BURHAN

Deux parallèles et une sécante

1ère Année Collège · Mathématiques

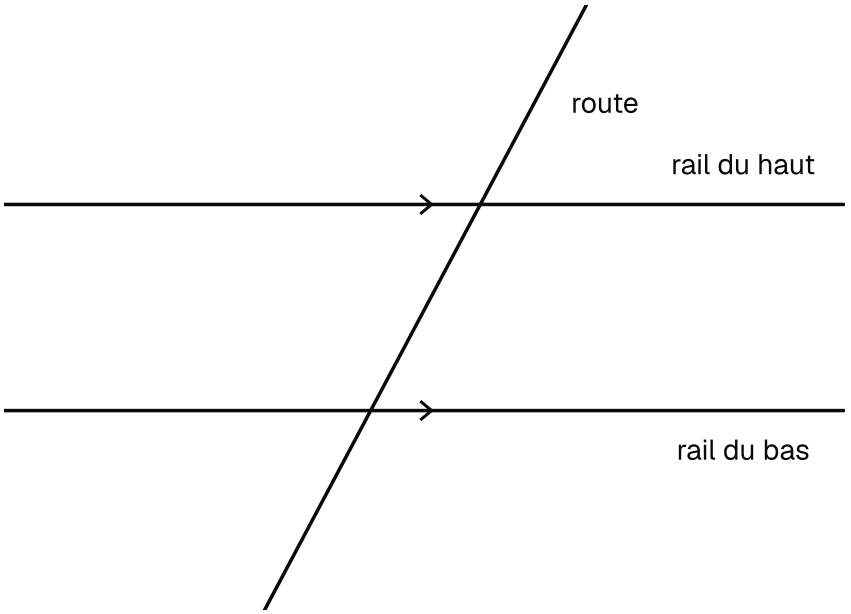
Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/deux-paralleles-et-une-secante/cours

Chapitre	Semestre
Deux parallèles et une sécante	Semestre 2

Entrée

Dans une ville, deux rails de tramway avancent côte à côte. Ils ne se rencontrent jamais : ce sont deux droites **parallèles**. Une route traverse les rails en biais.

À chaque croisement, la route forme des angles avec le rail. Ouvre aussi ton cahier : ses lignes sont parallèles. Trace un trait en biais qui les coupe.



Les deux rails du tramway, toujours à la même distance l'un de l'autre, et la route qui les traverse en biais.

Devine : Deux croisements, deux angles

Ton trait en biais coupe deux lignes voisines du cahier. À chaque croisement, regarde l'angle situé au-dessus de la ligne, à droite du trait. Que penses-tu de leurs mesures ?

A. Ils ont la même mesure.

Juste.

Bonne intuition. Les lignes sont parallèles : le trait les coupe avec la même inclinaison. Ce chapitre explique pourquoi.

B. L'angle du haut est plus grand.

Faux.

Rien ne distingue la ligne du haut de celle du bas : elles sont parallèles. Le trait les coupe de la même façon.

C. Leurs mesures n'ont pas de lien.

Faux.
Mesure-les au rapporteur : tu trouves deux fois la même valeur. Quand les lignes sont parallèles, ce n'est pas un hasard.

Correction
Les deux angles ont la même mesure. Les lignes du cahier sont parallèles, et le trait les coupe avec la même inclinaison. Ce chapitre prouve ce fait et t'apprend à t'en servir.

Dans ce chapitre, tu vas donner un nom à ces angles et comparer leurs mesures. Tu sauras calculer un angle sans rapporteur, en citant une propriété. Tu sauras aussi prouver que deux droites sont parallèles.

À la fin, tu comprendras pourquoi les trois angles d'un triangle font $180°$ ensemble. Prépare ton cahier, une règle, une équerre et un rapporteur.

Le vocabulaire des angles

Mesurer et nommer des angles

Devine : Deux angles sur une droite

Trace une droite et place trois points A, O et C dans cet ordre. Place un point B au-dessus de la droite pour que $\widehat{AOB}$ mesure $130°$, puis trace $[OB)$.

Combien mesure $\widehat{BOC}$?

A. $90°$

Faux.
Un angle de $90°$ est un angle droit. Ici, les deux angles réunis forment un angle plat, pas un angle droit.

B. $50°$

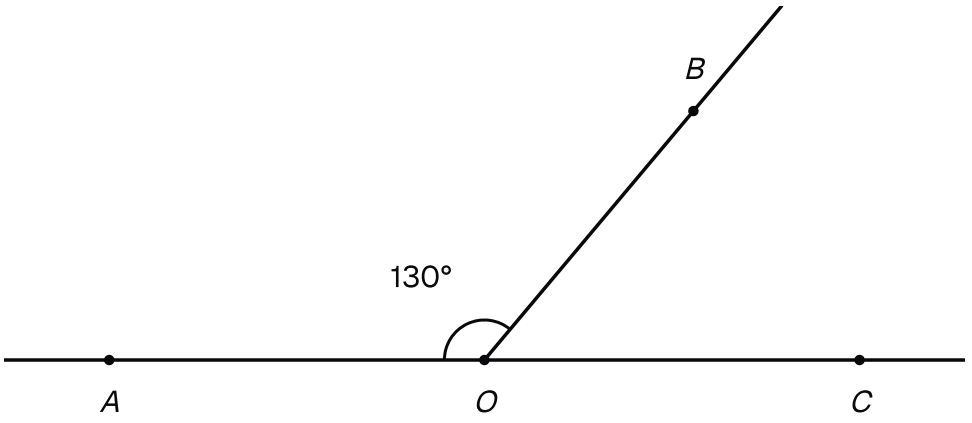
Juste.
Les deux angles réunis forment l'angle plat $\widehat{AOC}$, qui mesure $180°$. Il reste $180° - 130° = 50°$.

C. $130°$

Faux.
Tu as recopié la mesure donnée. Or les deux angles se partagent l'angle plat : ici, ils ne sont pas égaux.

Correction
Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ forment ensemble l'angle plat $\widehat{AOC}$: ils sont supplémentaires. Donc :

$$\widehat{BOC} = 180° - 130° = 50°$$



Les points A, O et C sur une même droite, la demi-droite [OB) au-dessus et l'angle AOB de 130 degrés.

Rappel du primaire : un angle se mesure en **degrés**, avec un **rapporteur**. Le **sommet** d'un angle est sa pointe.

Un angle droit mesure $90°$. Un angle plat mesure $180°$: ses deux côtés forment une droite.

Définition : Angles adjacents, complémentaires, supplémentaires

Rappel : un angle droit mesure $90°$ et un angle plat mesure $180°$.

- Deux angles sont **adjacents** lorsqu'ils ont le même sommet, un côté commun, et qu'ils sont situés de part et d'autre de ce côté commun.
- Deux angles sont **complémentaires** lorsque la somme de leurs mesures est égale à $90°$.
- Deux angles sont **supplémentaires** lorsque la somme de leurs mesures est égale à $180°$.

Par exemple, si A, O et C sont alignés dans cet ordre et si B n'est pas sur la droite (AC), les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont adjacents et forment l'angle plat $\widehat{AOC}$: ils sont supplémentaires.

Exemple : trois mots, trois cas

Un angle de $35°$ et un angle de $55°$ sont **complémentaires**, car :

$$35° + 55° = 90°$$

Un angle de $70°$ et un angle de $110°$ sont **supplémentaires**, car :

$$70° + 110° = 180°$$

Deux parts voisines d'une tarte ressemblent à deux angles **adjacents** : même pointe, un bord commun, une part de chaque côté de ce bord.

Attention : 90 ou 180 ?

Un angle mesure $40°$. On cherche son supplémentaire.

✗ « Son supplémentaire mesure $90° - 40° = 50°$. »

✓ « Son supplémentaire mesure $180° - 40° = 140°$. »

Complémentaires : la somme fait $90°$, un angle droit. Supplémentaires : la somme fait $180°$, un angle plat.

Les angles opposés par le sommet

Devine : Une croix penchée

Trace deux droites qui se croisent en un point O, comme une croix penchée. Elles forment quatre angles autour de O. Compare deux angles qui se font face, de part et d'autre de O.

A. Ils sont toujours supplémentaires.

Faux.
Deux voisins le long d'une droite sont supplémentaires. Deux angles qui se font face ne sont pas voisins : mesure-les.

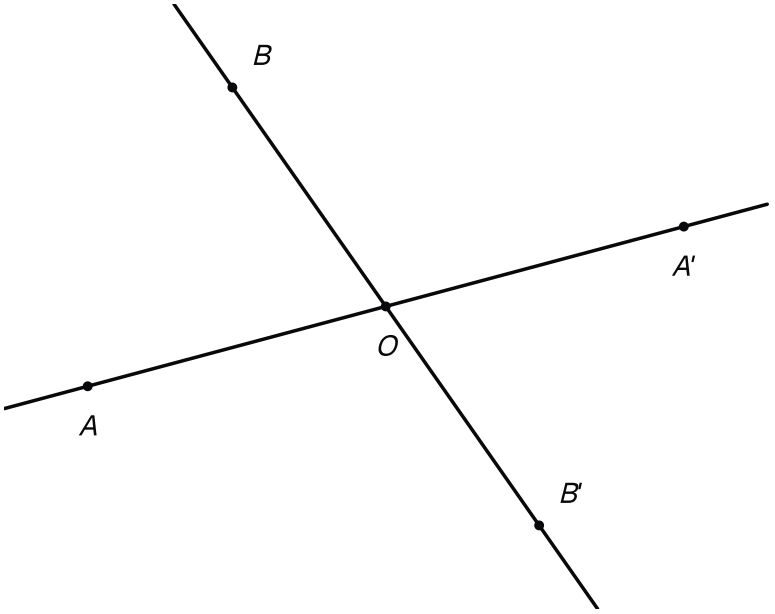
B. Leurs mesures n'ont aucun lien.

