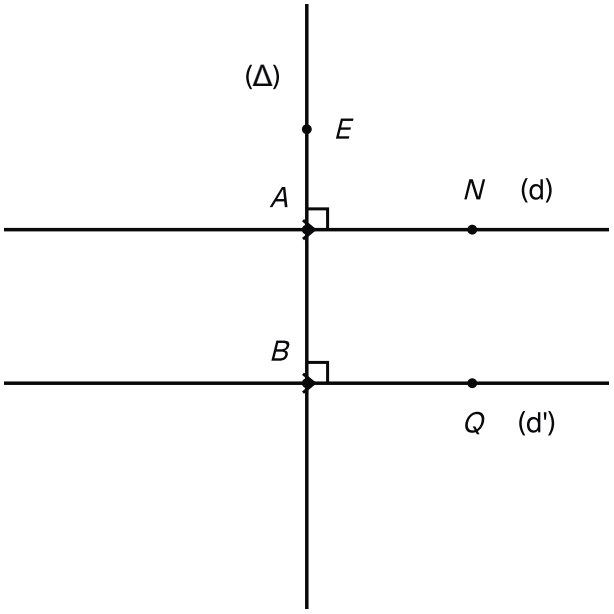
Pour calculer un angle, tu pars des parallèles. Pour prouver un parallélisme, tu pars des angles.

Parallèles et perpendiculaires

Propriété : Une perpendiculaire à l'une de deux parallèles

Si deux droites sont **parallèles**, alors toute droite **perpendiculaire** à l'une est **perpendiculaire** à l'autre.

Autrement dit : si $(d) \parallel (d')$ et $(\Delta) \perp (d)$, alors $(\Delta) \perp (d')$.

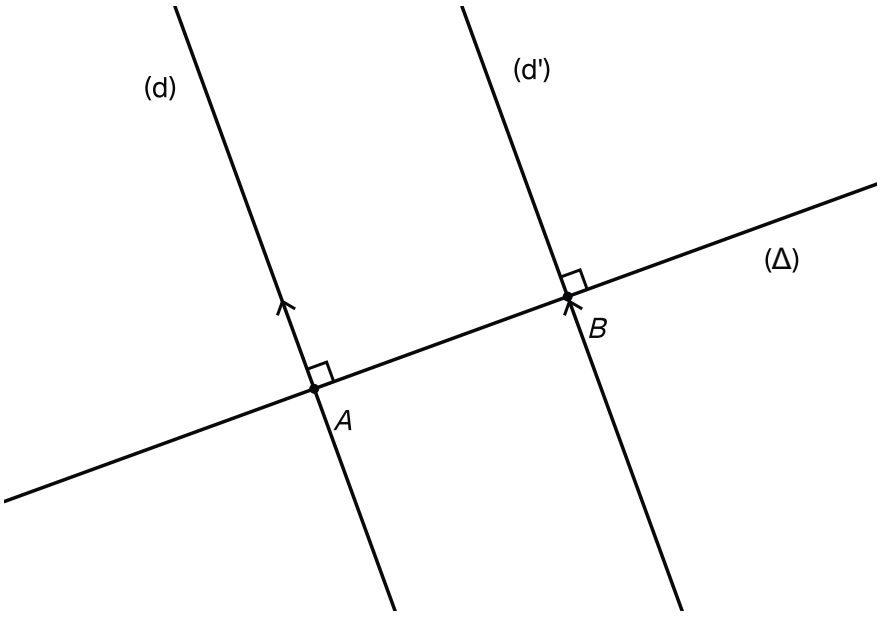


Deux parallèles horizontales et une verticale (Δ) : un angle droit en A entraîne un angle droit en B.

Propriété : Deux perpendiculaires à une même droite

Si deux droites distinctes sont **perpendiculaires à une même droite**, alors elles sont **parallèles**.

Autrement dit : si $(d) \perp (\Delta)$ et $(d') \perp (\Delta)$, avec $(d) \neq (d')$, alors $(d) \parallel (d')$.



La droite (Δ) penche ; (d) et (d') la coupent chacune à angle droit, et elles sont parallèles entre elles.

Exemple : Deux conclusions sans calcul

On sait que $(d) \parallel (d')$ et que $(\Delta) \perp (d)$. La propriété d'une perpendiculaire à l'une de deux parallèles donne alors $(\Delta) \perp (d')$.

Autre cas : $(d_1) \perp (\Delta)$ et $(d_2) \perp (\Delta)$, et ces deux droites sont distinctes. La propriété de deux perpendiculaires à une même droite donne alors $(d_1) \parallel (d_2)$.