Faux.
Change l'inclinaison des droites et mesure encore. Les deux angles qui se font face restent égaux à chaque essai.

C. Ils ont la même mesure.

Juste.
Les deux angles qui se font face ont la même mesure. Tu vas voir que ce n'est pas un hasard.

Correction
Deux angles qui se font face autour de O ont la même mesure. On les appelle des angles **opposés par le sommet**.



Une croix penchée : les droites (AA') et (BB') se coupent en O et découpent quatre angles autour de ce point.

Mesurer ne suffit pas : un rapporteur donne une valeur approchée, et seulement pour ton dessin.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve n'utilise que l'angle plat. Chacun des deux angles s'ajoute au même voisin pour faire $180°$.

Propriété : Angles opposés par le sommet

Deux droites (AA') et (BB') se coupent en un point O, avec O entre A et A', et O entre B et B'. Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont dits **opposés par le sommet**.

Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure : $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$.

Démonstration

Étape 1. Les points A, O et A' sont alignés, donc $\widehat{AOA'}$ est un angle plat. Les angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOA'}$ le forment : $\widehat{AOB} + \widehat{BOA'} = 180°$.

Étape 2. De même, B, O et B' sont alignés, donc $\widehat{BOB'}$ est un angle plat : $\widehat{BOA'} + \widehat{A'OB'} = 180°$.

Étape 3. Les deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont donc supplémentaires du même angle $\widehat{BOA'}$. Chacun mesure $180° - \widehat{BOA'}$. Donc $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux angles qui complètent **le même angle** pour former un angle plat ont la même mesure. Chacun vaut $180°$ moins cet angle commun. Cette idée resservira dans le chapitre.

Vérifie : L'argument du voisin commun

La preuve dit : « Les deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont donc supplémentaires du même angle $\widehat{BOA'}$. » Pourquoi cet argument suffit-il pour conclure ?

A. Parce que les deux angles sont adjacents.

Faux.
Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ n'ont aucun côté commun : ils ne sont pas adjacents. L'argument repose sur leur voisin commun.

B. Parce que chacun vaut $180°$ moins le même angle.

Juste.
Les deux mesures s'obtiennent par le même calcul : $180°$ moins la mesure de $\widehat{BOA'}$. Elles sont donc égales.

C. Parce qu'on les a mesurés au rapporteur.

Faux.
Une mesure est approchée et ne vaut que pour un dessin. La preuve marche pour toutes les croix, sans rapporteur.

Correction
Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont tous deux supplémentaires de $\widehat{BOA'}$. Chacun mesure donc $180°$ moins la mesure de $\widehat{BOA'}$. Deux mesures obtenues par le même calcul sont égales.

Exemple : deux droites qui se coupent

Deux droites (AA') et (BB') se coupent en O, avec O entre A et A', et entre B et B'. On donne $\widehat{AOB} = 48°$.

Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont opposés par le sommet. Ils ont donc la même mesure :

$$\widehat{A'OB'} = \widehat{AOB} = 48°$$

Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOA'}$ forment l'angle plat $\widehat{AOA'}$: ils sont supplémentaires. Donc :

$$\widehat{BOA'} = 180° - 48° = 132°$$

À toi

À toi : quatre angles autour d'un point

Deux droites se coupent en O et forment quatre angles. L'un d'eux mesure $72°$. Trace la figure sur ton cahier. Trouve la mesure des trois autres angles, en justifiant.

Indice 1
Cherche d'abord l'angle opposé par le sommet à l'angle de $72°$.

Indice 2

Un angle voisin de l'angle de $72°$ forme avec lui un angle plat : calcule $180° - 72°$.

Indice 3

Point délicat : les deux angles voisins sont eux aussi opposés par le sommet. Ils ont donc la même mesure.

Réponse

L'angle qui fait face à l'angle de $72°$ mesure aussi $72°$, car ces deux angles sont opposés par le sommet.

Un angle voisin forme un angle plat avec l'angle de $72°$: ils sont supplémentaires. Ce voisin mesure :

$$180° - 72° = 108°$$

L'autre voisin lui est opposé par le sommet : il mesure aussi $108°$.

Les quatre angles mesurent $72°$, $108°$, $72°$ et $108°$.

Exemple : trois angles qui forment un angle plat

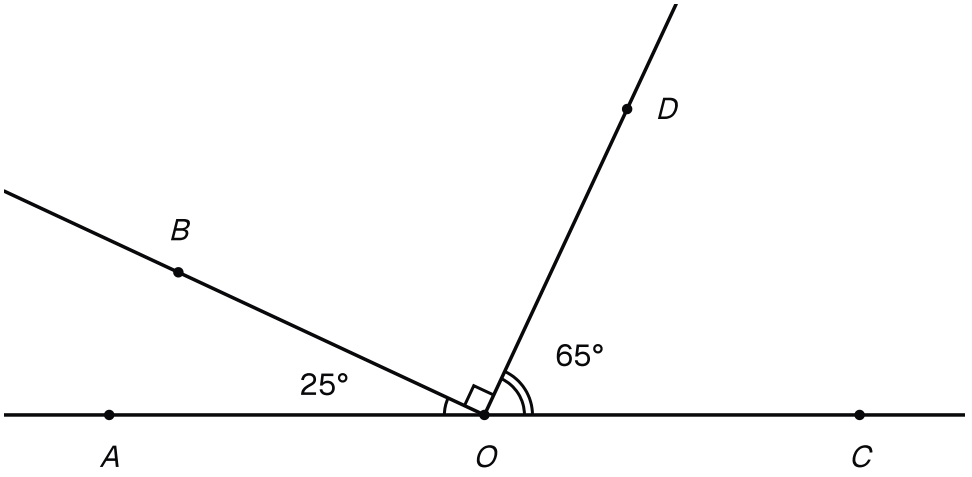
Sur une droite, place A, O et C dans cet ordre. Au-dessus, trace deux demi-droites $[OB)$ et $[OD)$, avec $[OB)$ plus près de $[OA)$. On donne $\widehat{AOB} = 25°$ et $\widehat{BOD} = 90°$.

Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOD}$ sont adjacents, ainsi que $\widehat{BOD}$ et $\widehat{DOC}$. Ensemble, ils forment l'angle plat $\widehat{AOC}$. Leur somme vaut donc $180°$, et :

$$\begin{aligned}\widehat{DOC} &= 180° - (25° + 90°) \\ &= 65°\end{aligned}$$

Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{DOC}$ sont complémentaires, car :

$$25° + 65° = 90°$$



Trois angles côte à côte au-dessus de la droite (AC) : 25 degrés, un angle droit, puis 65 degrés.

Deux droites et une sécante

La figure du chapitre

Devine : À la même place

Sur ton cahier, trace deux lignes et un trait en biais qui les coupe en A, en haut, et en B, en bas. En A, colorie l'angle situé au-dessus de la ligne et à droite du trait. En B, quel angle est « à la même place » ?

A. L'angle au-dessus de la ligne, à droite du trait.

Juste.

En B, on garde les deux repères : au-dessus de la ligne et à droite du trait. Ces deux angles vont recevoir un nom.

B. L'angle au-dessous de la ligne, à gauche du trait.

Faux.

Cet angle est à l'opposé : en dessous et à gauche. Il fait face, en B, à l'angle qui est à la même place.

C. L'angle au-dessous de la ligne, à droite du trait.

Faux.

Tu as gardé le côté droit, mais tu as changé le haut et le bas. La même place garde les deux repères.

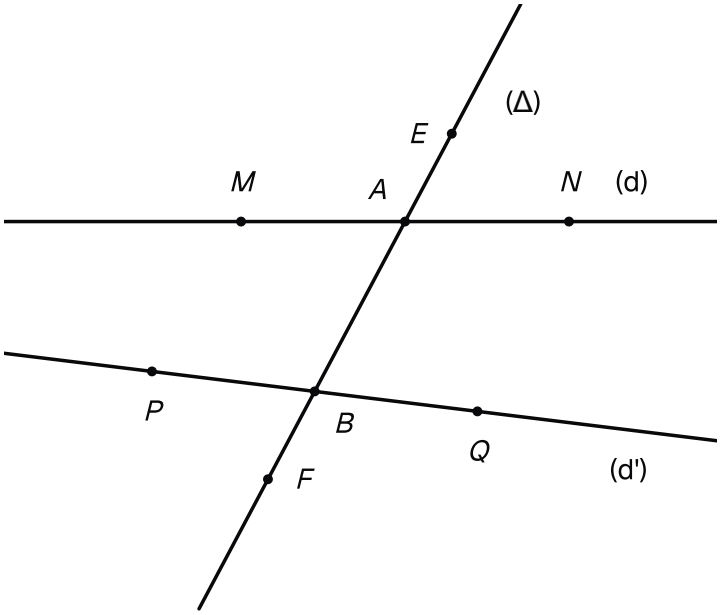
Correction

L'angle à la même place en B est au-dessus de la ligne du bas et à droite du trait. On dira que ces deux angles sont **correspondants**.

Voici la figure de tout le chapitre. Trace-la sur ton cahier, à la règle. Ici, rien ne dit encore que (d) et (d') sont parallèles.

Trace deux droites, (d) en haut et (d') en bas. Trace une droite (Δ) en biais, qui rencontre (d) au point A et (d') au point B. Une droite qui coupe deux autres droites s'appelle une **sécante**.

Sur (d), place M à gauche de A, puis N à droite. Sur (d'), place P à gauche de B, puis Q à droite. Sur (Δ), place E au-dessus de A, puis F au-dessous de B.



La figure de tout le chapitre : (d) en haut, (d') en bas, et la sécante (Δ) qui les rencontre en A et en B.

Définition : Angles alternes-internes, angles correspondants

Sur toute la suite, on fixe la figure suivante. Deux droites (d) et (d') sont coupées par une troisième droite (Δ), appelée **sécante** : (Δ) coupe (d) en A et (d') en B. La droite (d) est au-dessus de (d'). Sur (d), le point M est à gauche de A et le point N à droite. Sur (d'), le point P est à gauche de B et le point Q à droite. Sur (Δ), le point E est au-dessus de A et le point F au-dessous de B.

La bande comprise entre (d) et (d') est appelée l'**intérieur**.

- Deux angles sont **alternes-internes** lorsqu'ils ont pour sommets A et B, qu'ils sont tous les deux à l'intérieur, et de part et d'autre de la sécante. Il y a deux paires : $\widehat{MAB}$ et $\widehat{ABQ}$; $\widehat{NAB}$ et $\widehat{ABP}$.
- Deux angles sont **correspondants** lorsqu'ils ont pour sommets A et B, qu'ils sont du même côté de la sécante, l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur : ils occupent la même position en A et en B. Il y a quatre paires : $\widehat{EAN}$ et $\widehat{ABQ}$; $\widehat{EAM}$ et $\widehat{ABP}$; $\widehat{MAB}$ et $\widehat{PBF}$; $\widehat{NAB}$ et $\widehat{QBF}$.

Exemple : nommer des paires sur ta figure

Les angles $\widehat{NAB}$ et $\widehat{ABP}$ sont alternes-internes : tous deux entre (d) et (d'), de part et d'autre de (Δ).

Les angles $\widehat{EAM}$ et $\widehat{ABP}$ sont correspondants : tous deux à gauche de (Δ), chacun au-dessus de sa droite.

Les angles $\widehat{EAN}$ et $\widehat{MAB}$ ne forment aucune de ces paires, car ils ont le même sommet A. Ils sont opposés par le sommet.

Repérer les paires d'angles

Méthode : repérer les angles d'une sécante

1. **Trouver la sécante** : repère la droite qui traverse les deux autres. Marque ses deux points de rencontre.
2. **Colorier la bande** : colorie légèrement l'espace entre les deux droites. C'est la bande.
3. **Chercher les alternes-internes** : un angle en chaque point, les deux dans la bande, un de chaque côté de la sécante.
4. **Chercher les correspondants** : un angle en chaque point, du même côté de la sécante, à la même place par rapport à sa droite.

Vérifie : Le partenaire de ABQ

Avec la figure du chapitre, quel angle forme avec $\widehat{ABQ}$ une paire d'angles alternes-internes ?

A. $\widehat{NAB}$

Faux.
$\widehat{NAB}$ est bien dans la bande, mais du même côté de (Δ) que $\widehat{ABQ}$: à droite. Il faut changer de côté.

B. $\widehat{EAN}$

Faux.
$\widehat{EAN}$ est au-dessus de (d), donc hors de la bande. Il forme avec $\widehat{ABQ}$ une paire d'angles correspondants.

C. $\widehat{MAB}$

Juste.
$\widehat{MAB}$ est dans la bande, à gauche de (Δ), et $\widehat{ABQ}$ est dans la bande, à droite. C'est la bonne paire.

Correction

Les angles $\widehat{MAB}$ et $\widehat{ABQ}$ sont alternes-internes : ils sont entre (d) et (d'), de part et d'autre de (Δ).

Attention : la bande et le côté

On cherche l'angle correspondant à $\widehat{NAB}$.

✗ « $\widehat{ABP}$ est l'angle correspondant à $\widehat{NAB}$. » Ces deux angles sont dans la bande, de part et d'autre de (Δ) : ils sont alternes-internes.

✓ « $\widehat{QBF}$ est l'angle correspondant à $\widehat{NAB}$. » Les deux sont à droite de (Δ), chacun au-dessous de sa droite.

Retiens aussi : deux angles qui ont le même sommet ne forment jamais une de ces paires.

À toi

À toi : deux partenaires à trouver

Avec la figure du chapitre, trouve l'angle correspondant à $\widehat{EAM}$. Trouve ensuite l'angle qui forme avec $\widehat{NAB}$ une paire d'angles alternes-internes.

Indice 1
Repère d'abord la place de $\widehat{EAM}$: au-dessus ou au-dessous de (d) ? À gauche ou à droite de (Δ) ?
Indice 2
Pour les correspondants, garde la même place en B. Pour les alternes-internes, reste dans la bande et change de côté.
Indice 3
Point délicat : chaque réponse a son sommet en B, jamais en A.

Réponse
$\widehat{EAM}$ est au-dessus de (d), à gauche de (Δ). Son correspondant est au-dessus de (d'), à gauche de (Δ) : c'est $\widehat{ABP}$.

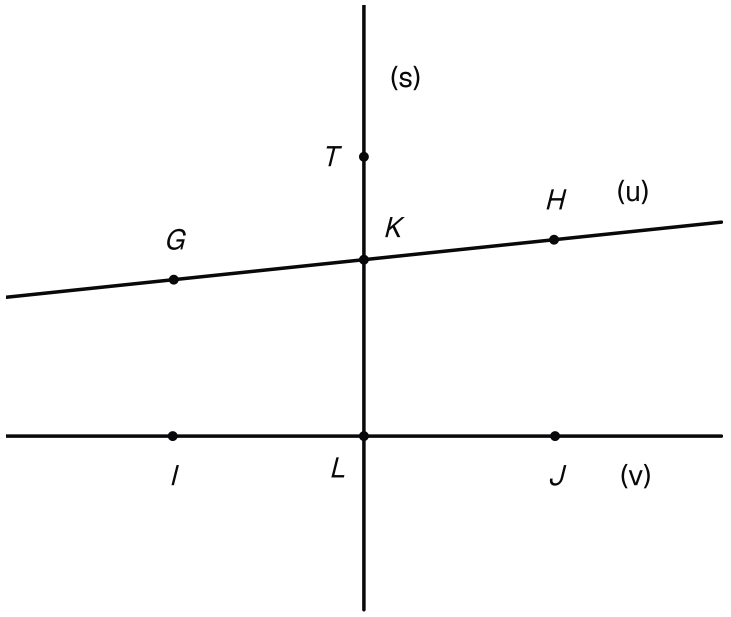
$\widehat{NAB}$ est dans la bande, à droite de (Δ). Son partenaire alterne-interne est dans la bande, à gauche : c'est encore $\widehat{ABP}$.

Exemple : une sécante verticale

Une figure peut être tournée. Trace une sécante (s) verticale. Elle coupe une droite (u) en K, en haut, et une droite (v) en L, en bas.

Sur (u), place G à gauche de K et H à droite. Sur (v), place I à gauche de L et J à droite. Sur (s), place T au-dessus de K.

La bande est entre (u) et (v). Les angles $\widehat{GKL}$ et $\widehat{KLJ}$ sont alternes-internes. Les angles $\widehat{TKH}$ et $\widehat{KLJ}$ sont correspondants : tous deux à droite de (s), au-dessus de leur droite.



Une figure tournée : la sécante (s) est verticale et coupe (u) en K, en haut, puis (v) en L, en bas.

Avec deux parallèles, des angles égaux

Les angles alternes-internes

Devine : Mesurer avant de prouver

Trace la figure du chapitre avec (d) et (d') **parallèles** : suis deux lignes de ton cahier. Tu vas mesurer au rapporteur $\widehat{MAB}$ et $\widehat{ABQ}$, deux angles alternes-internes. Que vas-tu trouver ?

A. Deux mesures de somme $180°$.

Faux.

Deux voisins le long d'une droite, comme $\widehat{MAB}$ et $\widehat{NAB}$, ont une somme de $180°$. Ici, mesure $\widehat{MAB}$ et $\widehat{ABQ}$: tu trouves deux valeurs égales.

B. Deux mesures sans aucun lien.

Faux.

Les droites sont parallèles : la sécante les coupe avec la même inclinaison. Les deux mesures ont donc un lien précis.

C. Deux mesures égales.

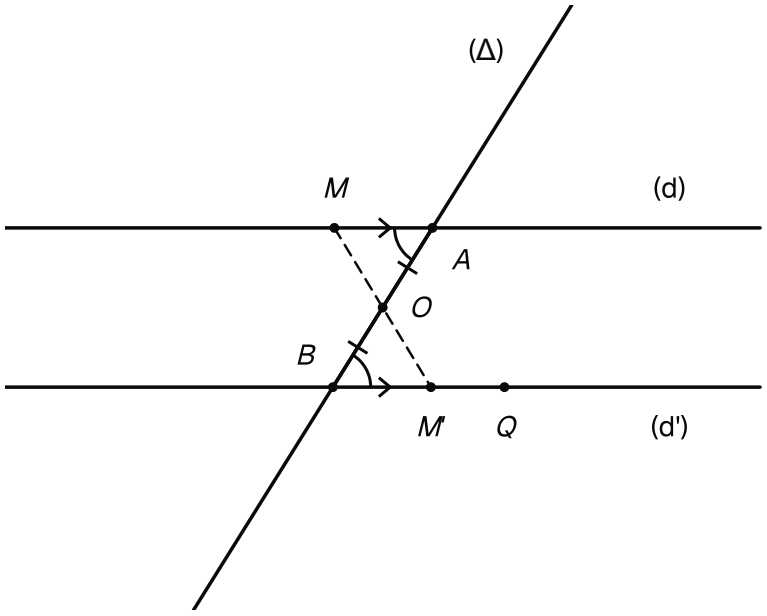
Juste.