Remarque : Des propriétés déjà rencontrées

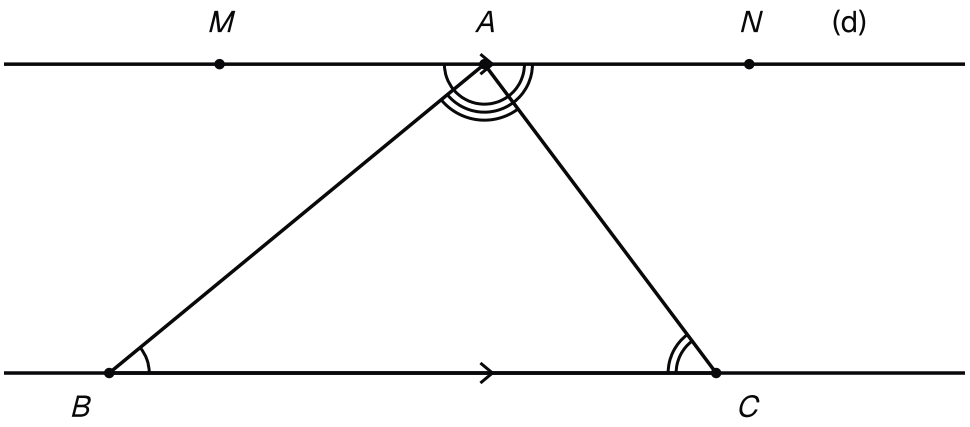
Rappel du chapitre sur les droites perpendiculaires et parallèles : tu as déjà utilisé ces deux propriétés. Ce chapitre les relie aux angles alternes-internes et correspondants.

La somme des angles d'un triangle

Théorème : Somme des angles d'un triangle

Dans tout triangle ABC, la somme des mesures des trois angles est égale à $180°$:

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°.$$



Autour de A, sur la parallèle (d) à (BC), les trois angles du triangle se rangent et forment un angle plat.

Méthode : Trouver le troisième angle

1. **Écrire l'égalité** : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$, avec les angles de ton triangle.
2. **Regarder la nature du triangle** : isocèle, deux angles égaux ; équilatéral, trois angles de $60°$; rectangle, un angle de $90°$.
3. **Calculer** : retire de $180°$ la somme des angles connus. Avec $47°$ et $69°$, on obtient $180° - (47° + 69°) = 64°$.

4. **Vérifier** : la somme des trois mesures doit redonner $180°$.

Exemple : Un triangle isocèle et un triangle rectangle

Le triangle RST est isocèle en R, avec $\widehat{SRT} = 38°$. Ses deux autres angles ont la même mesure.

$$\begin{aligned}\widehat{RST} + \widehat{RTS} &= 180° - 38° \\ &= 142°\end{aligned}$$

Chacun mesure donc :

$$142° \div 2 = 71°$$

Contrôle : $38° + 71° + 71° = 180°$.

Dans un triangle rectangle qui a un angle de $23°$, le troisième angle mesure :

$$180° - (90° + 23°) = 67°$$

À retenir : Admise hier, prouvée aujourd'hui

Au chapitre du triangle, cette somme de $180°$ était admise. Dans ce chapitre, elle est prouvée avec une parallèle et les angles alternes-internes.

Attention : Un dessin ne prouve rien

✗ « Sur mon dessin, les droites ont l'air parallèles, donc elles sont parallèles. » Un dessin et un rapporteur donnent seulement des valeurs approchées.

✓ « Les deux angles alternes-internes donnés ont la même mesure. La propriété « reconnaître deux droites parallèles par les angles » permet alors de conclure : les droites sont parallèles. »

Une justification part toujours des données et cite une propriété.

Fiche : quelle propriété choisir ?

Méthode : Quelle propriété pour quelle question ?

1. **Calculer un angle** : angles opposés par le sommet, angles supplémentaires ou complémentaires. Si l'énoncé dit que les droites sont parallèles : propriété des angles alternes-internes ou des angles correspondants.
2. **Démontrer un parallélisme** : propriété « reconnaître deux droites parallèles par les angles », ou propriété de deux perpendiculaires à une même droite.
3. **Démontrer une perpendicularité** : propriété d'une perpendiculaire à l'une de deux parallèles.
4. **Calculer un angle d'un triangle** : somme des angles d'un triangle, avec la nature du triangle (isocèle, équilatéral, rectangle).

Angles complémentaires

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 90^\circ$$

Angles supplémentaires

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180^\circ$$

Angles opposés par le sommet

$$\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$$

Alternes-internes, si les droites sont parallèles

$$\widehat{MAB} = \widehat{ABQ}$$

Correspondants, si les droites sont parallèles

$$\widehat{EAN} = \widehat{ABQ}$$

Somme des angles d'un triangle

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$