À un degré près, le rapporteur donne la même valeur. La suite explique pourquoi l'égalité est exacte.

Correction
Avec deux droites parallèles, les deux angles alternes-internes ont la même mesure. Le rapporteur le suggère ; la propriété qui suit le prouve.

Rappel du chapitre sur la symétrie centrale : le symétrique d'un point par rapport à un point O est le point de l'autre côté de O, à la même distance. Le symétrique d'une droite est une droite qui lui est parallèle. Un angle et son symétrique ont la même mesure.

Pourquoi est-ce vrai ? On prend le milieu O du segment $[AB]$. Le symétrique de l'angle $\widehat{MAB}$ par rapport à O est l'angle $\widehat{ABQ}$.



Le milieu O de [AB] envoie A sur B, M sur M' et l'angle MAB sur l'angle ABQ, de même mesure.

Propriété : Deux parallèles et une sécante : angles alternes-internes

Si deux droites **parallèles** sont coupées par une sécante, alors les angles **alternes-internes** qu'elles forment ont la **même mesure**.

Avec la figure fixée : si $(d) \parallel (d')$, alors $\widehat{MAB} = \widehat{ABQ}$ et $\widehat{NAB} = \widehat{ABP}$.

Démonstration

Étape 1. On appelle O le milieu du segment $[AB]$. Dans la symétrie de centre O, le symétrique de A est B et le symétrique de B est A.

Étape 2. Le symétrique de la droite (d) est une droite parallèle à (d) qui passe par B, symétrique de A. Par B ne passe qu'une seule parallèle à (d) : c'est (d'). Le symétrique M' de M est donc sur (d').

Étape 3. Le point M n'est pas sur (Δ), et le milieu O de $[MM']$ est sur (Δ) : M et M' sont de part et d'autre de (Δ). Donc M' est sur (d'), du côté de Q : il est sur $[BQ)$.

Étape 4. Le symétrique de l'angle $\widehat{MAB}$ est l'angle $\widehat{M'BA}$, c'est-à-dire $\widehat{QBA}$. La symétrie centrale conserve les angles : $\widehat{MAB} = \widehat{ABQ}$. De même, avec N : $\widehat{NAB} = \widehat{ABP}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Par rapport au milieu O de $[AB]$, le symétrique de A est B. Celui de B est A.

Le symétrique de (d) est la parallèle à (d) qui passe par B : c'est (d'). Un angle en A a donc son symétrique en B, de même mesure.

Vérifie : Une seule parallèle

Dans la preuve, on lit : « Par B ne passe qu'une seule parallèle à (d) : c'est (d'). » À quoi sert cette phrase ?

A. À savoir que le symétrique de (d) est (d').

Juste.
Le symétrique de (d) est une parallèle à (d) qui passe par B. Une seule droite convient : (d'). Le symétrique de M tombe donc sur (d').

B. À prouver que (d) et (d') sont parallèles.

Faux.
Le parallélisme est une donnée de la propriété : on ne le prouve pas ici. La phrase sert à trouver le symétrique de (d).

C. À trouver le milieu O du segment $[AB]$.

Faux.
Le milieu O est choisi au tout début de la preuve. Cette phrase parle de la droite symétrique de (d).

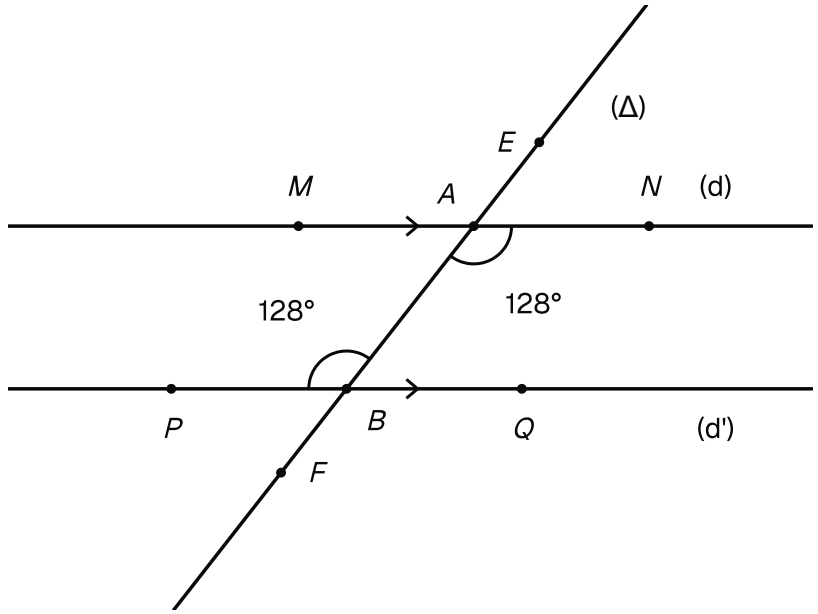
Correction
Le symétrique de (d) est parallèle à (d) et passe par B. Par B, une seule parallèle à (d) existe : c'est (d'). Ainsi le symétrique de (d) est (d'), et l'angle en A a son symétrique en B.

Exemple : un angle alterne-interne

On sait que $(d) \parallel (d')$ et que $\widehat{NAB} = 128°$. On cherche $\widehat{ABP}$.

Les angles $\widehat{NAB}$ et $\widehat{ABP}$ sont alternes-internes. Comme $(d) \parallel (d')$, d'après la propriété des angles alternes-internes :

$$\widehat{ABP} = \widehat{NAB} = 128^\circ$$



Avec (d) parallèle à (d'), les angles alternes-internes NAB et ABP mesurent tous deux 128 degrés.

Les angles correspondants

Mesure maintenant $\widehat{EAN}$ et $\widehat{ABQ}$, deux angles correspondants. Tu trouves encore deux mesures égales.

Pourquoi est-ce vrai ? Pas besoin d'une idée nouvelle. On remplace l'un des deux angles par l'angle qui lui est opposé par le sommet, puis on utilise les alternes-internes.

Propriété : Deux parallèles et une sécante : angles correspondants

Si deux droites **parallèles** sont coupées par une sécante, alors les angles **correspondants** qu'elles forment ont la **même mesure**.

Avec la figure fixée : si $(d) \parallel (d')$, alors $\widehat{EAN} = \widehat{ABQ}$, $\widehat{EAM} = \widehat{ABP}$, $\widehat{MAB} = \widehat{PBF}$ et $\widehat{NAB} = \widehat{QBF}$.

Démonstration

Étape 1. Prenons la paire $\widehat{EAN}$ et $\widehat{ABQ}$. Les angles $\widehat{EAN}$ et $\widehat{MAB}$ sont opposés par le sommet : A est entre E et B, et entre M et N. D'après la propriété des angles opposés par le sommet, $\widehat{EAN} = \widehat{MAB}$.

Étape 2. Les droites (d) et (d') sont parallèles. D'après la propriété des angles alternes-internes, $\widehat{MAB} = \widehat{ABQ}$.

Étape 3. Donc $\widehat{EAN} = \widehat{ABQ}$. De même, $\widehat{EAM} = \widehat{NAB}$ (opposés par le sommet) et $\widehat{NAB} = \widehat{ABP}$ (alternes-internes) : $\widehat{EAM} = \widehat{ABP}$.

Étape 4. Pour les deux dernières paires, on remplace l'angle de sommet B : $\widehat{PBF} = \widehat{ABQ}$ et $\widehat{QBF} = \widehat{ABP}$ (opposés par le sommet). Avec les angles alternes-internes, $\widehat{MAB} = \widehat{PBF}$ et $\widehat{NAB} = \widehat{QBF}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une paire d'angles correspondants se ramène à une paire d'angles alternes-internes. On fait deux pas : l'angle opposé par le sommet, puis la propriété des alternes-internes. Enchaîner deux propriétés connues en donne une nouvelle.

Vérifie : Le bon remplaçant

Pour la paire $\widehat{EAN}$ et $\widehat{ABQ}$, la preuve dit : « Les angles $\widehat{EAN}$ et $\widehat{MAB}$ sont opposés par le sommet : A est entre E et B, et entre M et N. »

Pour la paire $\widehat{EAM}$ et $\widehat{ABP}$, par quel angle opposé par le sommet remplace-t-on $\widehat{EAM}$?

A. Par $\widehat{MAB}$.

Faux.
$\widehat{MAB}$ est voisin de $\widehat{EAM}$, le long de (Δ) : ces angles sont supplémentaires, pas opposés par le sommet.

B. Par $\widehat{NAB}$.

Juste.
$\widehat{EAM}$ et $\widehat{NAB}$ sont opposés par le sommet. Puis $\widehat{NAB}$ et $\widehat{ABP}$ sont alternes-internes.

C. Par $\widehat{EAN}$.

Faux.
$\widehat{EAN}$ est voisin de $\widehat{EAM}$, le long de (d) : ces angles sont supplémentaires, pas opposés par le sommet.

Correction
On remplace $\widehat{EAM}$ par $\widehat{NAB}$: $\widehat{EAM} = \widehat{NAB}$, car ces angles sont opposés par le sommet.

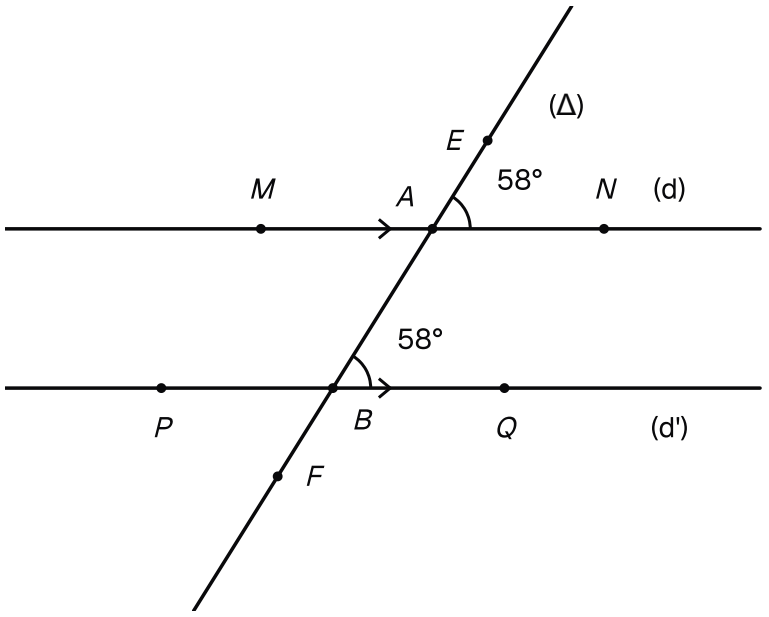
Comme $(d) \parallel (d')$, d'après la propriété des angles alternes-internes, $\widehat{NAB} = \widehat{ABP}$. On obtient ainsi l'égalité des angles correspondants $\widehat{EAM}$ et $\widehat{ABP}$.

Exemple : un angle correspondant

On sait que $(d) \parallel (d')$ et que $\widehat{EAN} = 58°$. On cherche $\widehat{ABQ}$.

Les angles $\widehat{EAN}$ et $\widehat{ABQ}$ sont correspondants. Comme $(d) \parallel (d')$, d'après la propriété des angles correspondants :

$$\widehat{ABQ} = \widehat{EAN} = 58°$$



Deux angles correspondants de 58 degrés : EAN au-dessus de (d) et ABQ au-dessus de (d'), à droite de la sécante.

Calculer un angle

Méthode : calculer un angle avec deux parallèles

1. **Lire les données** : vérifie que le texte affirme le parallélisme des deux droites.
   - Si le texte ne l'affirme pas, n'écris aucune égalité entre deux sommets différents.
2. **Reconnaître la paire** : dis si les angles sont alternes-internes, correspondants, opposés par le sommet ou supplémentaires.
3. **Nommer la propriété** : écris « Comme $(d) \parallel (d')$, d'après la propriété des angles … ».
4. **Finir** :
   - pour deux angles de même mesure, recopie la mesure ;
   - pour deux angles supplémentaires, calcule avec $180°$.

Exemple : enchaîner deux propriétés

On sait que $(d) \parallel (d')$ et que $\widehat{EAM} = 112°$. On cherche $\widehat{ABQ}$.

L'angle voisin. Les points E, A et B sont alignés : les angles $\widehat{EAM}$ et $\widehat{MAB}$ sont supplémentaires. Donc :

$$\widehat{MAB} = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$$

Les parallèles. Les angles $\widehat{MAB}$ et $\widehat{ABQ}$ sont alternes-internes. Comme $(d) \parallel (d')$, d'après la propriété des angles alternes-internes :

$$\widehat{ABQ} = \widehat{MAB} = 68^\circ$$

Attention : sans parallèles, pas d'égalité

Énoncé : la sécante (Δ) coupe (d) en A et (d') en B, avec $\widehat{MAB} = 70^\circ$. L'énoncé ne dit rien de plus sur (d) et (d').

✗ « Les angles $\widehat{MAB}$ et $\widehat{ABQ}$ sont alternes-internes, donc $\widehat{ABQ}$ mesure 70°. »

✓ « On ne sait pas si $(d) \parallel (d')$. On ne peut pas trouver $\widehat{ABQ}$ avec la propriété des angles alternes-internes. »

Si les deux droites se croisent, deux angles alternes-internes ont des mesures différentes : tu le prouveras avec la propriété réciproque, plus loin.

À toi

À toi : de B jusqu'à A

On sait que $(d) \parallel (d')$ et que $\widehat{QBF} = 63^\circ$. Trace la figure du chapitre. Calcule $\widehat{MAB}$, en citant chaque propriété.

Indice 1
Cherche d'abord un angle de sommet A qui est à la même place que $\widehat{QBF}$.
Indice 2
$\widehat{QBF}$ et $\widehat{NAB}$ sont correspondants. Ensuite, $\widehat{MAB}$ et $\widehat{NAB}$ forment un angle plat.
Indice 3
Point délicat : $\widehat{MAB}$ n'a pas la même mesure que $\widehat{QBF}$. Il faut un calcul avec 180°.

Réponse
Les angles $\widehat{QBF}$ et $\widehat{NAB}$ sont correspondants. Comme $(d) \parallel (d')$, d'après la propriété des angles correspondants :

$$\widehat{NAB} = \widehat{QBF} = 63^\circ$$

Les angles $\widehat{MAB}$ et $\widehat{NAB}$ sont supplémentaires, car M, A et N sont alignés. Donc :

$$\begin{aligned}\widehat{MAB} &= 180^\circ - 63^\circ \\ &= 117^\circ\end{aligned}$$

Remarque : Coin devoir : rédiger un calcul d'angle

En devoir, une égalité d'angles se justifie en trois temps : la donnée, la propriété, la conclusion.

Modèle, avec $(d) \parallel (d')$ et $\widehat{MAB} = 52°$:

« Les droites (d) et (d') sont parallèles. Les angles $\widehat{MAB}$ et $\widehat{ABQ}$ sont alternes-internes. D'après la propriété des angles alternes-internes, $\widehat{ABQ} = \widehat{MAB} = 52°$. »

Apprends cette rédaction : elle sert à chaque calcul d'angle.

Reconnaître deux droites parallèles

Des angles égaux, des droites parallèles

Devine : Tracer au rapporteur

Trace une droite (d). Place un point A sur (d), et un point M à gauche de A. Au rapporteur, trace une sécante (Δ) par A, et place B sur (Δ), sous A, pour que $\widehat{MAB} = 50°$.

En B, trace au rapporteur une droite (d'), avec un point Q à droite de B, pour que $\widehat{ABQ} = 50°$. Les angles alternes-internes $\widehat{MAB}$ et $\widehat{ABQ}$ mesurent alors tous les deux $50°$. Comment sont (d) et (d') ?

A. Elles se coupent, loin à droite.

Faux.
Prolonge les deux droites aussi loin que tu veux : elles ne se rencontrent pas. Leur écart reste le même.

B. Elles sont parallèles.

Juste.
Les deux droites ne se rencontrent pas. Ce n'est pas un hasard du dessin : la suite le prouve.

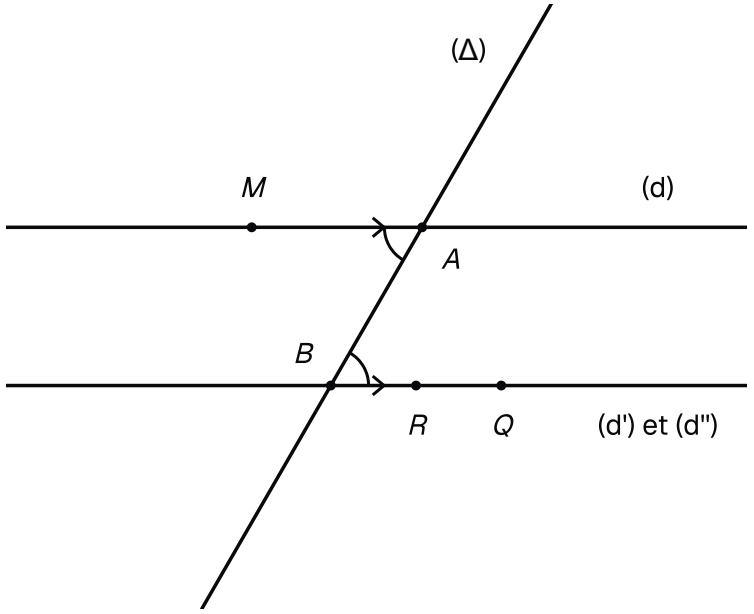
C. Elles sont perpendiculaires.

Faux.
Des droites perpendiculaires se coupent en formant un angle droit. Ici, (d) et (d') ne se coupent pas.

Correction
Avec deux angles alternes-internes de même mesure, les droites (d) et (d') sont parallèles. C'est la propriété de la section précédente, lue dans l'autre sens.

Jusqu'ici, on partait de deux parallèles pour obtenir des angles égaux. On fait maintenant le chemin inverse. Cette propriété s'appelle une **réciproque** : on échange ce que l'on sait et ce que l'on conclut.

Pourquoi est-ce vrai ? On trace la parallèle à (d) qui passe par B. On montre qu'elle se confond avec (d').



La parallèle (d'') à (d) menée par B forme l'angle ABR égal à MAB : elle se confond avec (d').

Propriété : Reconnaître deux droites parallèles par les angles

Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles **alternes-internes de même mesure**, ou deux angles **correspondants de même mesure**, alors ces deux droites sont **parallèles**.

Avec la figure fixée : si $\widehat{MAB} = \widehat{ABQ}$, ou si $\widehat{EAN} = \widehat{ABQ}$, alors $(d) \parallel (d')$.

Démonstration

Étape 1. Supposons $\widehat{MAB} = \widehat{ABQ}$. Par B passe une seule parallèle à (d) ; on l'appelle (d''). Elle est distincte de (d), car B n'est pas sur (d). On place sur (d'') un point R du même côté de (Δ) que Q.

Étape 2. Les droites (d) et (d'') sont parallèles. D'après la propriété des angles alternes-internes, $\widehat{ABR} = \widehat{MAB}$, donc $\widehat{ABR} = \widehat{ABQ}$.

Étape 3. Les demi-droites $[BR)$ et $[BQ)$ forment le même angle avec $[BA)$, du même côté de (Δ). Au rapporteur, on ne peut tracer qu'une seule demi-droite ainsi : elles sont confondues. Donc $(d') = (d'')$, et $(d) \parallel (d')$.

Étape 4. Si $\widehat{EAN} = \widehat{ABQ}$: d'après la propriété des angles opposés par le sommet, $\widehat{MAB} = \widehat{EAN}$, donc $\widehat{MAB} = \widehat{ABQ}$, et on conclut par les étapes 1 à 3. Pour les autres paires, on se ramène à ces cas en échangeant la gauche et la droite, ou avec les angles opposés par le sommet en B.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On construit d'abord la vraie parallèle à (d) par B. Elle forme le même angle que (d'), du même côté de la sécante. Une seule demi-droite peut former cet angle : les deux droites n'en font qu'une.

Vérifie : Deux demi-droites, une seule

Reprends la figure décrite dans la preuve. R est un point de la parallèle (d'') tracée par B, du même côté de (Δ) que Q.

La preuve affirme : « Au rapporteur, on ne peut tracer qu'une seule demi-droite ainsi : elles sont confondues. » Quelles demi-droites sont confondues ?

A. $[BA)$ et $[BQ)$
Faux.
$[BA)$ est le côté commun des deux angles. Elle sert de repère pour mesurer : elle ne bouge pas.

B. $[AM)$ et $[BQ)$
Faux.
$[AM)$ part de A, pas de B. Les deux demi-droites confondues ont la même origine B.

C. $[BR)$ et $[BQ)$
Juste.
$[BR)$ est sur la parallèle tracée par B, et $[BQ)$ sur (d'). Elles forment le même angle avec $[BA)$, du même côté.

Correction
Ce sont $[BR)$ et $[BQ)$. Donc la parallèle (d'') et la droite (d') sont une seule et même droite, et $(d) \parallel (d')$.

Exemple : conclure à un parallélisme

Sur la figure du chapitre, on donne $\widehat{EAN} = 74^\circ$ et $\widehat{ABQ} = 74^\circ$.

Les angles $\widehat{EAN}$ et $\widehat{ABQ}$ sont correspondants, et ils ont la même mesure. D'après la propriété qui permet de reconnaître deux droites parallèles par les angles, $(d) \parallel (d')$.

Démontrer un parallélisme

Méthode : démontrer que deux droites sont parallèles

1. **Choisir la sécante** : prends une droite qui coupe les deux droites étudiées.
2. **Choisir deux angles** : une paire alternes-internes ou correspondants, avec un angle en chaque point.
3. **Trouver les deux mesures** : prends-les dans les données, ou obtiens-les par un calcul.

4. **Conclure** :
   - si les mesures sont égales, les droites sont parallèles ;
   - si les mesures sont différentes, elles ne le sont pas.

Attention : ne pars pas de la conclusion

On veut démontrer que $(d) \parallel (d')$. On sait que $\widehat{MAB} = 81°$ et $\widehat{ABQ} = 81°$.

✗ « Les droites sont parallèles, donc les angles alternes-internes ont la même mesure. »

✓ « Les angles $\widehat{MAB}$ et $\widehat{ABQ}$ sont alternes-internes et de même mesure. D'après la propriété qui permet de reconnaître deux droites parallèles par les angles, $(d) \parallel (d')$. »

La phrase marquée ✗ suppose déjà ce qu'il fallait prouver.

À toi

À toi : parallèles ou pas ?

Sur la figure du chapitre, on donne $\widehat{NAB} = 66°$ et $\widehat{ABQ} = 114°$. Les droites (d) et (d') sont-elles parallèles ? Justifie.

Indice 1
Les deux angles donnés ne forment pas une paire alternes-internes. Cherche un angle voisin de $\widehat{ABQ}$.
Indice 2
$\widehat{ABP}$ et $\widehat{ABQ}$ forment un angle plat : calcule $\widehat{ABP}$.
Indice 3
Point délicat : compare ensuite $\widehat{NAB}$ et $\widehat{ABP}$, qui sont alternes-internes.

Réponse
Les angles $\widehat{ABP}$ et $\widehat{ABQ}$ sont supplémentaires, car P, B et Q sont alignés. Donc :

$$\begin{aligned}\widehat{ABP} &= 180° - 114° \\ &= 66°\end{aligned}$$

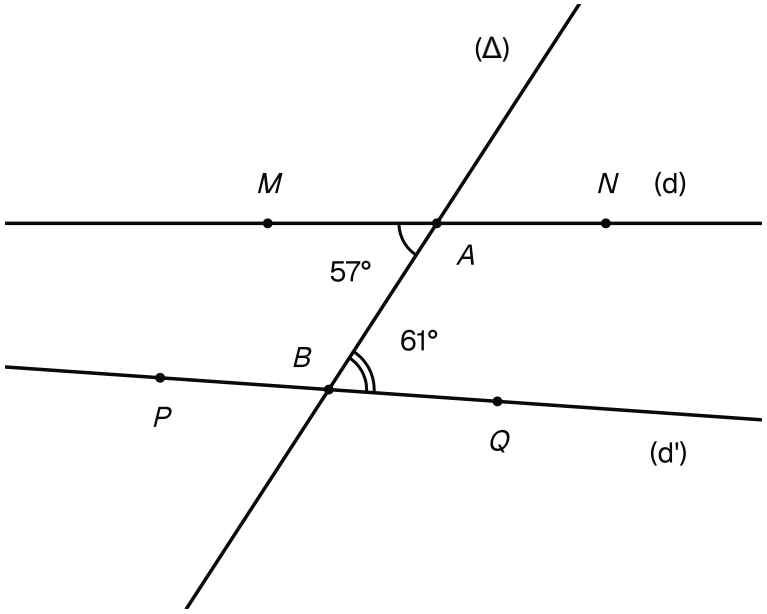
Les angles $\widehat{NAB}$ et $\widehat{ABP}$ sont alternes-internes, et ils mesurent tous les deux $66°$. D'après la propriété qui permet de reconnaître deux droites parallèles par les angles, $(d) \parallel (d')$.

Exemple : des droites qui ne sont pas parallèles

On donne $\widehat{MAB} = 57°$ et $\widehat{ABQ} = 61°$. Ces angles sont alternes-internes, mais leurs mesures sont différentes.

Si (d) et (d') étaient parallèles, ces deux angles seraient égaux, d'après la propriété des angles alternes-internes. Or ils ne le sont pas.

Donc (d) et (d') ne sont pas parallèles : elles se coupent.



Deux angles alternes-internes de 57 et 61 degrés : les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles et finissent par se couper.

Parallèles et perpendiculaires

Une perpendiculaire à deux parallèles

Devine : L'équerre sur deux lignes

Sur ton cahier, prends deux lignes parallèles. Trace à l'équerre une droite perpendiculaire à la ligne du haut. Que fait cette droite avec la ligne du bas ?

A. Elle lui est aussi perpendiculaire.

Juste.

Pose l'équerre en bas : l'angle est droit lui aussi. La suite prouve que c'est vrai pour toutes les parallèles.

B. Elle la coupe en faisant un angle aigu.

Faux.

Pose l'équerre sur la ligne du bas : l'angle est droit. La droite ne la coupe pas en biais.

C. Elle ne la rencontre jamais.

Faux.

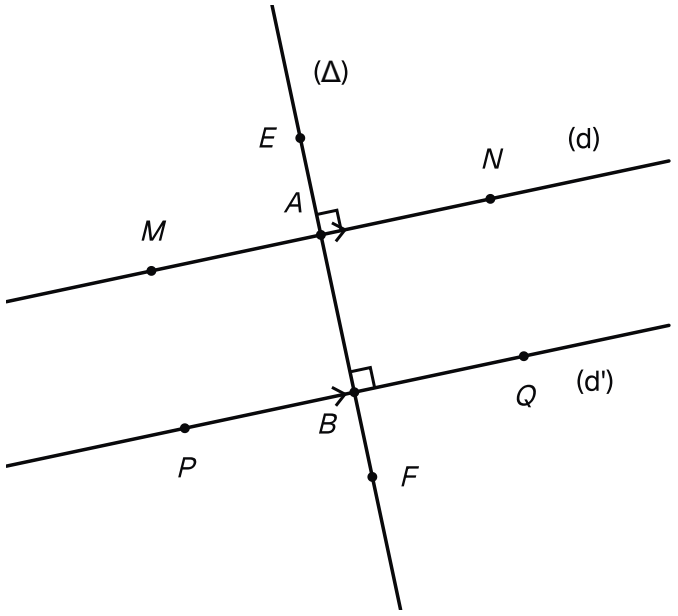
Prolonge la droite : elle traverse la ligne du bas. Sinon, elle et la ligne du haut seraient deux parallèles à la ligne du bas passant par un même point : elles seraient confondues, alors qu'elles sont perpendiculaires.

Correction
La droite est aussi perpendiculaire à la ligne du bas. Tu vas voir pourquoi avec les angles correspondants.

Rappel du chapitre sur les droites perpendiculaires et parallèles : par un point ne passe qu'une seule parallèle à une droite.

Pourquoi est-ce vrai ? On utilise les angles correspondants. Mais d'abord, la preuve fait un détour.

Imaginons le contraire de ce que l'on veut : on arrive à une situation impossible. Donc ce contraire était faux.



(Δ) coupe à angle droit la première des deux parallèles en A, puis la seconde en B, encore à angle droit.

Propriété : Une perpendiculaire à l'une de deux parallèles

Si deux droites sont **parallèles**, alors toute droite **perpendiculaire** à l'une est **perpendiculaire** à l'autre.

Autrement dit : si $(d) \parallel (d')$ et $(\Delta) \perp (d)$, alors $(\Delta) \perp (d')$.

Démonstration

Étape 1. La droite (Δ) coupe (d) en un point A. Elle coupe aussi (d') : sinon, (Δ) et (d) seraient deux droites parallèles à (d') passant par A. Or par A ne passe qu'une seule parallèle à (d') : elles seraient confondues, alors qu'elles sont perpendiculaires. On appelle B le point d'intersection de (Δ) et (d') ; B est distinct de A, car (d) et (d') n'ont aucun point commun.

Étape 2. On nomme les points comme sur la figure fixée. Comme $(\Delta) \perp (d)$, l'angle $\widehat{EAN}$ est droit : $\widehat{EAN} = 90°$.

Étape 3. Les droites (d) et (d') sont parallèles. D'après la propriété des angles correspondants, $\widehat{ABQ} = \widehat{EAN} = 90°$. L'angle $\widehat{ABQ}$ est droit, donc $(\Delta) \perp (d')$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Un angle droit en A a un angle correspondant en B. Avec deux parallèles, ce correspondant mesure aussi $90°$. Mais d'abord, la preuve vérifie que la droite coupe bien la seconde parallèle.

Vérifie : Pourquoi la droite coupe la seconde

La preuve imagine que (Δ) ne coupe pas (d'). Elle écrit : « Or par A ne passe qu'une seule parallèle à (d') : elles seraient confondues, alors qu'elles sont perpendiculaires. »

Pourquoi (Δ) et (d) ne peuvent-elles pas être confondues ?

A. Parce que (d) et (d') sont parallèles.
Faux.
Le parallélisme de (d) et (d') ne dit rien sur (Δ) et (d). C'est la perpendicularité qui les distingue.

B. Parce que (Δ) est parallèle à (d').
Faux.
C'est justement ce que la preuve imagine. Cette idée mène à une situation impossible.

C. Parce que (Δ) est perpendiculaire à (d).
Juste.
Deux droites perpendiculaires se coupent en formant un angle droit. Ce sont donc deux droites différentes.

Correction
On sait que $(\Delta) \perp (d)$: ces deux droites forment un angle droit en A. Ce sont donc deux droites différentes. Imaginer que (Δ) ne coupe pas (d') mène à une situation impossible : (Δ) coupe donc (d').

Exemple : les traverses du tramway

Les deux rails d'un tramway sont parallèles. Sous les rails, une traverse en béton est posée perpendiculairement au premier rail.

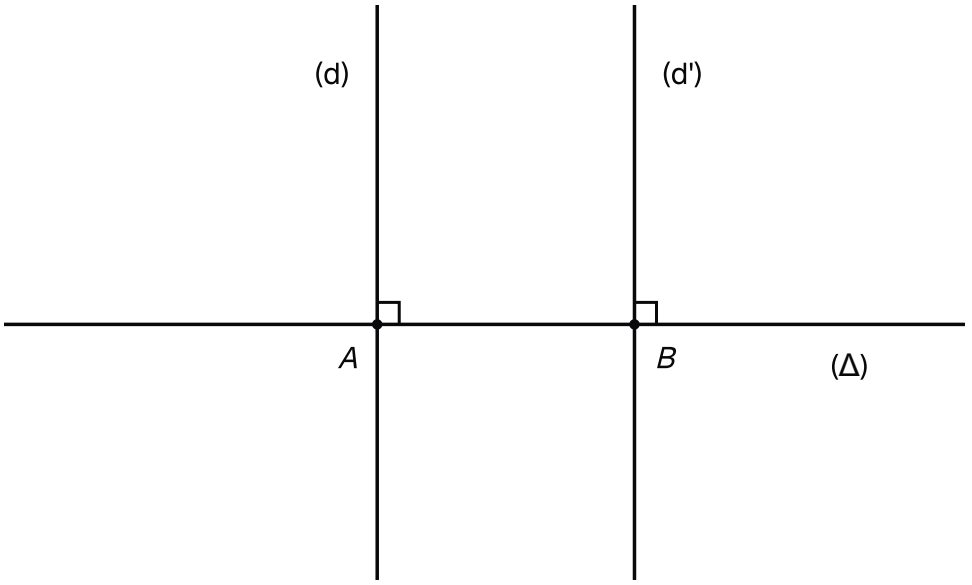
On note (d) et (d') les rails, et (Δ) la traverse. On sait que $(d) \parallel (d')$ et que $(\Delta) \perp (d)$. D'après la propriété de la droite perpendiculaire à deux parallèles, $(\Delta) \perp (d')$.

La traverse est donc aussi perpendiculaire au second rail, sans aucune mesure.

Deux perpendiculaires à une même droite

Change de question. Trace une droite, puis deux perpendiculaires à cette droite, en deux points différents. Elles semblent parallèles.

Pourquoi est-ce vrai ? On utilise deux angles correspondants droits, puis la propriété qui reconnaît deux droites parallèles par les angles. Là aussi, la preuve commence par imaginer le contraire.



Les droites (d) et (d') sont toutes deux perpendiculaires à (Δ), en deux points différents A et B.

Propriété : Deux perpendiculaires à une même droite

Si deux droites distinctes sont **perpendiculaires à une même droite**, alors elles sont **parallèles**.

Autrement dit : si $(d) \perp (\Delta)$ et $(d') \perp (\Delta)$, avec $(d) \neq (d')$, alors $(d) \parallel (d')$.

Démonstration

Étape 1. On appelle A le point d'intersection de (d) et (Δ), et B celui de (d') et (Δ). Les points A et B sont distincts : sinon, (d) et (d') seraient deux perpendiculaires à (Δ) passant par le même point. Or par un point ne passe qu'une seule perpendiculaire à une droite : (d) et (d') seraient confondues, alors qu'elles sont distinctes.

Étape 2. La droite (Δ) est donc une sécante qui coupe (d) en A et (d') en B. On nomme les points comme sur la figure fixée. Les deux droites sont perpendiculaires à (Δ) : $\widehat{EAN} = 90°$ et $\widehat{ABQ} = 90°$.

Étape 3. Ces deux angles correspondants ont la même mesure. D'après la propriété « reconnaître deux droites parallèles par les angles », $(d) \parallel (d')$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux angles droits ont la même mesure. S'ils sont correspondants, la réciproque donne le parallélisme. Mais d'abord, la preuve vérifie que les deux points d'intersection A et B sont distincts.

Vérifie : Un seul point de rencontre ?

La preuve explique : « Les points A et B sont distincts : sinon, (d) et (d') seraient deux perpendiculaires à (Δ) passant par le même point. » Que se passerait-il si A et B étaient le même point ?

A. (d) et (d') seraient parallèles.
Faux.
Deux droites distinctes qui passent par un même point se coupent : elles ne sont pas parallèles.

B. (d) et (d') seraient la même droite.
Juste.
Par ce point, une seule perpendiculaire à (Δ) existe. Donc (d) et (d') seraient confondues, alors qu'elles sont distinctes.

C. (Δ) serait parallèle à (d).
Faux.
(Δ) est perpendiculaire à (d) : ces deux droites se coupent. L'argument porte sur (d) et (d').

Correction
Si A et B étaient confondus, (d) et (d') seraient deux perpendiculaires à (Δ) par le même point. Or il n'y en a qu'une : (d) et (d') seraient la même droite. Comme elles sont distinctes, A et B sont distincts.

Exemple : tracer des parallèles à l'équerre

Sur ton cahier, trace une droite (Δ). En deux points différents, trace à l'équerre deux droites (d) et (d') perpendiculaires à (Δ).

On sait que $(d) \perp (\Delta)$ et $(d') \perp (\Delta)$, avec (d) et (d') distinctes. D'après la propriété de deux droites perpendiculaires à la même droite, $(d) \parallel (d')$.

C'est une façon simple de tracer deux parallèles.

À toi

À toi : deux propriétés à la suite

On sait que $(d) \perp (\Delta)$ et $(d') \perp (\Delta)$, avec (d) et (d') distinctes. Une quatrième droite (L) est perpendiculaire à (d). Que peux-tu dire de (L) et (d') ? Justifie en deux temps.

Indice 1
Commence par (d) et (d') : elles sont toutes les deux perpendiculaires à (Δ).
Indice 2
Tu obtiens deux droites parallèles. Regarde ensuite (L), perpendiculaire à l'une d'elles.
Indice 3
Point délicat : cite deux propriétés différentes, une à chaque temps, dans le bon ordre.

Réponse
D'abord, $(d) \perp (\Delta)$ et $(d') \perp (\Delta)$, avec (d) et (d') distinctes. D'après la propriété de deux droites perpendiculaires à la même droite, $(d) \parallel (d')$.

Ensuite, $(d) \parallel (d')$ et $(L) \perp (d)$. D'après la propriété de la droite perpendiculaire à deux parallèles, $(L) \perp (d')$.

Remarque **: Coin devoir : rédiger une perpendicularité**

En devoir, on écrit les deux données, puis la propriété, puis la conclusion.

Modèle : « On sait que $(d) \parallel (d')$ et que $(\Delta) \perp (d)$. D'après la propriété de la droite perpendiculaire à deux parallèles, $(\Delta) \perp (d')$. »

Ne saute aucune des deux données : chacune est une condition de la propriété.

La somme des angles d'un triangle

Découvrir la somme

Devine : Les trois coins d'un triangle

Découpe un triangle dans une feuille de papier. Colorie ses trois coins, puis déchire-les. Pose les trois coins côte à côte, les pointes au même endroit. Que forment-ils ?

A. Un angle plat, comme une droite.
Juste.
Les bords extérieurs des trois coins forment une droite. La somme des trois angles semble faire $180°$.

B. Un angle droit, comme un coin de page.
Faux.
Un angle droit ne fait que $90°$. Les trois coins réunis prennent deux fois plus de place.

C. Un angle différent pour chaque triangle.

Faux.

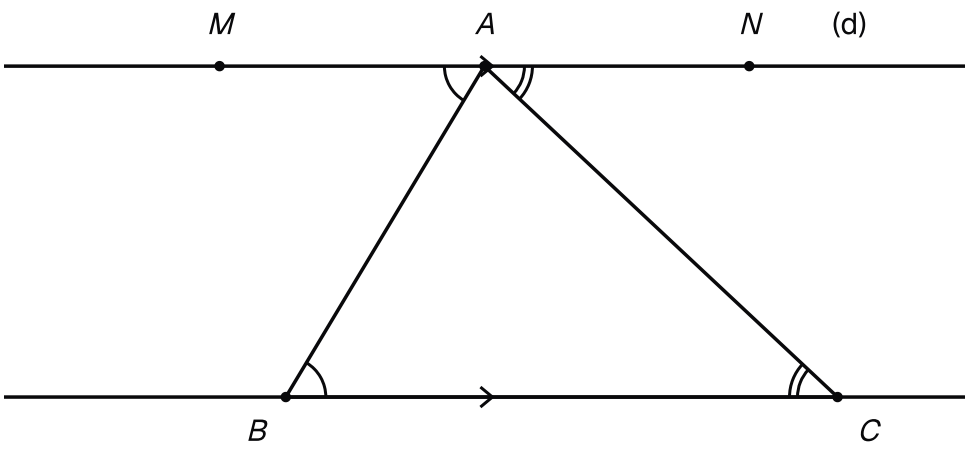
Essaie avec un autre triangle : tu obtiens encore un angle plat. Le résultat ne dépend pas du triangle.

Correction

Les trois coins forment un angle plat. La somme des trois angles du triangle semble égale à $180°$.

Rappel du chapitre sur le triangle : tu as admis que les trois angles d'un triangle ont une somme de $180°$, et tu t'en es servi.

Pourquoi est-ce vrai ? Le papier déchiré ne prouve rien, car il est imprécis. On le démontre maintenant avec une parallèle et les angles alternes-internes.



Par A, la parallèle (d) à (BC) recopie en A les angles du triangle situés en B et en C.

Théorème : Somme des angles d'un triangle

Dans tout triangle ABC, la somme des mesures des trois angles est égale à $180°$:

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°.$$

Démonstration

Étape 1. Trace (BC) en bas, avec B à gauche et C à droite. Par le point A passe une seule droite (d) parallèle à (BC) ; elle est distincte de (BC), car A n'est pas sur (BC). Sur (d), place M à gauche de A et N à droite.

Étape 2. La droite (AB) est une sécante des parallèles (d) et (BC). Les angles $\widehat{MAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont entre ces deux droites, de part et d'autre de (AB) : ils sont alternes-internes. D'après la propriété des angles alternes-internes, $\widehat{MAB} = \widehat{ABC}$.

Étape 3. De même, avec la sécante (AC) : $\widehat{CAN} = \widehat{ACB}$.

Étape 4. Les angles $\widehat{MAB}$ et $\widehat{BAC}$ sont adjacents, ainsi que $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAN}$. Ensemble, ils forment l'angle plat $\widehat{MAN}$: $\widehat{MAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAN} = 180°$. En remplaçant, on obtient $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180°$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On trace, par un sommet, la parallèle au côté opposé. Les angles alternes-internes recopient les deux autres angles du triangle autour de ce sommet. Les trois angles forment alors un angle plat.

Vérifie : Un angle plat dans la preuve

Reprends la figure décrite dans la preuve : M et N sont sur la parallèle (d) tracée par A, M à gauche de A et N à droite.

La preuve affirme : « Ensemble, ils forment l'angle plat $\widehat{MAN}$ ». Pourquoi $\widehat{MAN}$ est-il un angle plat ?

A. Parce que (d) est parallèle à (BC).

Faux.
Le parallélisme sert aux angles alternes-internes. Il ne dit pas pourquoi $\widehat{MAN}$ est plat.

B. Parce que le triangle a trois angles.

Faux.
Le nombre d'angles n'y est pour rien. Un angle est plat quand ses deux côtés forment une droite.

C. Parce que M, A et N sont sur la droite (d).

Juste.
M et N sont de part et d'autre de A sur (d). Les côtés $[AM)$ et $[AN)$ forment une droite : l'angle est plat.

Correction
M, A et N sont alignés sur (d), avec A entre M et N. Donc $\widehat{MAN}$ est un angle plat : il mesure $180°$.

Exemple : le troisième angle

Dans un triangle ABC, on donne $\widehat{BAC} = 47°$ et $\widehat{ABC} = 68°$.

D'après la propriété de la somme des trois angles d'un triangle :

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$$

On en déduit la mesure du troisième angle :

$$\begin{aligned}\widehat{ACB} &= 180^\circ - (47^\circ + 68^\circ) \\ &= 180^\circ - 115^\circ \\ &= 65^\circ\end{aligned}$$

Calculer dans un triangle

Méthode : calculer un angle d'un triangle

1. **Poser la somme** : écris que les trois angles du triangle, avec leurs noms, ont une somme de 180°.
2. **Lire la nature du triangle** :
   - isocèle : deux angles à la base de même mesure ;
   - équilatéral : trois angles de 60° ;
   - rectangle : un angle de 90°.
3. **Calculer** : retire de 180° la somme des angles connus.
4. **Vérifier** : additionne les trois mesures ; tu dois retrouver 180°.

Exemple : trois triangles particuliers

Isocèle. Le triangle RST est isocèle en R, avec $\widehat{SRT} = 40^\circ$. D'après la propriété de la somme des trois angles d'un triangle :

$$\begin{aligned}\widehat{RST} + \widehat{RTS} &= 180^\circ - 40^\circ \\ &= 140^\circ\end{aligned}$$

Le triangle est isocèle, donc ses angles en S et en T sont égaux. Chacun mesure :

$$140^\circ \div 2 = 70^\circ$$

Équilatéral. Les trois angles sont égaux, et leur somme vaut 180° d'après la propriété de la somme des trois angles d'un triangle. Chacun mesure :

$$180^\circ \div 3 = 60^\circ$$

Rectangle. Le triangle UVW est rectangle en U, avec $\widehat{UVW} = 34^\circ$. D'après la propriété de la somme des trois angles d'un triangle :

$$\begin{aligned}\widehat{UWV} &= 180^\circ - (90^\circ + 34^\circ) \\ &= 56^\circ\end{aligned}$$

Ses deux angles aigus sont complémentaires :

$$34^\circ + 56^\circ = 90^\circ$$

Attention : un dessin ne prouve rien

Tu mesures les angles d'un triangle tracé : $61°$, $58°$ et $62°$.

✗ « La somme fait $181°$, donc la propriété est fausse pour ce triangle. »

✓ « Le rapporteur donne des valeurs approchées. D'après la propriété de la somme des trois angles d'un triangle, la somme exacte vaut $180°$. »

Un dessin aide à chercher. Pour conclure, il faut les données et une propriété.

À toi

À toi : un triangle isocèle

Le triangle IJK est isocèle en I, et $\widehat{IJK} = 38°$. Trace-le sur ton cahier. Calcule $\widehat{JIK}$.

Indice 1
Dans un triangle isocèle en I, les deux angles à la base, en J et en K, ont la même mesure.
Indice 2
Tu connais alors deux angles. Écris la somme des trois angles du triangle.
Indice 3
Point délicat : l'angle de $38°$ compte deux fois dans la somme.

Réponse
Le triangle est isocèle en I : les angles en J et en K sont égaux. Donc $\widehat{IKJ}$ mesure $38°$, comme $\widehat{IJK}$.

D'après la propriété de la somme des trois angles d'un triangle :

$$\begin{aligned}&\widehat{JIK}\\&= 180° - (38° + 38°)\\&= 180° - 76°\\&= 104°\end{aligned}$$

Contrôle : $104° + 38° + 38° = 180°$.

Remarque : Coin devoir : rédiger un calcul dans un triangle

En devoir, on nomme le triangle, on cite la propriété, puis on calcule.

Modèle, avec $\widehat{BAC} = 53°$ et $\widehat{ABC} = 71°$:

« Dans le triangle ABC, on connaît deux angles. D'après la propriété de la somme des trois angles d'un triangle, $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$. Donc $\widehat{ACB} = 180° - (53° + 71°) = 56°$. »

Synthèse

Tu sais maintenant nommer les angles formés par deux droites et une sécante. Tu sais calculer un angle sans rapporteur, en citant une propriété. Tu sais aussi prouver que des droites sont parallèles, ou perpendiculaires.

Enfin, tu as démontré que les trois angles d'un triangle font $180°$ ensemble. Tu l'avais admis : maintenant, tu sais pourquoi.

> **À retenir : Trois idées à retenir**
>
> - Avec deux droites parallèles, les angles alternes-internes et les angles correspondants ont la même mesure.
> - Dans l'autre sens, deux tels angles de même mesure prouvent que les droites sont parallèles.
> - Une égalité d'angles se justifie par une propriété citée, jamais par un dessin.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Deux parallèles et une sécante » (1ac · general · mathematiques)